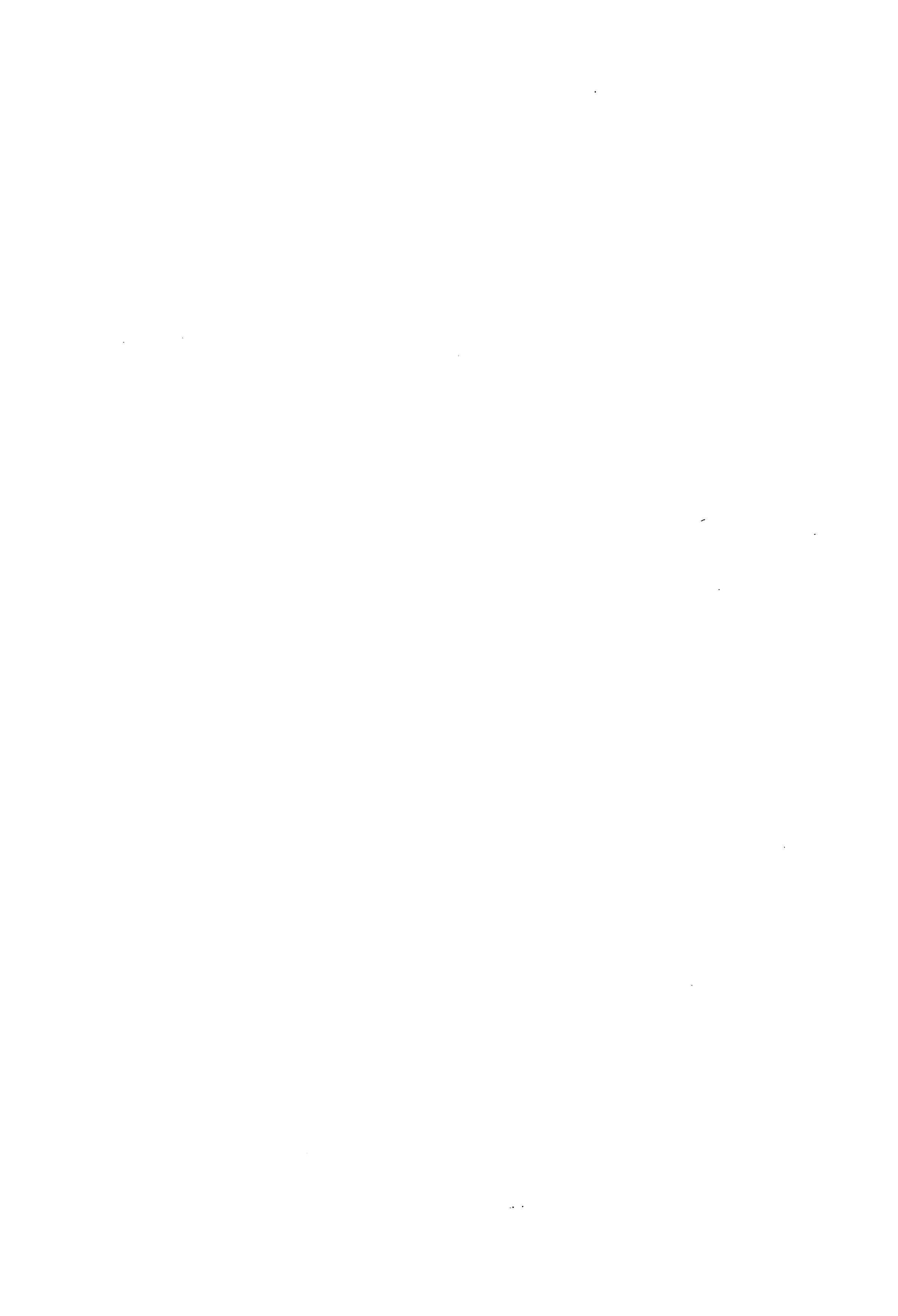
OFF

Schroed.-







LEHRBUCH

DER

ARITHMETIK UND ALGEBRA

FÜR LEHRER UND STUDIRENDE

VON

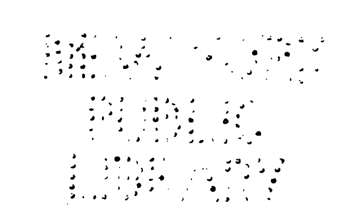
Dr. E. SCHRÖDER,

PROFESSOR AM PRO- UND REALGYMNASIUM IN BADEN-BADEN.

ERSTER BAND.

DIE SIEBEN ALGEBRAISCHEN OPERATIONEN.

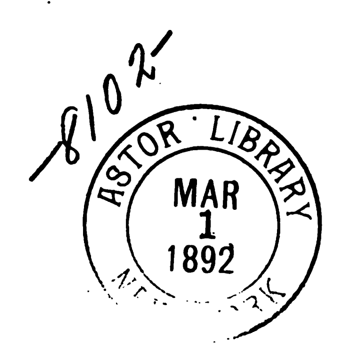




LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1873.


8102
ASTOR LIBRARY
MAR
1
1892

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit über *die sieben algebraischen Operationen* bildet ein in sich abgeschlossenes Ganzes und soll auf selbständigen Werth Anspruch haben. Doch ist sie ausserdem bestimmt, den ersten Band eines ausführlichen Werkes über die Anfangsgründe des rein analytischen Theiles der Mathematik zu bilden.

Ein zweiter Band wird die Lehre *von den natürlichen Zahlen* enthalten, specieller: die wissenschaftliche Begründung der gemeinen Arithmetik, die Elemente der Zahlentheorie, der Combinatorik und der Grössenlehre; ein dritter Band soll dann *die analytischen Zahlen* behandeln und ein vierter überhaupt die *Analysis des Endlichen* zum Abschluss bringen.

Von jedem Bande wird möglichst bald nach dessen Hinausgabe in demselben Verlag und unter dem Titel „*Abriss der Arithmetik und Algebra für Schüler*" ein kurzer Auszug erscheinen, geeignet um Schülern in die Hand gegeben zu werden, sobald von dem Unterrichtenden auch nur einigermassen die in dem ausführlichern Werke dargelegten Anschauungen gewürdigt werden.

Zu der erstgenannten Arbeit veranlasste mich zunächst der Wunsch, ein fundamentales Werk hergestellt zu sehen, welches meinen eigenen an ein solches gestellten Anforderungen nach Möglichkeit genügte.

In der Hauptsache kann ich diese Anforderungen dahin zusammenfassen.

1) Erstlich kam es mir darauf an, die thunlichste *Vollständigkeit* und Vielseitigkeit zu erzielen. Sie zu erreichen war nur dadurch möglich, dass ich mich jederzeit auf ein enges Gebiet beschränkte, somit das alte „non multa sed multum" in Acht nahm.

Auf den einzelnen Gebieten habe ich dann die einschlägige Literatur in grossem Umfange berücksichtigt und wird man schwerlich etwas bedeutendes von mir übersehen finden. Unten folgt ein Verzeichniss derjenigen Werke, deren Studium mir bei dem Ganzen — soweit ich es jetzt schon anzugeben vermag — in hervorragendem

Grade förderlich gewesen ist. Auf dieses Verzeichniss ist im Texte bei den Citaten mit (l. c.) fortwährend hingewiesen; auch habe ich bisweilen — an einigen wenigen hierdurch noch einmal besonders hervorgehobenen Stellen — eine Untersuchung beinahe wörtlich reproducirt, wenn mir deren Darstellung nicht abänderungsbedürftig erschien.

Der kundige Leser wird gleichwohl in dem dargebotenen mehr als ein blosses Sammelwerk erblicken und nicht nur überall den Spuren einer selbstthätigen Denkarbeit begegnen, sondern auch — in Anbetracht einer schon so vielfach behandelten Materie — vielleicht doch nicht wenige neue Untersuchungen und dem Verfasser eigenthümliche Betrachtungsweisen vorfinden. Ich begnüge mich hier, den zweiten Abschnitt des dritten und des vierten Kapitels sowie den grösseren Theil der Einleitung und des Anhanges als Beispiele von solchen Partieen aus diesem ersten Bande hervorzuheben, bei denen es mir oblag, sie fast ohne Anknüpfungspunkte erstmalig zu entwerfen.

Die neuen Betrachtungen, welche mir nöthig erschienen, nebst dem besten, was ich als schon geleistet vorfand, habe ich nun gestrebt zu einem einzigen Gusse zu verschmelzen.

In die Forderung der Vollständigkeit schliesse ich noch die ein, dass überall die verschiedenen zu Gebot stehenden Methoden kritisch gesichtet, und dass überhaupt die didaktischen nicht minder wie die wissenschaftlichen Interessen berücksichtigt werden.

2) Ferner schien es mir wünschenswerth, in Hinsicht auf Gründlichkeit dem sich fortwährend steigernden Bedürfnisse Rechnung zu tragen und — wenn auch ohne Pedanterie in der Form — vielfach grössere *Strenge* anzuwenden. Vor allem war ich auf eine consequent durchgeführte Unterscheidung zwischen *zwingenden Gründen* und *Beweggründen* bedacht. Die letzteren, die bisher ungebührlich vernachlässigt zu werden scheinen, suchte ich mehr in den Vordergrund zu stellen. — Auf dem Gebiete der formalen Algebra werden die aus den verschiedenen Fundamentalvoraussetzungen fliessenden Schlussfolgerungen auch *gesondert* zur Anschauung gebracht und so eine exacte Theorie der *vieldeutigen* Operationen und Ausdrücke angebahnt.

3) Ein Hauptgewicht habe ich endlich auf eine *bessere Anordnung des Materials* gelegt. Ich glaube, dass die nachfolgend durchgeführte Anordnung, ungeachtet der Reichhaltigkeit des Stoffes, die schärfste Gliederung des Ganzen zulässt, sodass das Gebäude im Verein mit einem festen inneren Zusammenhang aller Theile eine ausgezeichnete Durchsichtigkeit und Planmässigkeit erhält.

Das Publicum, welches mir bei Abfassung des Buches vorschwebte, ist — wie schon aus der Aufschrift zu ersehen — kein durchaus *einheitliches*. Um viel-

mehr einem möglichst ausgedehnten Leserkreis das Buch dienstbar zu machen, war ich einerseits darauf bedacht, überall nur mit Betrachtungen der elementarsten Natur zu beginnen, doch andrerseits auch bestrebt, die Untersuchungen dann so weit als thunlich in die Höhe zu führen und so gewissermassen *mit* dem Leser aus dem Niveau des Anfängers bis in dasjenige des Fachmannes emporzusteigen.

Am meisten hatte ich dabei immerhin den jetzigen oder künftigen *Lehrer* der Mathematik im Auge. So entspringt die einigen Betrachtungen gewidmete Ausführlichkeit weniger aus dem Bestreben nur dem Verständniss des dabei vorausgesetzten Lesers näher zu treten, als dass sie vielmehr bezweckt, die Aufmerksamkeit desselben auf allen den Punkten verweilen zu machen, welche beim *Unterricht* berücksichtigt werden müssen. Auf den Verbalausdruck des grössten Theiles der Sätze würde ich haben verzichten können, wenn ich nicht aus Erfahrung wüsste, wie mannigfach an unsern Bildungsanstalten dieselben oft verunstaltet werden. — Jedenfalls aber, wenn ich auch selbst dem akademischen Lehrer werthvolles zu bieten hoffe, habe ich doch nicht für diesen allein geschrieben, und muss ich erwarten, dass jeder Theil des Publicums geneigt sei anzuerkennen, dass ich genöthigt war zu gunsten des andern einige Concessionen zu machen.

Bei der erzielten Uebersichtlichkeit und den häufig angebrachten Benachrichtigungen glaube ich in der That, dass es für jedermann leicht sein werde, sich das ihm passende herauszusuchen.

Ich habe mich ferner über Zweck und Gebrauch der für die Schüler bestimmten *Hefte* auszusprechen.

Dieselben sollen — möglichst billigen Preises und in gedrängter Form nur das nöthigste enthaltend — das Dictiren sowohl als die Anschaffung eines eigentlichen Lehrbuches ersparen. Die oben erwähnte Gliederung — hier noch gehoben durch die Sonderung in einzelne Hefte und den Wegfall zahlreicher Varianten — soll bewirken, dass der Lehrer gewissermassen selbst die Karten mischen kann. In der That meine ich, dass es auf diese Weise sich am besten hinbringen lässt, mit dem Gebrauch eines nicht selbstverfassten Lehrmittels die Geltendmachung eigener Individualität und Geschmacksrichtung zu vereinen.

Noch mehr aber möchte eine solche (bewegliche) Gliederung sich dadurch empfehlen, dass sie es ermöglicht, die keineswegs definitive oder über alle Vervollkommnung erhabene Vertheilung des mathematischen Lehrstoffes, wie sie an den deutschen sog. „höheren Schulen" üblich und theilweise durch Verordnungen sanctionirt ist, nach und nach Verbesserungen entgegenzuführen. Natürlich bin ich der Ansicht, dass die nächsten Fortschritte hinsichtlich einer rationelleren Vertheilung des mathematischen Unterrichtspensums darin bestehen müssten, dass in vielen Punkten eine Annäherung an den hier eingehaltenen Lehrgang erzielt würde. Dieser Gang ist allerdings zunächst mehr einer wissenschaftlichen als einer pädagogischen Tendenz entsprungen. Das nach rein wissenschaftlichen Gesichtspunkten eingetheilte Gebiet wird aber mit Leichtigkeit, wo pädagogische Rücksichten dies erheischen, frei nach allen Seiten durchwandert werden können. Ueberhaupt soll ja ein derartiger Leitfaden nicht als ein Gängelband für den Schüler dienen, an das derselbe sich jederzeit ängstlich anzuklammern hätte, sondern ist derselbe nur bestimmt die Anhaltspunkte zu bieten, an welche sich das in der Hauptsache durch reichliche Einübung und praktische Anwendung erst mühsam zu festigende Erkenntnissmaterial logisch anreihen und zu einem harmonischen Ganzen übersichtlich gruppiren sollte. In welchen Punkten nun jene Annäherung sich zunächst erreichen und wo sie mit den verordnungsmässigen

Vorschriften sich am besten in Einklang bringen liesse, wird ein jeder am besten selbst ausfindig machen, doch sollen auch die Verlagsberichte darüber noch näheres enthalten.

Die im Text angeführten Beispiele sind nur bestimmt zur Veranschaulichung und Erläuterung von solchen Ueberlegungen, die sonst vielleicht zu abstract erscheinen würden. Von *Uebungsbeispielen* ist in dem Lehrbuch sowohl als in den für die Schüler bestimmten Heften Umgang genommen, jedoch ist bei den letzteren auf die besten neueren Aufgabensammlungen verwiesen.

In Bezug auf dieses Lehrbuch habe ich noch zu erwähnen, dass ich bei der Vollendung desselben von Herrn Professor Lüroth in Karlsruhe durch manchen nützlichen Wink freundschaftlich unterstützt wurde und aus dem Interesse, mit welchem derselbe meine Arbeit verfolgte, grosse Ermuthigung geschöpft habe.

Für die Ausstattung und meisterhafte Bewältigung der nicht gewöhnlichen Schwierigkeiten des Druckes bin ich dem Verleger zu Danke verpflichtet.

Baden-Baden, im September 1873.

Ernst Schröder.

Literaturverzeichniss.

H. Grassmann, Lehrbuch der Arithmetik, Berlin 1861.

Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind, 1. Auflage, Braunschweig 1863.

J. H. T. Müller, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik, 1. Auflage, Halle 1838, 2. Aufl., erstes Heft, Halle 1855.

H. Hankel, Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen, I. Theil, Leipzig 1867.

M. Ohm, Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik, Bd. 1. und 2., zweite Auflage, Berlin 1829.

J. Bertrand, Traité d'Arithmétique, 4. éd. Paris 1867.

M. Cantor, Grundzüge einer Elementararithmetik, Heidelberg 1855.

R. Baltzer, Die Elemente der Mathematik, 1. Bd., 2. Aufl., Leipzig 1865.

Inhalt.

Erstes Kapitel: Einleitung.

Zweites Kapitel: Die drei directen Operationen.

I. *Die Addition in independenter Behandlung.*

II. *Die Addition in recurrenter Behandlung.*

III. *Die Multiplication in independenter Behandlung.*

IV. *Die Multiplication in recurrenter Behandlung.*

V. *Die Elevation in independenter Behandlung.*

Drittes Kapitel: Die vier inversen Operationen.

I. *Behandlung des Inversionsproblemes für die eindeutig ausfallenden Operationen.*

Viertes Kapitel: Gesetze der Verbindung sämmtlicher Operationen mit einander.

Anhang.

Ueber die symbolische Darstellung von Summen und Producten.

Die

sieben algebraischen Operationen.

„Lernen ohne Nachdenken ist unnütz".

Kong-fu-tse.

Erstes Kapitel.

Einleitung.

I. Die mathematischen Wissenschaften.

1.

Zu den *mathematischen Wissenschaften* pflegt man bekanntlich Disciplinen von zweierlei Art zu zählen. Die Disciplinen der einen Art besitzen schon von anbeginn einen rein speculativen Charakter. Dagegen waren die anderen ursprünglich Beobachtungswissenschaften, und sind — nach der Ausdrucksweise moderner Philosophen — erst aus dem inductiven in das deductive Stadium übergetreten; es handelt sich auch bei diesen jetzt nicht mehr um die Constatirung von Erfahrungsgrundlagen, auf denen das Gebäude ihrer Schlussfolgerungen zu errichten wäre, sondern nur noch darum, dies Gebäude weiter aufzuführen.

Die Disciplinen der letzteren Art, zu welchen die Geometrie, die Mechanik, die theorische Astronomie und noch andere mit dem gleichen Rechte gehören, lassen sich unter dem Namen der *angewandten Mathematik* zusammenfassen und mögen auch als Theile der Physik betrachtet werden.

Ihnen steht die *reine Mathematik* gegenüber, welche die meisten Disciplinen der ersteren Art umfasst und von der die Namen *Arithmetik, Algebra, Analysis, Infinitesimalcalcul, Functionentheorie* hervorragende Branchen bezeichnen.

Sie bildet eben dasjenige Gebiet, in welches das gegenwärtige Lehrbuch den Leser, wenigstens ein Stück weit, einzuführen beabsichtigt. Es ist daher zunächst eine Feststellung ihres Begriffes erforderlich — und zwar dies um so mehr, als die herkömmliche Definition heutzutage einer Abänderung bedürftig erscheint.

Nach der herkömmlichen Definition wird in der That die reine Mathematik als *allgemeine Grössenlehre* aufgefasst — eine Auffassung, die am deutlichsten in dem zur Zeit des Mittelalters gebräuchlichen Namen *Coss* sich ausprägte, der, von dem italienischen cosa (= causa,

chose, das Ding, die Grösse) abgeleitet, die damalige Buchstabenrechnung bezeichnete. Es liegen jedoch nun mannigfache Gründe vor, hievon abzugehen, und müssen wir der folgenden Erklärung den Vorzug geben:

Die (reine) Mathematik ist die Lehre von den Zahlen.

Dieselbe ist hiermit von neuem durch ihren *Gegenstand* charakterisirt. Wenn andrerseits zum Theil auch die Grundlagen oder *Voraussetzungen*, der *Zweck* und die *Methode* der Mathematik nicht minder charakteristisch für dieselbe sind, so gehe ich über letztere doch hier hinweg, um an geeigneterer Stelle darauf zurückzukommen. —

II. Die Zahlen im allgemeinen.

2.

Der Begriff der Zahl, welche, wie oben gesagt, das Object der Mathematik bildet, erfährt in dieser selbst eine fortschreitende und noch nicht abgeschlossene Erweiterung oder Entwickelung.

Schon die elementare Algebra führt nach der Reihe verschiedene Arten von Zahlen ein: *natürliche, negative, gebrochene, irrationale* und *laterale.*

In neuerer Zeit sind auch vielfach die *hypercomplexen* Zahlen behandelt worden, unter welchen sich die *alternirenden* Zahlen und Quaternionen schon eine grössere Bedeutung erworben haben, und nichts steht auch der Einführung noch anderer Zahlen*) im Wege, es sei denn der Umstand, dass ihre Anerkennung durch Darlegung ihrer Zweckmässigkeit mitunter erst erstritten werden müsste.

Wegen dieser noch ziemlich unbeschränkten Bildungsfähigkeit des Zahlbegriffes empfiehlt es sich — wie man nachträglich als gerechtfertigt anerkennen wird — nicht, eine andere als nur eine *vorläufige* Definition desselben zu geben.

Die *Zahl* (numerus, ἀριθμός) ist jedenfalls ein willkürlich von uns geschaffenes Zeichen, welches als Mittel dient, um sehr mannigfaltige Zwecke zu erreichen.

Nicht nur sind diese Zwecke schwer unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu bringen, sondern zum Verständniss derselben ist noch obendrein meist ein solcher Grad mathematischer Bildung erforderlich, dass für ein Lehrbuch dieses allein schon Grund genug wäre, im voraus keine erschöpfende Definition der Zahl zu versuchen.

---

*) Von Kummer sind z. B. die *idealen Primzahlen* eingeführt (Crelle's Journal, Bd. 35, p. 319 u. a. a. O.), man vergleiche ferner die *Gradzahlen*, über welche Thomae geschrieben (Abriss einer Theorie der complexen Functionen, pag. 40), sowie die complexen Zahlen von Galois, Kirkmann u. A.

Ein solches Zeichen ist mitunter sehr verschiedenartiger, mitunter gar keiner Bedeutung fähig oder doch theilhaftig. Man unterwirft dasselbe willkürlich soviel Gesetzen als nothwendig und hinreichend sind zur Bestimmung der Eigenschaften desselben, um sodann durch Schlussfolgerungen diese übrigen Eigenschaften daraus abzuleiten.

Von den *Zahlensymbolen* oder Zahlen bleiben noch die Rechenzeichen oder *Operationssymbole* zu unterscheiden, welche ursprünglich nicht für sich, sondern nur zur Verknüpfung der ersteren verwendet werden.

Entsprechend dem Entwickelungsgange, den die Wissenschaft selbst genommen hat, werde ich also den Begriff der Zahl nur *stufenweise* ausbilden, und gehe ich aus von der Betrachtung der einfachsten Art von Zahlen, deren Wesen am leichtesten zu begreifen ist. Dies sind die sogenannten *natürlichen* Zahlen, welche auch, im Gegensatz zu den übrigen, *ganze positive* Zahlen genannt werden.

Wie einfach übrigens die Natur dieser Zahlen auch sein mag, so begegnet doch die wissenschaftliche Besprechung derselben — wie es gerade bei solchen Dingen, die unbewusst schon jedermann geläufig sind, anerkanntermassen zu geschehen pflegt — sehr eigenthümlichen und nicht unerheblichen Schwierigkeiten. Man ist deshalb gewöhnlich bemüht, so rasch als möglich über sie hinwegzukommen und scheut sich auf das ängstlichste, an das Grenzgebiet der Philosophie zu streifen. Es wird dagegen der Versuch, die Untersuchungen ein wenig mehr, als üblich ist, zu vertiefen, auch nicht ganz ungerechtfertigt erscheinen.

III. Die natürlichen Zahlen insbesondere.

3. Bedingungen der Zählbarkeit.

Die Anforderung, Dinge zu zählen, kann vernünftigerweise nur gestellt werden, wo solche Gegenstände vorliegen, welche deutlich von einander unterscheidbar, zum Beispiel räumlich oder zeitlich von einander getrennt oder gegeneinander abgegrenzt erscheinen.

So lässt sich — um ein Paar Beispiele anzuführen — die Anzahl der in einer Metallgiesserei auf einmal gegossenen Stücke erst ermessen, nachdem sie auseinandergeschlagen sind, und ebensowenig könnten auch die Sprengstücke eines Hohlgeschosses gezählt werden, ehe dasselbe crepirt ist. Desgleichen, wenn man auf einer physisch-geographischen, auf einer blossen Fluss- und Gebirgskarte die Anzahl der nebeneinander bestehenden Staaten erkennen wollte, so müssten zuvor die Grenzen dieser Staaten mittelst Farben gegeneinander abgehoben und, kurz gesagt, die Karte zu einer politischen gemacht werden etc. Somit steht in der That der Satz fest:

Wofern wir fähig sein sollen, Dinge zu zählen, so müssen diese in unsrer Vorstellung (durch ein Merkmal) *voneinander geschieden sein;* es müssen — in der Sprache der Logikbücher — *disjuncte* Dinge sein.

Als eine nahezu selbstverständliche Voraussetzung des Zählens muss ferner die angesehen werden, dass die Zählobjecte sowohl in ihrer Gesammtheit gegeben, als auch dass sie individuell *bestimmte* seien, d. h. man muss wissen, *was* eigentlich gezählt werden soll.

Bei der Zumuthung z. B., Geld zu zählen, wird doch jedermann erst fragen müssen, welches Geld damit gemeint sei?

Natürlich müssen die zu zählenden Objecte der Betrachtung durch den Zählenden auch *zugänglich* sein, etc.

Wenn die Objecte gleichzeitig gedacht werden, so entsteht die Vorstellung von einer *Menge* (quantitas); nimmt man dagegen die Vorstellungen dieser Objecte nacheinander ausgebildet an, wodurch dieselben eine bestimmte *Ordnung* oder Aufeinanderfolge (Succession) erhalten, so bezeichnet man die Menge vorzugsweise gern als eine *Reihe* (series). Wegen der freien Wahl, die man jederzeit zwischen beiderlei Vorstellungsweisen hat, kommt es übrigens nicht sehr darauf an, dass diese Unterscheidung strenge festgehalten werde.

4. Veranlassende Umstände.

Zum Zählen von Dingen werden wir uns jedoch nur insofern veranlasst fühlen, als dieselben irgend etwas *gemeinsames* haben, etwas, wodurch sie sich uns in gleicher Weise als Objecte des Zählens darbieten oder empfehlen. Das gemeinsame braucht nicht gerade in den Dingen selbst zu liegen; es mag in einer zufälligen Beziehung dieser Dinge zu uns bestehen, zufolge deren sie sich uns nacheinander oder nebeneinander als Vorstellungselemente aufdrängen. Wir zählen die Dinge nur insofern, als sie uns zu einem Zweck, den wir gerade im Auge haben, für *gleich* gelten können, oder:

Nur wenn sich Dinge gleichen — in Hinsicht eines Merkmals, auf welches unsre Aufmerksamkeit besonders gerichtet ist — *wird die Frage nach ihrer Anzahl entstehen.* Dann aber, sobald die Dinge nur unter irgend einem Gesichtspunkt einander ähnlich erscheinen, kann diese Frage auch jedesmal aufgeworfen werden.

Auf der grossen Allgemeinheit der vorstehenden Bemerkungen beruht die unbeschreiblich grosse Ausdehnung der Anwendungen, welche von den Zahlen und ihrer Lehre, der Arithmetik, gemacht werden können, und mag in dieser Beziehung der Ausspruch Melanchthon's hier eine Stelle finden: „Mihi, si linguae sint centum, oraque centum, non possem enumerare, quam multis in rebus usus sit numerorum" (dessen Vorrede zur Arithmetica integra von Michael Stifel).

Umgekehrt auch: *Sobald man Dinge zählt, werden diese dabei als gleich angesehen.*

Es lassen sich in der That stets Beziehungen angeben, in welchen etwa die Gegenstände, die gezählt werden sollen, eine Aehnlichkeit haben und zugleich sich von allen nicht mitzuzählenden Dingen unter-

scheiden; gewöhnlich sind dieselben geradezu durch eine ihnen gemeinsame Eigenschaft charakterisirt. Wenn z. B. sehr verschiedenartige Gegenstände als „Stücke“ gezählt werden, so ist es wenigstens die Eigenschaft, Individuen zu sein von unzweifelhafter Begrenzung, welche sich innerhalb eines bestimmten Raum- und Zeitgebietes vorfinden. Die Gegenstände können allerdings auch gewissermassen *tabellarisch* als Objecte des Zählens gegeben sein, d. h. sie können lediglich durch unsre Willkür zu solchen gestempelt werden; eben darin aber (genauer noch: in der Veranlassung dazu) wird alsdann die ihnen vindicirte Aehnlichkeit bestehen.

Wegen dieser also den Objecten der Zählung zugeschriebenen Gleichheit macht sich das Bedürfniss geltend, sie auch mit einem übereinstimmenden Namen allgemein zu benennen.

Jedes der zu zählenden Dinge wird eine Einheit genannt.

Von dem Begriff der *Einheit* können wir also uns erheben zu dem Begriff der *Menge*, indem wir die Vorstellungen von mehreren Einheiten in Gedanken verbinden (genauer: die Vorstellung einer Einheit mit derjenigen einer andern und der einer dritten Einheit u. s. w.) — wie wir auch umgekehrt von diesem Begriff zu jenem herabsteigen können, indem wir an einer Mannigfaltigkeit gleichartige Theile (als Einheiten) unterscheiden.

Die Veranlassung dazu, Dinge, welche uns für gleich gelten, als Einheiten zu zählen, liegt des ferneren hauptsächlich noch in den *Zwecken*, denen die Zahl zu dienen vermag. Letztere werden sich jedoch erst dann vollständig übersehen lassen, wenn wir uns über die Zusammensetzung der Zahl selbst hinreichend verständigt haben.

5. Entstehung oder Bildungsweise der natürlichen Zahl.

Um nun ein Zeichen zu erhalten, welches fähig ist auszudrücken, *wie viele* jener Einheiten vorhanden sind, richtet man die Aufmerksamkeit der Reihe nach *ein* mal auf eine jede derselben und bildet sie mit einem Strich: 1 (eine *Eins*, ein *Einer*) ab; diese Einer setzt man in eine Zeile nebeneinander, verbindet sie jedoch unter sich durch das Zeichen + (*plus*), da sonst zum Beispiel 111 nach der gewöhnlichen Zahlenbezeichnung als einhundertundelf gelesen würde. Man erhält auf diese Weise ein Zeichen wie:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

dessen Zusammensetzung man dadurch beschreiben kann, dass man sagt:

Eine natürliche Zahl ist eine Summe von Einern.

Insofern es manchmal erlaubt sein wird, sich unter den Einern die zu zählenden Gegenstände selbst vorzustellen, kann man auch sagen: *Die Zahl ist eine Summe von Einheiten.* Vergleiche hiezu die Paragraphen über die *benannten* Zahlen im zweiten Bande.

Wie wir eben gesehen haben, ist die Zahl gewissermassen eine *Abbildung* *) der zu zählenden Dinge. Während aber die Gegenstände der Körperwelt von dem Bildhauer abgebildet werden hinsichtlich ihrer räumlichen Ausdehnung und Begrenzung (Gestalt), während sie von dem Maler, Photographen, Zeichner abgebildet werden hinsichtlich ihrer Farbenerscheinung, resp. Licht- und Schattenparthieen oder Contouren, bildet der Arithmetiker die Einheiten nur noch hinsichtlich ihrer *Häufigkeit* ab.

Die natürliche Zahl ist eine Abbildung der Einheiten in Hinsicht ihrer Häufigkeit.

Aus dem vorstehenden lässt sich nebenbei schon auf die *Wichtigkeit* der Zahlen ein Schluss ziehen, wenn man bedenkt, dass ja die Wissenschaft überhaupt nur den Zweck hat, zur Kenntniss der Wahrheit zu führen, das heisst unsre Vorstellung von den Dingen zu einem getreuen *Abbild* ihres Wesens zu machen, wodurch wir auch wiederum die Mittel erlangen können, die Wirklichkeit nach unsern Absichten zu gestalten.

Nicht zu übersehen ist auch der Contrast, in welchem die letztgenannte Art von Abbildung zu den vorhergehenden steht. Es ist klar, dass unter den genannten der Arithmetiker *am wenigsten* von den Dingen abbildet — so wenig, dass wenn man das eine auch noch wegliesse, gar nichts mehr übrig bleiben würde. Bei dem Abbildungsverfahren des Zählens ist daher die Abstraction die grösste, und muss dieses somit einerseits die grösste Vereinfachung der Vorstellungen nach sich ziehen, andrerseits aber wird deshalb auch die Anwendbarkeit dieses Abbildungsverfahrens eine weitergehende sein: das Gebiet des zählbaren ist viel umfassender als z. B. dasjenige des plastisch darstellbaren.

6. Die Benennung der Zahl.

Es muss nunmehr noch die Frage ventilirt werden, was unter der so genannten *Häufigkeit* (*Vielheit*, *Anzahl*) eines Dinges zu verstehen sei, soweit wenigstens, als dieser Begriff nur fähig ist, erklärt zu werden.

In dieser Beziehung ist zunächst hervorzuheben, dass wenn überhaupt von der Häufigkeit eines Dinges soll gesprochen werden können, der Name dieses Dinges stets ein *Gattungsname*, ein *allgemeines Begriffswort* (notio communis) sein muss.

Sobald man nämlich einen Gegenstand vollständig — mit *allen* seinen Eigenschaften und Beziehungen — in's Auge fasst, so wird derselbe einzig in der Welt dastehen und seines gleichen nicht weiter haben. Der Name des Gegenstandes wird alsdann den Charakter eines *Eigennamens* (nomen proprium) tragen und kann der Gegenstand nicht als ein wiederholt vorkommender gedacht werden. Dieses gilt aber nicht allein von *concreten* Gegenständen, es gilt überhaupt von einem jeden Dinge, mag dessen Vorstellung auch durch *Abstractionen* zu Stande

*) Diese ausserordentlich zutreffende und lichtvolle Qualification der Zahl verdanke ich Herrn Prof. Hesse.

kommen, woferne nur diese Vorstellung solche Elemente in sich schliesst, welche genügen, das betreffende Ding zu einem *völlig bestimmten* zu machen. So wird z. B. das Gewicht oder das Volum eines zu bestimmter Zeit an einem bestimmten Ort befindlichen Körpers nicht Object der Zählung werden können. Das letztere wird bei einem Dinge erst insofern möglich, als man von einigen ihm eigenthümlichen Merkmalen und Beziehungen, durch die (im Einzelnen oder im Gesammtverbande) es sich von allen andern Dingen unterscheidet, dabei absieht oder *abstrahirt*, wodurch denn erst der Name des Dinges zu einem auf mehrere Dinge anwendbaren Begriffe wird.

Jener Gattungsname oder Begriff wird die *Benennung* der auf die angegebene Weise gebildeten Zahl genannt und macht das Wesen ihrer Einheit aus.

Wenn z. B. die in einer Rolle befindlichen Thalerstücke gezählt werden, und man findet, dass deren neun vorhanden sind, so bildet der Begriff des in jener Rolle vorhandenen Thalerstückes die *Benennung* der Zahl neun.

Die Benennung einer Zahl ist also stets das Ergebniss einer Abstraction; sie ist ein „allgemeiner Begriff, der verschiedene Bestimmungsweisen zulässt“ *) und zwar ist dieser Begriff übergeordnet den sämmtlichen zu zählenden Dingen, von welchen er die ihnen ausschliesslich gemeinsamen Merkmale (durch die sie eben als Objecte des Zählens charakterisirt werden) in sich vereinigt und von den übrigen Merkmalen diejenigen als unwesentliche ausschliesst, die zur gegenseitigen Unterscheidung oder Individualisirung derselben dienen.

7. Begriff der Vielheit.

Im übrigen ist die *Häufigkeit* eines Dinges ein relativer Begriff, der isolirt sich nicht definiren lässt. Dagegen ist ein Mittel anzugeben, um über diese Häufigkeit bei verschiedenen Dingen zu entscheiden, oder zweierlei Dinge hinsichtlich ihrer Anzahl zu *vergleichen*.

Will man irgend etwas mit etwas anderem *vergleichen*, so muss man bekanntlich die beiden Vergleichsobjecte in ein gewisses Verhältniss zueinander setzen. Man muss etwa (wie es z. B. beim Vergleichen von Gewichten der Fall ist) die Dinge aufeinander oder beide auf ein drittes in einer bestimmten Weise einwirken lassen und so die Objecte der Vergleichung erst in gewisse Umstände versetzen, unter denen sie schliesslich der Einwirkung auf unsere Sinne ausgesetzt werden, wodurch die Entscheidung dann unmittelbar unsrer Empfindung anheimgegeben ist. Doch kann in einfachen Fällen auch unsre Erinnerung von den Dingen statt ihrer selbst genommen werden, wofern dieselbe nur als eine hinreichend treue angesehen werden darf, und es braucht alsdann nur eine gewisse Gedankenverbindung zwischen den Vorstellungen der Dinge hergestellt zu werden. Die Art und Weise jener wirklichen oder dieser gedachten Verbindung bestimmt die Eigenschaft, hinsichtlich deren die Dinge eben verglichen werden sollen.

Wenn nun zweierlei Dinge hinsichtlich ihrer Häufigkeit — oder, besser gesagt, zwei *Mengen* von Dingen hinsichtlich der Anzahl der in ihnen enthaltenen

*) Ausdrucksweise Riemann's (cf. „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“, Göttingen 1867, p. 3).

Einheiten — verglichen werden sollen, so ist die zwischen ihnen herzustellende Verbindung wohl die allgemeinste, die sich denken lässt. Es scheint dies in der That dann der Fall zu sein, wenn über die Art und Weise derselben nichts weiter festgesetzt wird, als dass sie eine *eindeutige* sei, dass nämlich unzweideutig zwischen einer jeden Einheit der einen Menge und immer nur *einer* Einheit der andern Menge, überhaupt eine Verbindung — welcher Art sie auch sein möge — festgelegt, z. B. die eine Einheit durch eine blosse Gedankenverbindung der andern zugeordnet werde.

Verschiedenartige Gegenstände, z. B. Aepfel und Nüsse, sind in *gleicher Anzahl* vorhanden, wenn man durch fortgesetztes Verknüpfen, etwa Nebeneinanderlegen, von jedesmal einem Apfel und einer Nuss zuletzt weder Aepfel noch Nüsse übrig behält. In der That ist dies die einzige Möglichkeit, es unmittelbar ad oculos zu demonstriren, dass jene Mengen gleich sind, so z. B. auch zu beweisen, dass an der rechten Hand sich ebenso viele Finger befinden, als an der linken, oder ähnliches mehr.

Allgemein gesprochen *):

Wenn es möglich ist, von Dingen einer Art ein jedes einzeln so zu verknüpfen mit einem Dinge von andrer Art, dass weder von der einen noch von der andern Art Dinge übrig bleiben, so sagen wir: die Dinge der einen Art sind in derselben Anzahl vorhanden, als die der andern Art.

Wenn aber, sobald das obige Verfahren des Nebeneinanderlegens oder jener Verknüpfungsprocess nicht weiter fortgesetzt werden kann, indem sich von der einen Art keine Dinge mehr vorfinden, noch Dinge der andern Art unverknüpft geblieben sind, so heissen die letzteren *zahlreicher* als die ersteren und ihre Anzahl wird dann beiderseits eine verschiedene sein müssen (cf. Nummer 14.).

Denkbar ist auch noch der Fall, dass jener Process der paarweisen Verknüpfung oder ideellen Association von beiderlei Einheiten ohne Ende fortgesetzt werden kann. Alsdann heisst die Anzahl von beiderlei Gegenständen eine *unbegrenzte* und muss die Frage nach der Gleichheit der beiden Anzahlen vorerst unentschieden gelassen werden.

Noch einmal in etwas andrer Ausdrucksweise lautet die obige Definition:

Von zwei Mengen soll gesagt werden, dass sie gleich viele Einheiten enthalten, wenn die Einheiten der einen Menge sich denen der andern Menge, ohne dass ein Rest bleibt, einzeln zugesellen lassen.

---

*) Der vorliegende Band war schon grösstentheils geschrieben, als mir die in diesem Jahre erschienene Programmabhandlung von Ernst Kossak: „Die Elemente der Arithmetik", Berlin, zu Gesicht kam, aus deren kurzen Andeutungen, p. 16, ich ersehe, dass Herr Weierstrass in seinen Collegien die Zahlengleichheit ähnlich zu definiren pflegt.

Dass es überhaupt Dinge gebe, die in gleicher Anzahl vorhanden sind, wie z. B. die Einer der beiden Zahlen $1+1$ und $1+1$, sowie auch, dass es andere Dinge gebe, bei welchen dies nicht der Fall ist, muss allerdings als ein Axiom zugegeben werden. Es ist eine Thatsache, dass wir die Einer der Zahl $1+1$ mit denen der Zahl $1+1+1$ nicht ohne Rest paarweise in eine feste Gedankenverbindung zu bringen vermögen, und suchen wir den Grund davon nicht in uns selbst, sondern nehmen an, dass er in den Dingen liege, deren Anzahl in Vergleichung gezogen wird.

8. Die Zahl als Massstab der Häufigkeit.

In der Regel nun wird es, wenn zweierlei Objecte hinsichtlich ihrer Häufigkeit verglichen werden sollen, nicht ohne Schwierigkeit sein, die Gegenstände der einen Art mit solchen der andern Art — sei es in Gedanken, oder in Wirklichkeit — stets so in feste Verbindung zu bringen, dass nicht irrthümlich ein schon verknüpfter Gegenstand noch einmal verwendet, oder ein noch unverknüpfter übersehen wird. Erscheint es doch oft schon schwierig genug, auch nur die Einheiten der einen Art allein zu fixiren!

Man kann sich aber die Aufgabe wesentlich erleichtern: eben dadurch nämlich, dass man als Verknüpfungsmittel zwischen beiderlei Objecten den *Einer*, die Zahl selbst, benützt.

Verschiedenartige Gegenstände, wie die obigen Aepfel und Nüsse, werden alsdann in *gleicher* Anzahl vorhanden sein, wenn man durch das vorher beschriebene Zähl- oder Abbildungsverfahren bei allen beiden die nämliche Summe $1+1+1+\cdots$ von Einern erhält. Die Rechtfertigung dieser Behauptung muss wohl in der Psychologie gesucht werden, aus der wir hier (als ein Axiom) nur den Satz entlehnen wollen, dass wenn zwei Dinge oder Ideen von Dingen mit einem dritten stetig verknüpft sind, sie uns eben dadurch auch miteinander stetig verknüpft erscheinen. Wenn übrigens jene Einheiten sämmtlich concrete Gegenstände sind, so kann man in der That sich alsdann die Einerstriche förmlich verlängert und mit ihrem einen Ende an jene ersteren, mit dem andern an diese letzteren geknüpft denken — und zwar dieses nicht etwa nur in dem Falle, wo die Einheiten beider Gattungen gleichzeitig vorhanden sind, sondern auch in dem Falle, wo sie zu verschiedenen Zeiten existiren. In Bezug auf den Zeitpunkt nämlich, wo der genannte Verlängerungsprocess nach einer Seite hin vorgenommen oder überhaupt der ganze Einerstrich erzeugt werden soll, ist vollkommen freie Wahl gelassen; und eben daraus, dass die Zahl sich aus räumlich getrennten Bestandtheilen zusammensetzt,

welche, zu beliebigen Zeitmomenten erzeugt, die Zeit durchdauern, erwächst derselben unter anderm auch die Kraft, gewissermassen die Zeit im Raume — oder auch umgekehrt — abzubilden.

Bedient man sich nun aber dieser letzteren Methode zur Vergleichung zweier Vielheiten (der Vermittlung durch die *Zahl* nämlich), so erlangt man den grossen Vortheil, dass man es immer nur mit einer einzigen Art von gegebenen Objecten auf einmal zu thun hat — denn die Einer selbst fallen hier offenbar nicht ins Gewicht, da man ihrer bequemen Erzeugung halber sie stets zur Hand hat, sie als disponibel betrachten kann.

Dieser Vortheil, den die Anwendung der Zahl als Vermittlerin bei der Vergleichung der Häufigkeit von Dingen gewährt, ist nebenbei gesagt ein ganz ähnlicher, wie der Nutzen des Geldes bei der Vermittelung des Güteraustausches.

Wichtiger für uns ist jedoch eine andere Seite im Wesen der Zahlen, welche sich hierbei offenbart. Man sieht nämlich — woferne das Bild geläufig ist — dass die Zahl genau die Rolle eines *Massstabes* spielt, mit welchem etwa zwei Strecken hinsichtlich ihrer Länge verglichen werden. Statt nämlich zu diesem Zwecke die beiden Strecken direct aufeinander zu legen und zu constatiren, ob sie sich decken, kann man bekanntlich einen Massstab erst an die eine, dann an die andere Strecke anlegen. Nach dem gesagten aber erscheint nun unsre Zahl in ganz ähnlichem Lichte:

Die natürliche Zahl dient als ein Massstab für die Häufigkeit der Dinge.

9. Die Zahl als eine Vorschrift.

Bei den bisherigen Betrachtungen bin ich vorerst mit Absicht noch etwas einseitig zu werke gegangen. Wir stellten uns nämlich vor, dass die Einheiten in Wirklichkeit schon vorhanden seien, und uns nur die Aufgabe vorliege, ihre Anzahl zu ermitteln, ohne dass uns ein Einfluss auf diese Anzahl zustünde.

So gut jedoch eine Zeichnung oder eine plastische Figur — um noch einmal auf unsern früheren Vergleich zurückzukommen — durch Abbildung von etwas schon vorhandenem entstehen konnte, ist es auch möglich, dass sie von vornherein in der schöpferischen Phantasie des Künstlers ihren Ursprung hatte. Sie kann sogar als Vorlage oder Plan gebraucht werden, resp. für ein erst noch auszuführendes Kunstwerk zum Modell bestimmt sein.

Ebenso nun braucht auch die Zahl durchaus nicht gerade der Wirklichkeit erst *nach*gebildet zu sein; sie kann vielmehr auch als eine *Vorschrift* dienen, nach welcher diese noch gestaltet werden sollte.

Bei jener ersten Entstehungsweise werden die Einheiten durch die Einer abgebildet und die Zahl aus der Wirklichkeit entnommen, was als ein *Abstrahiren* der Zahl bezeichnet werden kann.

Bei diesem zweiten Gebrauche der Zahl aber handelt es sich darum, die Einer durch Einheiten abzubilden, d. h. die Zahl zu *realisiren*.

Die Beziehung zwischen *Bild* und *Object* ist, wie man sieht, eine umkehrbare und beruht eben auf einer gewissen *Aehnlichkeit* beider.

Die zweite der beiden einander entgegengestellten Operationen ist namentlich diejenige, durch welche wir unser durch die erste gewonnenes Wissen für unsre Zwecke zu verwerthen und den gestaltenden Einfluss auf die Wirklichkeit zu üben vermögen, wie denn auch durch das entsprechende die darstellende oder die bildende Kunst, welche sonst nur technische Fertigkeiten wären, erst ihren wahren Charakter als eine freie und schaffende („poetische") Kunst erhalten, sei es nun, dass sie erfinderisch für Zwecke der Industrie oder dass sie für ästhetische Zwecke ausgeübt werden.

10. Zweck der Zahl überhaupt.

Wollen wir also eine Zahl nun für alle Fälle ihrem Zwecke nach erschöpfend kennzeichnen, so werden wir etwa zu sagen haben:

Eine natürliche Zahl soll ein Zeichen sein, welches ausdrückt, wie oft ein Ding als wiederholt vorhanden gedacht wird — mag es nun in Wirklichkeit schon vorhanden oder erst noch zu bilden sein, oder gar nur in der Vorstellung existiren.

Strenge genommen werden bei dem Gebrauche der Zahl jene zwei Hauptgeschäfte des Abstrahirens und des Realisirens jedesmal alle beide in Ausführung kommen, denn dieselbe ist, wie jedes *Zeichen*, von Hause aus zur Mittheilung bestimmt — worunter allerdings die Mittheilung eines Individuums an sich selbst, die als ein Hilfsmittel des Gedächtnisses oft vorkommen mag, mit einzubegreifen ist. Es muss daher nothwendig von dem ersten Urheber der Mittheilung die Zahl durch jenen ersten Process erzeugt worden sein als das Abbild einer Mehrheit von in seiner Vorstellung vorhandenen Einheiten, während derjenige, der die Mittheilung mit Verständniss empfängt, dann umgekehrt nach dem Vorbild der Zahl sich die gleiche Vorstellung jener Menge von Einheiten ausbilden und damit also auch jene zweite Operation vollführen muss.

Bis zu dem Grade, in welchem hierbei, wie eben geschildert, die zwei gedachten Operationen zur Ausübung kommen — d. h. so lange der Ursprung und die Zwecke der Zahl lediglich auf den Kreis unsrer Vorstellungen beschränkt bleiben — sind dieselben im allgemeinen mit keinerlei Schwierigkeiten behaftet. Wo es aber darauf ankommt, von unseren Vorstellungen zur Wirklichkeit oder umgekehrt überzu-

gehen, so stellen sich dergleichen Schwierigkeiten oft in sehr bedeutendem Masse bei allen beiden Geschäften ein, bei demjenigen des Abstrahirens nicht minder wie bei dem Realisiren der Zahl.

In Bezug auf das erstere, das eigentliche *Zählen*, mag z. B. an die Aufgaben erinnert werden, Sterne am Himmel zu zählen; ebenso auch, Köpfe einer Versammlung, oder — wie es oft in der Mikroscopie vorkommt — überhaupt Geschöpfe, die sich durcheinander bewegen. Ferner gehört dahin die Aufgabe, gleichzeitige Schallwirkungen, wie Schüsse von Gewehrsalven und dergleichen mehr, zu zählen. Als Repräsentanten der andern Aufgabe kann man — worauf schon der Sprachgebrauch hinweist — das *Zahlen* (z. B. von einer namhaften Schuldsumme) gelten lassen.

Zu untersuchen, wie diese Schwierigkeiten in jedem besonderen Falle zu lösen seien, ist übrigens nicht Aufgabe der Mathematik, sondern je derjenigen Wissenschaft, welcher die Betrachtung der vorliegenden besondern Art von Einheiten obliegt. —

Nachdem wir nun den Einer eingeführt haben als das allgemeine *Bindemittel* zwischen Dingen irgend welcher Art, seien es Gegenstände oder Ereignisse, Realitäten oder Vorstellungen, erschien uns die Zahl zunächst als ein Mittel zur *Einzelverknüpfung* einer Menge von unter sich gleichartigen Objecten mit einer andern Objectenreihe von ebensolcher Beschaffenheit.

Diese Einzelverknüpfung — die etwa einer Gegenüberstellung zweier Heere vergleichbar ist, bei welcher Mann gegen Mann kämpfen müsste — ist nun allerdings, wenn auch der ursprüngliche, so doch nur ein ganz besonderer Fall von der Verknüpfung zwischen Dingen überhaupt. *Verknüpfung überhaupt* ist ein ausserordentlich weiter Begriff; er umfasst insbesondre auch diejenigen Beziehungen zwischen Dingen, die man als eine *Abhängigkeit* derselben voneinander zu bezeichnen pflegt. Wenn zum Exempel eine Grösse, wie der Fallraum, von einer andern, wie die Fallzeit, oder wenn der Preis einer Waare von der Quantität derselben abhängt, so werden schon durch den Gedanken dieser Abhängigkeit je die beiden Grössen miteinander verknüpft. Später, im weiteren Verlaufe der Zahlenlehre, und zwar bei ihrer Ausbildung zur Grössenlehre, werden wir uns nun in der That auf einen höheren Standpunkt erheben. Indem wir die Einheiten auch (zu Grössen) *vereint* wirken lassen, werden wir die Zahl auch zu einem Hülfsmittel gestalten, die Abhängigkeit zwischen Grössen oder Dingen, nicht nur so wie sie ist, darzustellen, sondern auch so wie sie gewünscht wird, herstellen zu helfen.

Doch wird es immerhin schon jetzt unschwer sein, zu überschauen, was in letzter Instanz durch alle jene Operationen erreicht werden soll.

Es wird vielmehr die Wichtigkeit derselben für das Denken oder die *Ideenverknüpfung* im allgemeinen ohne weiteres einleuchten. Sodann auch lässt es bereits sich wenigstens ahnen, welch' bedeutende Rolle den Zahlen einerseits für die Darstellung der Abhängigkeit, in der nach den Naturgesetzen die Dinge zu einander stehen, und andrerseits für die Zwecke des praktischen Lebens zufallen muss.

Das letztere namentlich tritt schon unverkennbar hervor, wenn man in's Auge fasst, dass durch den Gebrauch der Zahlen unter anderem auch zu dem Endziel aller menschlichen Handlungen: der Verknüpfung oder dem *Zusammentreffen* der Bedürfnisse mit ihrer Befriedigung, der Weg geebnet wird.

Wollte etwa — um diese Behauptung noch durch ein ganz triviales Beispiel zu erläutern — Jemand, der eine Reise unternimmt, Vorsorge tragen, sich für diese mit hinreichend vielem Gelde zu versehen, so müsste er ohne die Beihilfe der Zahl die beschwerliche Ueberlegung machen, dass er am Montag, am Dienstag, am Mittwoch etc. je einen Thaler (z. B.) brauchen würde; er müsste also beim Zurechtlegen dieses Zehrgeldes jeden einzelnen Reisetag in Gedanken durchgehen. Statt dessen nun wird er doch gewiss besser die Rechnung aufstellen: soviel Tage, soviel Thaler — und damit fertig!

Noch einmal in etwas allgemeinerer Ausdrucksweise: da, je klüger der Mensch ist, er um so besser seine Bedürfnisse vorherzusehen weiss, so wird er (in fernerer Bethätigung dieser intellectuellen Eigenschaft), auch *ebenso oft* als eines derselben zu erwarten steht, sich mit den Mitteln zu dessen Befriedigung auszurüsten streben, und darauf, dass dieses Geschäft erheblich durch die Beiziehung der Zahl erleichtert wird, beruht der (unmittelbare) Werth der Zahl für die wirthschaftliche Seite des Lebens.

11. Cardinal- und Ordinalzahlen.

Schliesslich darf eine Unterscheidung, die in Bezug auf Ziel und Art der Verwendung einer Zahl noch gemacht werden kann, wenigstens nicht ganz unerwähnt bleiben.

Wir haben im bisherigen vorzugsweise das Ziel im Auge gehabt, *alle* Einheiten einer Menge mit denen andrer Mengen in (Einzel-) Verbindung zu bringen, wir haben m. a. W. die Zahl als Ausdruck für die Vorstellung von einer Vielheit, d. i. als eine *Cardinalzahl* betrachtet. So tritt zum Beispiel, wenn von fünf Einheiten die Rede ist, die Zahl fünf als eine Cardinalzahl auf.

Im Gegensatz hierzu ist nun dieselbe Zahl, wenn von der fünften Einheit gesprochen wird, als eine *Ordinalzahl* zu bezeichnen. Ueberhaupt liegt häufig nur die Absicht vor, *eine* bestimmte Einheit allein aus jener Menge hervorzuheben, um sie mit irgend etwas anderem in Verbindung zu bringen — und wieder lässt sich dieses am bequemsten durch die Zahl vermitteln. Der genannte Zweck nämlich wird einfach dadurch erreicht, dass man die Einheiten der vorliegenden Menge in einer bestimmten Ordnung zählt, eine jede Einheit aber zu dem Namen derjenigen Zahl in Beziehung setzt, welche auf sie trifft, d. h. bis zu welcher man während des Zählprocesses beim Anblick und nach Berücksichtigung dieser Einheit selbst gelangt ist. Steht nur die Reihenfolge, in der die Einheiten durchzugehen sind, einmal unzweideutig fest, so kann auch zufolge jenes Zusammenhanges kein Zweifel mehr

darüber herrschen, welche Einheit als die so und so vielte gemeint sei, und gibt die Ordnungszahl jederzeit bestimmt die Stelle an, welche diese Einheit in der Reihe einnimmt.

In dem gewöhnlichsten Falle, wo die Einheiten sich in zeitlicher Aufeinanderfolge darbieten, ist schon von selbst nahe gelegt, in welcher Ordnung sie gezählt zu denken sind. Ebenso, wenn die Einheiten geschriebene Zeichen sind, ist stillschweigend — woferne nicht ausdrücklich das Gegentheil ausbedungen wird — immer diejenige Ordnung als die massgebende angenommen, in welcher diese Zeichen von links nach rechts der Zeile entlang gelesen werden. In allen andern Fällen muss vor der Verwendung von Ordinalzahlen die vorauszusetzende Aufeinanderfolge der Einheiten ausdrücklich angegeben werden.

12. Unabhängigkeit der Zahl von der Anordnung des Zählprocesses.

Es wurde oben ein Mittel angegeben, Dinge verschiedener Art hinsichtlich ihrer Anzahl zu vergleichen.

Die zur Entscheidung über die Gleichheit oder Ungleichheit der beiderseitigen Anzahlen einzuschlagende Methode enthält aber ein willkürliches Element, insoferne dabei über die Anordnung oder Reihenfolge der paarweisen Zusammenfassung jener beiden Arten von Einheiten nichts festgesetzt ist. Deshalb ist, um alles völlig strenge zu machen, noch eine Untersuchung darüber nöthig, ob, wenn sich zwei Anzahlen bei irgend einem Verknüpfungsmodus der Einheiten beider Gattungen als ungleich (oder gleich) herausstellen, dies auch bei irgend einem andern Verknüpfungsmodus der Fall ist.

Wenn dem nicht so wäre, so würden wir bei irgend welchen zum Zählen vorliegenden Dingen gar nicht berechtigt sein, schlechtweg von einer „Anzahl“ derselben als von etwas bestimmtem zu reden, indem ja diese Anzahl nicht von den Dingen allein, sondern auch von ihrem Zählungsmodus abhängig wäre. Die nämlichen Dinge würden alsdann in *einer* oder auch in einer *andern* Anzahl vorhanden sein, je nach der Art, wie sie angesehen werden, und es läge die Gefahr nahe, in gewisse Trugschlüsse zu verfallen, dergleichen man in der That auch anderwärts nicht selten begegnet.

Es dürfte wohl als eine Aufgabe der Psychologie hingestellt werden, völlig zu erklären, weshalb wir durch unsern Verstand gezwungen sind, die oben aufgeworfene Frage zu bejahen. Indessen glaube ich, dass die folgenden Betrachtungen vorerst zur weiteren Aufhellung der Sache dienen können.

Ich erinnere zunächst daran, dass nach unsrer Definition in Nr. 7. die beiden Anzahlen stets als gleich anerkannt werden müssen, *sobald es nur irgend einen Modus der Einzelverknüpfung gibt*, bei dem kein Rest bleibt.

A priori ist es nun durchaus nicht nothwendig, dass wenn wir Dinge zum zweiten mal, z. B. in einer andern Reihenfolge als das erste mal zählen, sich die gleiche Anzahl derselben herausstellt. In der Zwischenzeit kann ja eine Veränderung mit den Dingen vorgegangen sein; dieselben konnten sich vermehrt oder vermindert haben und man muss, falls das zweite mal deren mehr oder weniger gefunden werden, eben einfach annehmen, dass einige derselben verschwunden oder andere neu entstanden seien.

Freilich wird es dann nicht möglich sein, die früher gezählten Einheiten alle mit den später gezählten *durch die Idee einer stetigen Fortexistenz zu verknüpfen*, und werden wir darum vorziehen, alsdann zu sagen, dass nicht genau dieselben Dinge es seien, die in beiden Fällen gezählt wurden. Wären sie nämlich durch jene Idee mit diesen verknüpft, so würden sie uns eben dadurch schon (unabänderlich) in der gleichen Anzahl erscheinen.

Nur insofern also, als wir das letztere thun *wollen*, muss die früher und die später untersuchte Anzahl der Dinge allerdings stets als die gleiche gelten. Eben dadurch haben wir alsdann eine *Voraussetzung* eingeführt, zufolge welcher die ideelle Association der Einer mit den Einheiten nunmehr schon in einer bestimmten Weise (ohne Rest) ausgeführt ist, und zwar bei beiden Zählprocessen im Grunde auf die gleiche Weise. Sobald nämlich eine der beim ersten mal gezählten Einheiten durch die Vorstellung einer ununterbrochenen Fortdauer verknüpft sein soll mit einer der beim zweiten mal gezählten, so wird jedesmal durch weitere Verknüpfung der einen von ihnen zugleich eine Verknüpfung der andern vollzogen.

Zur Verdeutlichung des eben gesagten mögen drei Objecte einmal in der Ordnung A, B, C, dann in der C, A, B gezählt werden.

Fig. 1.

Die nebenstehende Figur, in welcher die punktirten Linien den Uebergang durch zeitliche Fortdauer versinnlichen, die Pfeile aber den Zusammenhang zwischen Bild und Object oder des Zeichens mit dem Bezeichneten ausdrücken sollen, macht es anschaulich, wie so wir beidemal die nämliche Zahl $1 + 1 + 1$ finden müssen. (Vergleiche noch Nr. 16.).

Ganz ähnlich verhält es sich, wenn die Dinge nicht von *einer* Person zu verschiedenen Zeiten, sondern von verschiedenen Personen z. B. gleichzeitig, aber eventuell mit verschiedener Anordnung des Processes gezählt werden. Auch in diesem Falle muss von beiden die gleiche Zahl gefunden werden, denn indem wir annehmen, dass

es dasselbe Ding sei, welches von beiden gezählt wird, bewirken wir, dass schon von vornherein und unaufhebbar eine solche Verknüpfung zwischen den Einern der beiden Zählresultate besteht, welche (auf Grund der Definition) uns verpflichtet, diese Zahlen fortwährend als gleich anzuerkennen.

Also kurz gesagt:

Die Annahme, dass es genau *dieselben* Dinge seien, welche unter verschiedenen Anordnungen des Zählprocesses gezählt werden, schliesst, nach dem Sprachgebrauch einerseits und andrerseits nach den gegebenen Definitionen es in sich, dass die aus einer jeden hervorgehenden Zahlen einander gleich zu nennen sind. Und was wir soeben beispielsweise von der Verknüpfung der Einheiten mit den *Einern* auseinandergesetzt haben, gilt ebenso für die Verknüpfung jener Einheiten mit irgend welchen *Einheiten* von andrer Gattung, ist jedoch schon ausreichend für unsre Zwecke.

Unter der angegebenen Auffassung können wir es demnach als ein Princip hinstellen:

Die natürliche Zahl ist unabhängig von der Reihenfolge, in welcher die Einheiten durch die Einerstriche abgebildet werden; sie bleibt ungeändert, wenn man irgend welche von den Einheiten, sowie auch von den Einern unter sich vertauscht.

Zufolge der vorangeschickten Bemerkung, des Umstandes nämlich, dass zwei Zahlen für gleich zu gelten haben, wenn ihre Einer von gleicher Häufigkeit sind, d. h. also — sobald nur überhaupt eine eindeutige Verknüpfung zwischen ihren beiderseitigen Einern bekannt ist, bei der kein Rest bliebe — muss dieser Satz geradezu als eine Identität erscheinen, und ist durch denselben die vorangeschickte Frage noch keineswegs beantwortet.

18. Einziges Axiom.

Nur das allerdings soll nicht übersehen bleiben, dass nach dem gesagten wir durch den angeführten Satz immerhin eine gewisse Voraussetzung in Bezug auf das Fortbestehen der Einheiten sowohl als der Einer eingeführt haben.

Soweit die letzteren, die Einer, davon betroffen werden, ist übrigens diese Voraussetzung in einer noch allgemeineren enthalten, die überhaupt ein Axiom jeder deductiven Wissenschaft bildet, und auf welche ich deshalb kurz hinweisen will.

Das gedachte Princip könnte wohl das *Axiom von der Inhärenz der Zeichen* genannt werden. Es gibt uns die Gewissheit, dass bei

allen unsern Entwickelungen und Schlussfolgerungen die Zeichen in unsrer Erinnerung — noch fester aber am Papiere — haften. Die Anzahl der Einer, die wir schreiben, ändert sich zum Beispiel nicht, während wir sie umstellen und versetzen; dieselben können weder wie Pilze aus dem Papier hervorwachsen, noch von selbst verschwinden. Es bleiben überhaupt die Buchstaben sich gleich, während wir mit ihnen operiren; ein a geht nie in ein b über; auch — bei der nöthigen Sorgfalt von unsrer Seite — kann kein Betrug mit unterlaufen, durch welchen uns ein x für ein u gemacht würde! Ohne diesen Grundsatz, den wir aus einer sehr reichhaltigen Erfahrung durch inductorische Ausdehnung oder Verallgemeinerung gewinnen, würde in der That jede Deduction illusorisch sein, denn die Deduction beginnt eben dann, wenn — nachdem die Grundeigenschaften der Dinge hinlänglich in Zeichen eingekleidet sind — das Studium dieser Dinge Platz macht dem ihrer Zeichen.

Dieser Grundsatz enthält wie gesagt eine willkürlich angenommene Voraussetzung; er bildet eine Annahme, die je nach dem Gedächtniss des Rechnenden und nach der Beschaffenheit des von ihm benutzten Materials nur einen grösseren oder geringeren Grad von *Wahrscheinlichkeit* besitzt, und es wäre z. B. die Annahme unzulässig, oder doch jene Wahrscheinlichkeit eine sehr geringe, wenn man mit ätherisch flüchtiger oder mit sympathetischer Dinte schriebe. Als Thatsache muss allerdings anerkannt werden, dass es überaus zahlreiche Fälle gibt, wo die in Rede stehende Voraussetzung zutrifft. Die Zuversicht auf das Erfülltsein dieser unentbehrlichen Voraussetzung pflegt auch schon dadurch bedeutend erhöht zu werden, dass bei den deductiven Operationen die Erinnerung und die an selbstgeschaffenen Zeichen in aller Musse ausführbare Beobachtung sich gegenseitig fortwährend zu controliren vermögen; und in der That ist diese Zuversicht im allgemeinen eine so grosse, dass wir die Ueberzeugung von der *absoluten Gewissheit* der mathematischen Wahrheiten auf sie gründen. —

Für die Weiterentwickelung der Zahlenlehre ist eine solche Voraussetzung *unerlässlich.* Denn erst durch die angegebene Eigenschaft erlangen die Zahlen ihre Tauglichkeit zur Bemessung der Vielheiten.

Es verhält sich dieses wiederum ganz ähnlich wie bei einem Massstabe, der ja auch in erster Linie die Forderung der *Constanz* erfüllen, d. h. bei den Messungen sich fortwährend gleich bleiben muss. Ebenfalls gibt es gewisse Massstäbe, welche die Eigenschaft constant zu bleiben, vorzugsweise besitzen, und hiervon kann uns für eine bestimmte Klasse von Massstäben nur ein Inductionsschluss die Ueberzeugung geben. Dieser Schluss basirt auf Erfahrungen, die sich in letzter Instanz auf unsre unmittelbare Empfindung stützen, zu deren Zustandekommen aber der Glaube an die Treue oder das Sichgleichbleiben unsrer Erinnerungen eine Vorbedingung bildet. Nämlich wenn auch die Gleichheit, von zwei Strecken z. B., genau nur mittelst eines Massstabes oder dadurch nachgewiesen werden kann, dass man die eine mit der andern zur Deckung bringt (oder gar durch noch mehr verfeinerte indirecte Methoden), so kann uns doch nichts anderes als eine auf unmittelbare Empfindung gegründete Induction die Ueberzeugung geben, dass während des hiezu erforderlichen Transportes (des Massstabes oder der Strecke) die beiderseitigen Längen unverändert bleiben.

Es würde überhaupt kein Ding zum Gegenstand eines Studiums gemacht werden können ohne die Annahme, dass (entweder) das Ding selbst mitsammt den Eindrücken oder Empfindungen, die sich beim erneuten Betrachten desselben in uns wiedererzeugen (oder dass wenigstens die in unsrer Erinnerung haftende Vorstellung des Dinges) sich mindestens so lange gleichbleibe, bis die Untersuchung zu einem Ergebniss darüber geführt hat. —

14. Fundamentaler Satz.

Mit dem vorstehenden haben wir den eigentlichen Kernpunkt der zu Anfang von Nr. 12. angeregten Frage noch gar nicht berührt, geschweige denn erledigt.

Jene Frage dreht sich nämlich im Grunde darum, ob die beiden in Nr. 7. aufgestellten Definitionen oder Kennzeichen der Gleichheit und der Ungleichheit von Anzahlen einander nothwendig ausschliessen, ob sie einen contradictorischen Gegensatz begründen müssen.

Dafür, dass dieses in der That der Fall ist, gebe ich nachstehend in etwas ausführlicherer Darstellung einen mir in dankenswerther Weise von Herrn Professor Lüroth mit der Ermächtigung zur Veröffentlichung mitgetheilten Beweis an.

Da die Art der Verknüpfung, welche je zwischen einer Einheit und einer anderen hergestellt werden soll, völlig dahinsteht, da sie m. a. W. *gleichgültig* ist, so werden alle möglichen Verknüpfungsarten, die sich zwischen beiden denken lassen, als gleich oder einerlei zu gelten haben, und mögen wir es überhaupt als einen *Grundsatz* hinstellen:

Grundsatz. Zwei Einheiten lassen sich stets und nur auf eine Art mit einander verknüpfen. Namentlich aber — das nehmen wir zugleich damit noch an — wird es auch nicht möglich sein, sie einmal *mit* und einmal *ohne* Rest zu verknüpfen.

In dem Begriff der *eindeutigen* Zuordnung oder Verknüpfung wird es ferner liegen, dass eine Einheit nicht mehreren andern auf einmal eindeutig zugeordnet werden könne. Daher wird denn aus unserm Grundsatze auch die Umkehrung folgen: Wenn eine Einheit anderen eindeutig zugeordnet ist, so müssen letztere auch in der Einzahl vorhanden sein. Wie aus dem Begriff der Verknüpfung hervorgeht, ist dieselbe jederzeit eine gegenseitige; sobald a mit b, so ist zugleich auch b mit a verknüpft.

Um jetzt zur Vergleichung einer Menge von Einheiten mit einer andern Menge überzugehen, werden wir jene Operation auszuführen haben, die bisher verschiedentlich bald eine „Einzelverknüpfung" oder „Gegenüberstellung", bald eine „paarweise Zusammenfassung" oder „ideelle Association" (bezeichnend wäre



auch „Verkoppelung") genannt wurde, für die aber wohl der Name einer „eindeutigen Verknüpfung" oder „Zuordnung" am zutreffendsten sein möchte.

Definition. Wir nennen die Einheiten zweier Mengen eindeutig mit einander verknüpft, wenn jede Einheit der einen Menge eindeutig zugeordnet ist einer Einheit der andern.

Es folgt hieraus mit Rücksicht auf das vorhergehende, dass dabei auch keine der letzteren mehr als einmal verknüpft sein darf. Ferner müssen darnach, wenn die Einheiten zweier Mengen eindeutig mit einander verknüpft sind, nothwendig die Einheiten der einen Menge sämmtlich in Verknüpfung getreten sein und es kann nur mehr einer von den beiden Fällen vorliegen, wo *entweder* die andere Menge noch Einheiten enthält, die unverknüpft geblieben sind und den sogenannten *Rest* ausmachen, *oder* wo kein Rest da ist und dann also auch jede Einheit der zweiten Menge sich verknüpft findet mit einer Einheit der ersten.

Dies vorausgesetzt, gelten nun die beiden, wie man leicht sieht, einander gegenseitig bedingenden Sätze:

Theorem. Wenn sich die Einheiten einer Menge A von Objecten so eindeutig verknüpfen lassen mit den Einheiten einer andern Menge B, dass kein Rest übrig bleibt (wenn also beiderlei Einheiten „in gleicher Anzahl" vorhanden sind), so ist keine eindeutige Verknüpfung zwischen ihnen möglich, bei der ein Rest bliebe, es muss also auch jede andere eindeutige Verknüpfung ohne Rest aufgehen.

Wenn zwischen den Einheiten einer Menge A und denen einer andern Menge B eine solche eindeutige Verknüpfung existirt, bei der ein Rest übrig ist, so muss auch jede andere eindeutige Verknüpfung zwischen denselben einen Rest lassen — eine solche Verknüpfung ohne Rest ist nicht zwischen jenen Einheiten möglich, und sind dieselben „in ungleicher Anzahl" vorhanden.

Wir werden jetzt den Beweis dieser Sätze *indirect* führen, indem wir zeigen, dass die gegentheilige Annahme zu einem Widerspruch mit dem vorangegangenen führt.

Beweis. Die gegebene Menge A enthalte die Elemente oder Einheiten $a, a', a'', \ldots$, ebenso B die Einheiten $b, b', b'', \ldots$ Es möge nun zwischen den Elementen beider Mengen eine *erste* Art eindeutiger Verknüpfung existiren, bei welcher kein Rest bleibt. Bei einer *zweiten* Verknüpfungsart aber soll (eventuell zugleich mit anderen Elementen) das Element b von B unverknüpft geblieben sein. Dieses sei bei der ersten Art mit dem Elemente a von A verknüpft gewesen, welches bei der zweiten Art etwa mit dem Element b' von B verknüpft ist. In Zeichen:

I. Art.	II. Art.
Menge — Elemente.	Menge — Elemente.
A . . . a	A . . . a
|	|
B . . . b	B . . . b', b.

[Bei der zweiten Art könnte nicht etwa das Element a unverknüpft geblieben sein, denn die Elemente der einen Menge müssen nothwendig alle sich in Verknüpfung befinden, und da B diese Menge nicht ist, so muss A dieselbe sein.]

Nun lasse man aus der Menge A das Element a und aus B das Element b fort. Es bleiben dann zwei Mengen — wir nennen sie A' und B' — deren Elemente man nach I. ohne Rest verknüpfen kann, während nach II. auch eine Verknüpfungsart möglich sein muss, bei welcher b' unverknüpft bleibt.

Mit diesen Mengen verfahre man ebenso weiter, d. h. man lasse zunächst das Element b' nebst demjenigen a' fort, welches bei I. mit ihm verknüpft, bei II. aber dem b'' zugeordnet ist, und so fort, bis schliesslich von der Menge A nur noch *ein* Element $a^{(n)}$ übrig ist.

Dass dieses überhaupt einmal eintreffen muss, liegt in der Voraussetzung einer *endlich begrenzten* Menge A, die wir stillschweigend gemacht haben, begründet.

Die Menge, in welche B hierbei übergegangen ist, möge $B^{(n)}$ heissen. Alsdann müsste sich das eine Element $a^{(n)}$ von A mit den Elementen von $B^{(n)}$ einmal ohne Rest nach I. und einmal mit einem Rest nach II. verknüpfen lassen, was nicht möglich ist, weil aus der ersten Verknüpfung ohne Rest folgt, dass auch $B^{(n)}$ nur aus *einem* Elemente bestehen kann.

Die obige Annahme ist also in der That unverträglich mit dem angenommenen Grundsatze, und können die beiden Theoreme nur noch richtig sein.

Für kleine Mengen von 2, 3, 4, ... Elementen wäre dieser Beweis ebenso leicht ad oculos wie ad mentem zu führen.

Man könnte vielleicht noch evidenter um einen Schritt weiter gehen und die Operation so lange fortsetzen, bis *alle* Elemente von A fort wären. Dann müsste die dabei sich zuletzt ergebende Menge $B^{(n+1)}$ nach I. aus keinem und nach II. aus mindestens einem Element bestehen, und hätten wir zu Anfang nur einen andern Folgesatz zu unsern vorausgeschickten Grundsätzen zu betonen brauchen, den nämlich, dass *ein* Element mit *keinem* auch nicht eindeutig verknüpft werden kann.

Hiemit möchte denn das Fundamentaltheorem der Zahlenlehre auf die möglichst einfachen und nur auf die *Einheit* bezüglichen Voraussetzungen zurückgeführt sein. In dieser Absicht mussten wir auch fortwährend nur mit einzelnen Einheiten zu operiren suchen und haben deshalb die einander zugeordneten Elemente der



Mengen A und B nicht etwa plötzlich, sondern nur Stück für Stück fortnehmen dürfen. —

Es wäre nun leicht, noch in ganz ähnlicher Weise nachzuweisen, dass wenn bei einer Art von eindeutiger Zuordnung die Elemente einer Menge sich als zahlreicher herausstellen, wie die einer andern Menge, dies auch bei jeder andern Zuordnungsart insofern geschehen muss, als sie dann auch niemals als die weniger zahlreichen erscheinen können. —

Was die Namen und Zeichen betrifft, die bei der Untersuchung der Zahlen gebraucht werden, so empfiehlt es sich, ehe wir in specielle Gebiete eindringen, einiges allgemeine vorauszuschicken. Natürlich muss jedoch bei einer systematischen Anordnung des Stoffes, wie sie hier angestrebt wird, auch manches von vornherein gesagt werden, dessen wahre Bedeutung erst später klar werden kann [so z. B. bei den Nummern 18.—20. und 28.].

IV. Zahlenvergleichung und Unterordnung.

15. Rechnung, Ausdruck.

Wie oben gezeigt, sind die natürlichen Zahlen ursprünglich — ich werde sagen in ihrer *Urform* — lediglich Summen von Einern. Indem wir uns dieselben nach ihrer Grösse, d. i. nach der Häufigkeit ihrer Einer, geordnet denken [worüber ein mehreres später], sind wir nunmehr zu dem Begriff der unbegrenzten *Zahlenreihe* gelangt. *Unbegrenzt* muss diese Zahlenreihe deshalb genannt werden, weil — nach dem Postulat von der Wiederholbarkeit der Zeichen — wie viele Einer wir auch schon gesetzt haben mögen, es immer noch möglich sein wird, denselben einen weiteren hinzuzufügen.

Uebrigens muss noch angeführt werden, dass man auch die Eins selber mit zu den Zahlen rechnet [wodurch beiläufig die in Nr. 6. ausgeschlossenen Dinge noch in das Bereich des zählbaren mit hereingezogen werden], sodass also die ersten Zahlen der Reihe heissen:

$$
\begin{array}{l}
1, \\
1+1, \\
1+1+1, \\
1+1+1+1, \\
\cdots\cdots
\end{array}
$$

Es haben aber diese Summen von Einern nun auch noch andere Namen erhalten; sie können sogar auf eine unbegrenzt mannigfaltige Weise ausgedrückt werden. Namentlich kennt jedermann die zweckmässige Bezeichnung oder Nomenclatur, die den Zahlen zu Theil wird

in dem *zehntheiligen Zahlensystem*, welches die civilisirten Völker von den Indern überkommen und allgemein angenommen haben.

Der gewöhnliche Name der oben als Exempel benutzten Zahl 1 + 1 + 1 + 1 + 1 ist z. B. „fünf" und sie pflegt durch das Zeichen 5 kürzer dargestellt zu werden.

Diese allgemein übliche Darstellungsweise der Zahlen wird ihre *dekadische Form* genannt. Ich werde indessen hier nur das Vorhandensein einer solchen Form voraussetzen müssen, nicht aber die Kenntniss ihrer specielleren Beschaffenheit, welch' letztere vielmehr erst in dem Kapitel über die Arithmetik (cf. Bd. 2.) genetisch begründet werden kann.

Bis dahin mögen die dekadischen Zahlen und auch die vier Grundrechnungsarten (species) mit denselben nur zu den Illustrationen durch Beispiele benutzt werden, und brauchen wir also, strenge genommen, nur zu wissen, dass jede Zahl ausser ihrer Urform noch einen anderen (kürzeren) Namen besitzt. In der Herstellung dieses anderen Namens wird alsdann die Aufgabe bestehen, die Zahl *auszurechnen.*

Das *Rechnen* überhaupt besteht in einem Verknüpfen von Zahlen nach bestimmten Gesetzen, durch welches man von bereits vorhandenen oder *gegebenen* Zahlen zu neu zu bildenden, *gesuchten* fortschreitet. Da jedoch dem Begriffe der *Rechnungsoperation* die Algebra erst nach und nach seinen Inhalt zu geben hat, so ist es wieder nicht von sonderlichem Werth, eine exacte Definition desselben im voraus festzusetzen.

Jeden Namen einer Zahl, welcher zusammengesetzt ist aus andern Zahlzeichen, die sich etwa mittelst Rechenzeichen verbunden finden, nennen wir einen *Ausdruck*; die in dem Ausdruck sich miteinander verknüpft findenden Zahlen heissen die Elemente oder *Operationsglieder* desselben.

16. Relation, Gleichung und Ungleichung.

Zwei Zahlen heissen nun einander gleich, wenn sie die nämliche Summe von Einern vorstellen — ganz einerlei, durch welchen Zählоder Rechenprocess man sie erhalten hat.

Genauer gesprochen — wenn sie, in ihrer Urform angeschrieben, aus *gleichviel* Einerstrichen zusammengesetzt sind — wozu Nr. 7. zu vergleichen ist. Zwei in diesem Sinne einander gleiche Zahlindividuen, wie 1 + 1 + 1 und 1 + 1 + 1, werden jedoch gewöhnlich als *ein und dieselbe* Zahl behandelt; man pflegt sie lediglich als Reproductionen des Namens für eine einzige einmal gedachte Zahl oder deren Wiedererinnerung anzusehen. Hiezu aber ist man im Hinblick auf die Zwecke der Zahl eben deshalb berechtigt, weil nach dem in Nr. 8. angezogenen psychologischen Axiom eine jede Häufigkeit, die durch das eine Zahlindividuum gemessen wird, ausschliesslich und ebenso gut auch durch jedes andere der ihm gleichen Zahlindividuen gemessen oder dargestellt wird.

Obwohl demnach, ganz strenge genommen, die Berechtigung zur Vertauschung gleicher Zahlen erst aus jenem Axiom [das wir nachher sub Nr. 17. (*A*) in Form eines Lehrsatzes über Gleichungen wiederfinden werden] herzuleiten wäre, so glaube ich doch, dass die nachfolgende Darstellung den wissenschaftlichen

Ansprüchen der Leser völlig genügen wird. Bei dieser Darstellung werden wir eben die Zahl nicht als ein *Individuum* auffassen, sondern als den Repräsentanten eines (Zahl-)*Begriffes*, der in unzähligen Individuen verkörpert werden kann.

Hat man zwei gleiche Zahlen, z. B. $2 + 3$ und 5, so drückt man ihre Gleichheit dadurch aus, dass man sie durch das Zeichen $=$ verbindet, mithin schreibt: $2 + 3 = 5$.

Das Zeichen $=$ (sprich: *gleich*) zwischen zwei Ausdrücken wird also nur angewendet, um auszusprechen, dass diese Ausdrücke (verschiedene) Namen für eine und dieselbe Zahl sind.

Sind etwa a und b zwei Namen für die nämliche Zahl, so schreibt man:

$$a = b.$$

Eine derartige Behauptung wird eine *Gleichung* (aequatio) genannt, und der ganze Ausdruck, der links oder rechts von dem „Gleichheitszeichen" steht, heisst die linke oder die rechte *Seite* (membrum) der Gleichung; so ist a die linke Seite der obigen Gleichung; die rechte Seite derselben ist die Zahl b.

Es versteht sich hiernach von selbst, *dass jede Zahl sich selbst gleich ist*, z. B. es ist $5 = 5$; ebenso darf man schreiben:

$$a = a.$$

Eine natürliche Zahl heisst *grösser* als eine andere, wenn sie mehr Einer als die letztere enthält (cf. Nr. 7. und 12.), wenn sie also durch Hinzufügen von Einern aus ihr gebildet werden kann. Die andere Zahl (welche durch Hinwegnehmen von Einern aus der ersteren entsteht) heisst die *kleinere*.

Man schreibt z. B.:

$$5 > 3,$$

sprich: 5 grösser (als) 3, und

$$3 < 5,$$

das heisst: 3 kleiner (als) 5.

Eine Behauptung dieser Art heisst eine *Ungleichung*. Das Zeichen $>$ heisst das *Convergenzzeichen*, das andere $<$ das *Divergenzzeichen*. Um beide Ungleichheitszeichen zu unterscheiden, merke man, dass dieselben sich stets vom grösseren zum kleineren hin zuspitzen, oder vom kleineren zum grösseren hin ausbreiten oder erweitern; die kleinere Zahl steht immer an der Spitze des Winkels.

Wieder spricht man von der rechten und von der linken *Seite* der Ungleichung, um eigentlich dasjenige selbst zu bezeichnen, was auf dieser Seite steht.

Relation ist ein gemeinsamer Name für Gleichungen und Ungleichungen. Zwischen irgend zwei natürlichen Zahlen muss jederzeit eine bestimmte Relation bestehen, d. h.:

Von zwei natürlichen Zahlen a und b ist immer die eine entweder grösser oder gleich oder kleiner, als die andere; es ist entweder:

$$a > b \quad \text{oder} \quad a = b \quad \text{oder} \quad a < b.$$

Nach der oben gegebenen Erklärung für die Gleichheit zweier Zahlen ist dieselbe stets eine gegenseitige. Wenn $a = b$, so ist auch $b = a$; das heisst: man darf die beiden Seiten einer Gleichung miteinander vertauschen, oder die Gleichung ohne weiteres rückwärts lesen. Beiläufig gesagt würde dieses auch aus einem nachher dargelegten Grundsatze hervorgehen.

Will man hingegen eine Ungleichung rückwärts lesen, so muss man das Ungleichheitszeichen sozusagen *umkehren*; „grösser" heisst rückwärts gelesen „kleiner", nämlich wenn $a > b$, so ist $b < a$. Uebrigens verwandelt sich ja der Sinn des Ungleichheitszeichens dadurch, dass man es von der andern Seite betrachtet, schon von selbst in den entgegengesetzten.

Es liegt überhaupt in dem oben formulirten Begriffe der (Zahlen-) Gleichheit, dass man die Namen von gleichen Zahlen stets für einander setzen darf — überall wenigstens, wo von den Zahlen selbst die Rede ist und nicht etwa blos von der Beschaffenheit ihres betreffenden Namens.

Namentlich also in jedem Ausdruck und in jeder Relation *darf gleiches stets für gleiches gesetzt werden*; der Ausdruck wird dadurch seine Bedeutung (seinen Werth) nicht ändern und die Relation wird richtig bleiben.

Man pflegt dieses Princip von alters her durch den Satz auszudrücken:

Gleiches, für gleiches gesetzt, gibt gleiches.

Da zum Beispiel $2 + 4 = 2 \,.\, 3$ ist, indem beide Seiten der Gleichung die Zahl 6 vorstellen, so wird es erlaubt sein, in jedem Ausdruck, worin die eine oder andre derselben vorkommt, diese Zahlen $2 + 4$ und $2 \,.\, 3$ für einander zu setzen. Dasselbe ist überhaupt in jedem Urtheil zulässig, welches diese Zahlen betrifft, jedoch mit der oben angedeuteten Ausnahme. In Urtheilen nämlich, wie: „$2 + 4$ ist eine Summe" und „$2 \,.\, 3$ ist ein Product", dürfen $2 + 4$ und $2 \,.\, 3$ nicht verwechselt werden.

Indem man Ausdrücke durch andere, die ihnen äquivalent sind, ersetzt, wird allerdings mehr als eine blosse Umformung oder Namenänderung bewirkt; denn ein Ausdruck bezeichnet eine Zahl (in der Regel) dadurch, dass er zugleich eine Vorschrift angibt oder *mitbezeichnet*, nach welcher diese Zahl (in ihrer Urform) herzustellen oder auch (in der dekadischen Form) auszurechnen ist und die hiezu erforderliche Arbeit wird je nach der Natur des Ausdruckes eine ganz andere sein. Durch unsere obige Definition der Gleichheit ist aber



gerade diese Entstehungsweise zu einem unwesentlichen Merkmal der Zahl selbst gestempelt worden.

Erlaubt heissen daher auch alle diejenigen Umformungen eines Ausdruckes, durch welche der Werth desselben nicht geändert wird.

17. Sätze über Gleichungen.

Aus dem obigen Grundsatze der Vertauschbarkeit von gleichen Zahlen folgt auch leicht jener berühmte Satz, der fälschlich noch hie und da als ein Axiom aufgeführt wird:

(A) *Wenn zwei Zahlen einer dritten gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich.*

Wenn $a = c$ und $b = c$, so ist auch $a = b$.

Der *Beweis* dieses Satzes ergibt sich nämlich, indem man von der ausgesprochenen Erlaubniss Gebrauch macht und entweder in der ersten Gleichung rechter Hand b für c schreibt, wozu man auf Grund der zweiten Gleichung berechtigt ist, oder auch, indem man in der zweiten Gleichung rechts a für c setzt auf Grund der ersten Gleichung.

Der letzte Satz ist nur ein besonderer Fall des nachstehenden allgemeineren:

Wenn beliebig viele Zahlen einer und derselben andern Zahl gleich sind, so sind die ersteren auch unter sich gleich. Wenn:

$$a = n, \quad b = n, \quad c = n, \ldots$$

so ist auch:

$$a = b, \quad a = c, \quad b = c, \ldots,$$

wie sich ebenso leicht beweisen lässt. Die letzteren Behauptungen pflegt man dadurch zu vereinigen, dass man schreibt:

$$a = b = c = \cdots$$

Ein derartiger Ausspruch wird eine *zusammengesetzte* Gleichung genannt; eine solche soll demnach ausdrücken, dass von den durch Gleichheitszeichen verbundenen Zahlen je zwei beliebige einzeln einander gleich sind.

Noch etwas umfassender als der vorige ist folgender Satz:

(B) *Zahlen, welche gleichen Zahlen gleich sind, müssen auch einander gleich sein.* Wenn:

$$a = \alpha, \quad b = \beta, \quad c = \gamma, \cdots$$

und

$$\alpha = \beta = \gamma = \cdots,$$

so muss auch

$$a = b = c = \cdots$$

sein. In einer andern Richtung jedoch lässt sich der jenem vorausgehende Satz auch noch wie folgt verallgemeinern:

(C) *Hat man eine Reihe von Zahlen derart, dass eine jede von*

ihnen der folgenden gleich ist, so ist auch die erste dieser Zahlen gleich der letzten von ihnen und sind sie überhaupt alle einander gleich, oder:

Wenn $a = b$, $b = c$, $c = d$, $d = e$, ..., so ist zum Beispiel auch: $a = e$ und überhaupt:

$$a = b = c = d = e = \cdots$$

Alle diese Sätze aber sind enthalten in dem nachstehenden:

(D) *Besteht zwischen beliebig vielen Zahlen eine Reihe von Gleichungen, welche sich so anordnen lassen, dass bei Durchgehung derselben jede neu auftretende Zahl oder Seite der Gleichung einer von den früher vorgekommenen gleich ist, so sind die sämmtlichen Zahlen durchweg einander gleich.*

Die neuen Gleichungen, welche so aus den gegebenen folgen, werden von diesen *abhängig* genannt.

18. Fortsetzung.

Aus jenem Grundsatz der Vertauschbarkeit von gleichen Zahlen folgt ferner das allgemeine Princip:

Gleiche Rechnungen, mit gleichen Zahlen vorgenommen, müssen gleiche Resultate liefern, welches wir lieber sogleich allgemein so beweisen wollen, wie man es für jede einzelne Rechnungsart besonders beweisen könnte. Bezeichnen wir mit (a, b) das Ergebniss der Verknüpfung zweier Zahlen a und b durch irgend eine *eindeutige* Rechnungsart, d. h. durch eine solche, welche überhaupt nur jedesmal zu *einer* bestimmten Zahl als Resultat führt, ist ferner:

$$a = \alpha \quad \text{und} \quad b = \beta,$$

so ist auch:

$$(a, b) = (\alpha, \beta).$$

Denn da jede Zahl sich selbst gleich ist, so haben wir:

$$(a, b) = (a, b);$$

machen wir aber rechts von dem Rechte Gebrauch, α für a und β für b zu schreiben, so ergibt sich in der That die zu beweisende Gleichung. — Namentlich ist z. B.:

$$a + b = \alpha + \beta, \quad a - b = \alpha - \beta, \quad a \,.\, b = \alpha \,.\, \beta, \quad \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ etc.}$$

So einleuchtend — ja selbstverständlich und überflüssig — die vorstehende Betrachtung auch erscheinen mag, so hat doch gerade das obige Princip in seiner Anwendung sehr häufig zu Trugschlüssen Anlass gegeben. Die Trugschlüsse gingen daraus hervor, dass man die *Gleichheit* mit der *logischen Unterordnung* verwechselte, für welche letztere demnach ein unterscheidendes Zeichen Bedürfniss ist. Wollte man z. B. schreiben:

Metall = Silber, und ebenso: Gold = Metall, so würde sich nach dem unumstösslichen Grundsatze, dass wenn zwei Dinge irgend welcher Art (seien es Zahlen, Grössen oder Begriffe) einem dritten gleich sind, sie auch unter sich gleich gelten müssen, die falsche Schlussfolgerung ergeben: Silber = Gold!

In der That war aber die Anwendung des Gleichheitszeichens für diesen Fall nicht erlaubt, da die Begriffe Gold, Metall etc. in der gegenseitigen Beziehung der Unter- oder Ueberordnung zu einander stehen.

Eine solche Subsumtion, wie bei den Begriffen Metall und Gold, kommt nun auch bei Zahlen vor, wie sogleich erhellen wird.

19. Vieldeutige Ausdrücke.

Wie sich zeigen wird, geben manche Untersuchungen Veranlassung zur Einführung von Operationen, deren Resultat kein vollkommen bestimmtes ist. Es mag z. B. sein, dass die Definition einer der fraglichen Operationen — wenn man will — noch eine unvollständige ist, dass sie noch eine gewisse Freiheit in der Ausführung ihres Rechengeschäftes übrig lässt, welche für das Resultat keineswegs gleichgültig ist; es mag auch die Operation definirt sein dadurch, dass ihr Ergebniss eine gewisse Anforderung erfüllen soll, nicht aber durch die Kette der zum Vollzug der Operation selbst nothwendig auszuführenden einzelnen Geschäfte.

Dergleichen Operationen, welche also, an gegebenen Zahlen ausgeführt, noch zu verschiedenen Resultaten führen können, werden *vieldeutige* Operationen genannt.

Wird das Ergebniss einer solchen Operation durch einen Ausdruck dargestellt, so ist dieser Ausdruck ein Name, welcher mehreren verschiedenen Zahlen mit gleichem Rechte zukommt; er heisst darum ebenso ein *vieldeutiger Ausdruck* (multiformis). Derselbe ist, wie man sagt, mehrerer Werthe fähig, und ist den letzteren in ähnlicher Weise übergeordnet, wie ein weiterer (Ober-) Begriff einem engeren Unterbegriffe, oder wie eine Gattung ihren Arten und diese ihren Individuen.

Dergleichen vieldeutige Ausdrücke, wie z. B. $\sqrt{a}$ oder $\log a$, ergeben sich vorzugsweise bei den inversen Operationen, und werden ihre Namen in doppelter und deshalb wohl zu unterscheidender Weise angewendet. Einmal nämlich, um die ganze Gattung der gedachten Werthe auf einmal, d. h. einen *beliebigen* unter denselben auszudrücken, wobei man sie nach Cauchy's Vorschlag (Cours d'Analyse) mit einer sich sonst als überflüssig charakterisirenden Klammer umschliesst. Sodann auch — uneingeklammert — um einen einzigen unter jenen Werthen vorzustellen, der durch eine anderweitige Festsetzung noch völlig bestimmt worden ist.

So wird z. B. das Zeichen $(\sqrt{9})$ irgend einen der beiden Werthe $+3$ und -3 bezeichnen, und zwar so, dass es jederzeit freisteht, den einen oder den andern dafür zu nehmen. Dagegen wird schlechtweg das Zeichen $\sqrt{9}$ gewöhnlich nur verwendet, um den positiven dieser beiden Werthe, $+3$, darzustellen.

Der als ein vieldeutiger verwendete oder unbestimmt gelassene Ausdruck und der in einer ganz bestimmten Bedeutung gebrauchte werden einander auch als *Valor generalis* und als *Valor particularis* (principalis) gegenüber gestellt.

20. Die logische Unterordnung.

In der Absicht eine möglichst grosse Präcision zu erzielen, werde ich nun für die logische Unterordnung (z. B. eines Particularwerthes unter einen Generalwerth) die nachstehend in Vorschlag gebrachte Bezeichnung anwenden.

Ist A ein vieldeutiger Ausdruck, welcher der bestimmten Zahlenwerthe $a, a', a'', \ldots$ fähig ist, ist jenes A überhaupt ein Begriff, der diese Individuen $a, a', a'', \ldots$ umfasst, oder zu dessen Kategorie die letzteren gehören, so werde ich schreiben:

$$A \succcurlyeq a, \quad A \succcurlyeq a', \quad A \succcurlyeq a'', \ldots$$

oder zusammenfassend:

$$A \succcurlyeq \begin{cases} a \\ a' \\ a'' \\ \vdots \end{cases}$$

sprich: A *übergeordnet* (*superordinirt*) $a, a', a'', \ldots$ und umgekehrt:

$$a \preccurlyeq A, \quad a' \preccurlyeq A, \quad a'' \preccurlyeq A, \ldots$$

auch:

$$\left.\begin{matrix} a \\ a' \\ a'' \\ \vdots \end{matrix}\right\} \preccurlyeq A,$$

sprich: $a, a', a'', \ldots$ *untergeordnet* (*subordinirt*) A, wobei sogleich darauf aufmerksam gemacht werden mag, dass diese *Subsumtionszeichen* $\succcurlyeq$ und $\preccurlyeq$ in ähnlicher Weise wie die Ungleichheitszeichen mnemonisch sind, indem hier der Bogen, der das Gleichheitszeichen durchsetzt, sich stets von dem engeren Begriff nach dem weiteren hin ausbreitet.

Bisweilen wird auch von der Bezeichnung Gebrauch gemacht:

$$a \asymp a' \asymp a'' \asymp \cdots$$

sprich: *a beigeordnet* (*coordinirt*) a', etc. Indessen ist dieses Zeichen $\asymp$ für sich ein ziemlich nichtssagendes; es drückt blos aus, dass die dadurch verknüpften Namen oder Dinge überhaupt nur einem allgemeineren Begriffe in gleicher Weise untergeordnet sind, dass es *irgend eine* Gattung gibt, zu der sie als Arten gehören. Einen genaueren Sinn erhält das Zeichen erst, wenn der Modul der Coordination oder der jene Individuen gleichmässig umfassende Oberbegriff daneben erwähnt wird.

An Stelle des oben erwähnten Beispiels würde demnach nunmehr genauer zu schreiben sein:

Metall $\succcurlyeq$ Silber, Gold $\preccurlyeq$ Metall, Silber $\asymp$ Gold.

Auch das *Gleichheitszeichen* werde ich bei Begriffen anwenden (z. B. zwischen den Generalwerthen zweier Ausdrücke); dann aber nur, um auszudrücken, dass die beiden Begriffe völlig — nach Inhalt und Umfang — übereinstimmen (dass also erschöpfend und ausschliesslich die nämlichen Specialwerthe von dem einen wie von dem andern Ausdruck angenommen werden können). Gleiche Ausdrücke werden demnach auch stets *gleich vieldeutig* sein oder gleich viele Werthe umfassen.

Gleichwie das Zeichen ⋇ der Coordination sich darbot, um auszusprechen, dass die beiderseits stehenden Ausdrücke einunddemselben Oberbegriffe gemeinschaftlich *unter*geordnet sind, so wird endlich (und zwar in noch höherem Grade) ein Zeichen erforderlich sein, welches ausdrückt, dass allgemeine Begriffe, die sich zu beiden Seiten desselben befinden, einigen Unterbegriffen oder Individuen gemeinschaftlich *übergeordnet* seien. Es soll hiezu das eingeklammerte Gleichheitszeichen (=) verwendet werden, sodass also die Beziehung:

$$A\,(=)\,B$$

bedeuten wird, dass die (vieldeutigen) Ausdrücke A und B mindestens *einen* gleichen oder übereinstimmenden Werth besitzen, wie wenn etwa A die Werthe unter sich begriffe: c, c_1, c_2, ... und B die Werthe c, c', c'', ... hätte. Mit andern Worten sagt die Proposition aus, dass die Begriffe A und B sich factisch miteinander vertragen, dass sie — wenn ich mich der Ausdrücke bedienen darf, welchen die bekannte geometrische Versinnlichungsweise der Begriffe zu Grunde liegt — ihrem Umfange nach betrachtet, sich theilweise überdecken, coincidiren, schneiden oder wenigstens in einem Punkte berühren. Jene Proposition ist ein particulares bejahendes Urtheil, des Sinnes, dass einige A auch B und somit einige B auch A seien.

Bei der Häufigkeit, mit der das Zeichen (=) dieser gedachten Beziehung späterhin auftreten wird, ist es wohl nöthig, sich eine kurze Art des Aussprechens für dasselbe vorzuschreiben. Auffallenderweise fehlt in den Systemen der Logik ein Kunstausdruck für diese Beziehung, und scheint sie überhaupt gänzlich übersehen zu werden, obwohl sie doch ein genaues Pendant zu der Coordination bildet. Man mag etwa, die Proposition ausführlich lesend, sagen: A stimmt in einem Werthe (resp. in gewissen Werthen) überein mit B, oder unmassgeblich: *A correlativ* (zu) *B*.

Würde nun noch ein Zeichen für die *Negation* etwa in Gestalt eines über das Beziehungszeichen zu setzenden ⁰ eingeführt, so wäre damit eine vollständige Terminologie geschaffen, nach welcher alle Beziehungen, in denen Begriffe (dem Umfange nach) zueinander stehen können, sich durch kurze Formeln ausdrücken liessen, die sich dem Schema der sonstigen mathematischen Zeichensprache möglichst innig anschmiegen und in den ganzen Zeichenapparat harmonisch einreihen.

Ich gehe nun dazu über, zu untersuchen, welche Schlüsse sich

aus gegebenen Relationen oder Formeln (genauer: ***Propositionen***) ziehen lassen, wenn dieselben eine Subsumtion ausdrücken.

Eine Proposition wie:

$$A ⋹ B \quad \text{oder} \quad B ⋺ A$$

kann als der allgemeine Typus eines (bejahenden) Urtheils angesehen werden, dessen Subject A, dessen Prädicat B vertritt. Bekanntlich ist das Subject nur bisweilen, das Prädicat dagegen *immer* ein allgemeiner Begriff, und das Urtheil sagt eben aus, dass das Subject zu der Kategorie des Prädicatbegriffes gehöre, dass es also den übrigen zu dieser Kategorie gehörigen Individuen in allen den Merkmalen gleiche, die der Prädicatbegriff als wesentliche in sich zusammenfasst, oder auch (etwas anders ausgedrückt): dass die dem Subject schon so wie so eigenthümlichen, dasselbe anderweitig charakterisirenden Merkmale sich zusammen vorfinden mit den im Prädicat hervorgehobenen Merkmalen; das Urtheil *verknüpft* die einen Merkmale mit den andern.

Alle mit Urtheilen vorzunehmenden Denkprocesse oder Geistesoperationen laufen nun im Grunde auf den folgenden Fundamentalsatz hinaus:

(A) *Wenn* $A ⋹ B$ *und* $B ⋹ C$, *so ist auch*:

$$A ⋹ C.$$

In diesem Satze unterscheiden wir die *obere Prämisse*, nämlich $A ⋹ B$, die *untere Prämisse*: $B ⋹ C$, und den *Schlusssatz*: $A ⋹ C$.

Man nennt auch A den *Unter-*, B den *Mittel-* und C den *Ober-Begriff*.

Der Schlusssatz kann, äusserlich betrachtet, auf zwei Arten aus den Prämissen abgeleitet werden: erstens nämlich, indem man in der oberen Prämisse B durch C ersetzt, zweitens auch, indem man in der unteren B durch A ersetzt. Hieraus lässt sich der Satz entnehmen:

(B) *In einem Urtheil (welches eine Subsumtion ausdrückt) kann der untergeordnete Begriff stets ersetzt werden durch denjenigen, welcher ihm in einem andern Urtheil untergeordnet ist, desgleichen der übergeordnete Begriff durch einen ihm in einem andern Urtheil abermals übergeordneten*; m. a. W.:

Für das Subject des Urtheils darf ein ihm untergeordneter, für das Prädicat ein demselben übergeordneter Begriff gesetzt werden; das Umgekehrte ist jedoch im allgemeinen nicht gestattet.

Von [illegible] den hiemit zugelassenen Operationen braucht nur die eine [illegible] werden und wird es auch in der Regel nur die eine [illegible] ersetzt man den Mittelbegriff durch den Unter-

begriff, indem man sich den Grundsatz gegenwärtig hält, dass, was von einer Gattung ausgesagt wird, auch von den sämmtlichen zu ihr gehörigen Arten und Individuen gelten muss.

Noch verallgemeinert heisst das letzte Theorem:

(C) *Wenn von einer Reihe von Begriffen ein jeder dem nächstfolgenden untergeordnet ist, so ist auch der erste dem letzten und überhaupt jeder frühere einem späteren untergeordnet,* und statt *unter*-dürfte auch durchweg *über*geordnet gesagt werden.

Wollte ich mich hier tiefer in die Exposition der Logik einlassen, so wäre nun leicht zu zeigen, dass bei passender Auffassung auch der *verneinenden* Urtheile, und mit Hülfe eines Grundsatzes für die Umwandlung der letzteren, sich überhaupt der Syllogismus in allen seinen Figuren auf den vorstehenden Satz (A) zurückführen lässt, dass jener Satz somit das Wesen aller Vernunftschlüsse, der Syllogismen wie der Kettenschlüsse bildet.

Ich begnüge mich indessen, nur folgende leicht zu rechtfertigende Sätze noch auszusprechen, von denen später mehrfach Gebrauch gemacht wird. (Vergleiche z. B. den zweiten Abschnitt des vierten Kapitels.)

(D) *Unterordnung unter einen eindeutigen Ausdruck ist Gleichheit.* Wenn $A \,{=}\!\!\!\in B$, und B nur *einen* Werth hat, zum Beispiel $B = b$ ist, so hat auch A eben diesen Werth b und ist folglich: $A = B$. Die Gleichheit kann somit als ein specieller Fall der Unter- sowohl als der Ueberordnung angesehen werden.

(E) *Ist gleichzeitig* $A \,{=}\!\!\!\in B$ *und* $A \ni\!\!{=} B$, *so muss* $A = B$ *sein.*

(F) *Sei* $A = \begin{cases} a \\ a' \\ a'' \\ \vdots \end{cases}$ *und* $B = \begin{cases} b \\ b' \\ b'' \\ \vdots \end{cases}$, *so muss, wenn alle* $a \,{=}\!\!\!\in B$ *und alle* $b \,{=}\!\!\!\in A$ *sind, auch* $A = B$ *sein.*

(G) *Aus dem Zusammenbestehen der Propositionen:*

$$a \,{=}\!\!\!\in A \quad \text{und} \quad a \,{=}\!\!\!\in B$$

für eine Reihe von Einzelwerthen a, a', a'', ... *kann stets geschlossen werden:*

$$A \,{=}\!\!\!\in B,$$

sobald nur jene Werthe die einzigen sind, deren der Ausdruck A *fähig ist, sobald also die zweite Proposition für alle diejenigen Einzelwerthe gilt, welche — mit* a *bezeichnet — die erste überhaupt erfüllen können.*

Alsdann nämlich werden alle Werthe, deren A fähig ist, zugleich auch dem Ausdruck B zukommen, womit indessen keineswegs die Möglichkeit ausgeschlossen ist, dass umgekehrt der letztere B noch andere Werthe mehr besitzen könnte, deren A nicht fähig ist. —

Würden die zwei obigen Propositionen nur für den einen oder andern Werth a Geltung haben, so liesse sich auch nur der Schluss ziehen: $A \,(=)\, B$. —

V. Einsetzung und Einschliessung.

21. Substitution.

Wie schon angedeutet wurde, sieht man sich oft veranlasst, für einen Ausdruck einen andern zu setzen; man ist z. B. immer hiezu berechtigt, wenn die beiden Ausdrücke einander gleich, oder wenn der erste dem zweiten übergeordnet ist.

Das Verfahren, welches hierbei in Anwendung kommt, heisst *Einsetzung* oder *Substitution* und ist die allerprimitivste Verrichtung, welche in der Mathematik gefordert werden kann, aber auch der wichtigsten eine; sie muss deshalb von dem Anfänger auf das mannigfaltigste eingeübt werden.

Um in einem Ausdruck, den ich c nennen will, für eine Zahl a eine andere Zahl b zu substituiren, ist es meist nicht thunlich, die Zahl a überall, wo sie sich in dem Ausdruck c findet, wirklich auszulöschen oder zu tilgen und dann b an die Stelle selbst zu setzen, die a bis dahin eingenommen hatte; man muss vielmehr dieses Verfahren mit einer *Reproduction* des Ausdruckes verbinden und das gewünschte Ergebniss der Substitution ganz neu schreiben.

Man beginnt zu diesem Zwecke damit, den gegebenen Ausdruck c in allen seinen Theilen successive zu copiren, nämlich ihn einfach abzuschreiben, soferne nicht die Zahl a, für welche b eingesetzt werden soll, sich darbietet. Sobald man jedoch auf diese zu ersetzende Zahl a stösst, muss man seines Vorhabens eingedenk sein und dieselbe nicht mit ihrem eigenen Zeichen a, sondern mit dem andern Zeichen b abbilden, welches für sie eingesetzt werden sollte — woran man nöthigenfalls sich durch eine Vorschrift $a \Rrightarrow b$ erinnern kann.

In Anbetracht der äusserst häufigen Anwendung, welche die Substitution in der ganzen Mathematik findet, vermisst man einen geeigneten Kunstausdruck sowohl für die *zu ersetzende* (zu remplacirende, auszumerzende, zu eliminirende) Zahl a, als auch für die dafür *einzusetzende* (zu substituirende, zu introducirende) Zahl b, desgleichen endlich für den ganzen Ausdruck c, in welchen b für a substituirt werden soll. Ich würde etwa die Namen: *Eliminand*, *Introducend* und *Substitutionsbasis* empfehlen; der neugebildete oder transformirte Ausdruck wäre endlich als das *Substitutionsresultat* zu bezeichnen.

Die Substitution wird nicht nur bei Zahlen im grössten Umfange ausgeübt; sie ist auch das Grundelement und ihre reine Ausbildung und Darlegung das Ideal der deductiven Methode überhaupt, indem alle rein logischen Schlussfolgerungen, soferne sie nicht blosse Umschreibungen und Zusammenfassungen sind, schliesslich darauf hinauslaufen, dass in einem Urtheile (kraft eines andern) ein allgemeiner Begriff durch ein zu seiner Kategorie gehörendes Individuum oder

ein weiterer Begriff durch einen engeren, der in ihm enthalten ist, *ersetzt* wird. Bei allen deductiven Schlussfolgerungen wird, wie schon einmal angedeutet, ein untergeordneter Begriff für den ihm übergeordneten *substituirt*.

Die *Vertauschung* besteht in einer gleichzeitigen Ausführung gewisser Substitutionen. Es werden a und b miteinander vertauscht, wenn sowohl b für a substituirt, als auch a an der Stelle eingesetzt wird, wo vorher b stand. Desgleichen werden mehrere Zahlen unter sich *vertauscht* oder *permutirt*, wenn jede derselben durch eine andere von ihnen ersetzt wird. —

Die Ausführbarkeit aller Substitutionen und Vertauschungen bildet ein Postulat bei allen Deductionen. Im übrigen kommt es dabei noch auf ein richtiges *Beobachten* der Substitutionsergebnisse an.

Wenn zum Beispiel an einer bestimmten Stelle für a erst b und für b dann c gesetzt wird, so lehrt die Beobachtung, dass das Ergebniss das nämliche ist, wie wenn für a sogleich c gesetzt worden wäre, und dasselbe muss überhaupt der Fall sein bei jedem Ausdruck, der das Zeichen b nicht enthält.

In Folge dessen wird denn auch die vollzogene Vertauschung zweier Zeichen durch eine darauf folgende abermalige Vertauschung derselben Zeichen wieder aufgehoben.

Einen Ausdruck, der die zu ersetzende Zahl gar nicht enthält, lässt die Substitution gänzlich unverändert. Soll überall, wo a steht, b gesetzt werden, und findet sich a nirgends, so bleibt natürlich alles beim alten. —

22. Gebrauch der Klammern.

Wenn oben gesagt worden ist, dass gleiche Zahlen für einander gesetzt werden dürfen, so ist jedoch eine Vorsichtsmassregel dabei nicht ausser Acht zu lassen. Hätte man z. B. 5 mit 6 zu multipliciren, also $5 \,.\, 6$ zu bilden, und würde man, da $5 = 2 + 3$ ist, statt 5 ohne weiteres $2 + 3$ schreiben, so könnte niemand dem Ausdrucke

$$2 + 3 \,.\, 6$$

ansehen, dass die *ganze* Summe $2 + 3$ mit 6 multiplicirt werden soll; vielmehr würde man beim Anblick jenes Ausdruckes eher auf die Meinung gerathen, dass das Multiplicationszeichen sich nur auf den letzten Theil 3 der Summe $2 + 3$ beziehe, welcher demselben zunächst steht. Der Werth des Ganzen würde sich alsdann $= 20$ anstatt $= 30$ herausstellen.

Um nun derartige Zweifel zu beseitigen, wendet man eine *Klammer* oder *Parenthese* an, und schreibt für $5 \,.\, 6$ nunmehr vollkommen unzweideutig:

$$(2 + 3) \,.\, 6 = 30,$$

[lies: *Klammer* 2 + 3 *geschlossen* $\times$ 6, oder Parenthesis 2 + 3 claudatur $\times$ 6], im Gegensatze zu $2 + (3 \,.\, 6) = 20$.

Ueberflüssig ist demnach die eine Zahl oder einen Ausdruck umschliessende Klammer, sobald dieser Ausdruck für sich steht und nicht weiter mit andern Zahlen zu verknüpfen ist. Aber auch in dem Falle, wo mit einer Zahl noch Rechnungen vorzunehmen sind, ist die Einklammerung derselben unnöthig, wenn sie durch ein *einfaches* Zahlzeichen, einen Buchstaben oder eine Ziffer ausgedrückt ist.

Die *überflüssige* Klammer bildet, wie schon einmal andeutungsweise benutzt wurde, ein noch für andere Zwecke disponibles Merkzeichen.

Ganz anders verhält es sich, wie oben gezeigt, in dem äusserst häufig vorkommenden Falle, wo der Name oder Ausdruck der durch Rechenzeichen mit andern zu verknüpfenden Zahl selber aus mehreren Zahlzeichen *zusammengesetzt* ist, durch deren Verbindung mittelst Operationszeichen die Bildungsweise jener ersteren angedeutet wird. In Betreff der Einschliessung merke man daher die Vorschrift:

So oft mit einem zusammengesetzten Ausdruck irgend eine Rechnung vorgenommen werden soll, so muss derselbe eingeklammert werden, und zwar: damit man nicht auf die Meinung gerathe, das Zeichen der erwähnten Rechnung beziehe sich nur auf den ihm zunächst stehenden Theil des Ausdruckes.

Die Klammer, durch welche ein Ausdruck „eingeschlossen" wird, vertritt eigentlich die Stelle einer denselben rings umgebenden und von andern Zahlen trennenden Hülle, etwa einer geschlossenen Curve. Da man indessen stets auf der Zeile schreibt und auch entlang derselben rechnet, so kann durch die doppelte Halbklammer ganz derselbe Zweck erreicht werden; er könnte oft ebenso gut durch eine über oder unter den Ausdruck geschriebene Halbklammer, durch einen *wagerechten Strich* erreicht werden, wie etwa in

$$\overline{2+3}\,.\,6 \quad \text{oder} \quad \underline{2+3}\,.\,6\,;$$

ein solcher hat jedoch als *verlängerter Wurzelstrich*, sowie als ***Bruchstrich*** eine anderweitige Verwendung gefunden. Wenn daher auch an Stelle der Klammer der wagerechte Strich nicht eingeführt werden kann, so wird dagegen durch den letzteren da, wo er sich ohnehin vorfindet, die Klammer in der That oft entbehrlich gemacht.

Der Bruch- oder Wurzelstrich ersetzt die Klammer sehr oft in solchen Fällen, wo die Operationszeichen sich auf der Zeile selbst, oder wenigstens gerade über oder unter derselben befinden; so z. B. bei $\sqrt{a+b}$, was von $\sqrt{a}+b$, sowie bei $\frac{a+b}{c}$, was von $a+\frac{b}{c}$ schon von selbst hinreichend unterschieden ist etc. Jedoch in einem Ausdruck wie $\left(\frac{a}{b}\right)^c$, worin Zahlen in schräger Richtung verknüpft werden, dürfte ungeachtet des Bruchstriches die Klammer offenbar nicht unterdrückt werden, da derselbe sonst von $\frac{a^c}{b} = \frac{(a^c)}{b}$ nicht genügend unterscheidbar wäre.

Auch da endlich, wo eine mit einem zusammengesetzten Ausdruck vorzunehmende Operation durch eine veränderte Stellung dieses Ausdruckes über oder unter der Zeile markirt wird, wie in $c^{a+b} = c^{(a+b)}$, ist die Einschliessung von vornherein unnöthig.

Da das Schreiben zahlreicher Parenthesen sehr lästig ist, so sucht man diese überhaupt möglichst zu ersparen. Dass es in der That gelingt, sie verhältnissmässig sehr selten zu machen, ist aber vornehmlich folgendem Umstande zu danken. Wie sich zeigen wird, können eigentlich nicht mehr als *zwei* Zahlen auf einmal durch eine Rechnung miteinander verbunden werden. Ein Ausdruck, in welchem *drei* Zahlen durch Operationszeichen miteinander verbunden sind, wie z. B.:

$$a - b + c,$$

hat also nur insofern einen Sinn, als man sich erst zwei von diesen drei Zahlen (durch eine Klammer) zusammengefasst und dann das Ergebniss mit der dritten Zahl verknüpft denkt. Eine Klammer kann aber hier nur auf zwei Arten gesetzt werden: entweder um die beiden ersten oder um die beiden letzten Buchstaben herum, wie

$$(a - b) + c \quad \text{und} \quad a - (b + c);$$

die erste und die letzte Zahl nämlich können deshalb nicht zusammengefasst gedacht werden, weil sie durch die mittlere getrennt erscheinen. Da es demnach nur darauf ankommt, jene beiden Ausdrücke zu unterscheiden, so kann man sicher die Klammer in dem einen Falle stets weglassen, wenn man sie für den andern gewissenhaft beibehält. Die Klammern dürfen sogar alle beide weggelassen werden, wenn die Ausdrücke, auf deren Unterscheidung sie hinzielen, den gleichen Werth haben.

Sind in einem Ausdruck mehrere Klammern vonnöthen, so pflegt man sich zur Erleichterung der Uebersicht verschiedenartiger Klammern zu bedienen: der *runden* ( ); der *eckigen* [ ] und der *geschwungenen* { }.

Da sich mit einem eingeklammerten Ausdruck erst dann weitere Rechnungen ausführen lassen werden, wenn man bereits den Werth desselben kennt, so ergibt sich für die Ausrechnung von ineinander eingeschachtelten Ausdrücken die Regel, dieselbe jederzeit in der Richtung *von innen nach aussen* vorzunehmen.

VI. Anwendung der Buchstaben.

23. Literale und numerische Zahlen.

Für den Anfänger muss noch der Gebrauch der Buchstaben gerechtfertigt werden.

In der *allgemeinen Arithmetik* oder *Buchstabenrechnung* bedient man sich derselben, um irgend welche Zahlen zu bezeichnen, welche alsdann *Buchstabengrössen* oder *literale* Zahlen genannt werden, im Gegensatz zu den mittelst Einern oder Ziffern dargestellten *numerischen* Zahlen.

Gewöhnlich werden dazu die kleinen oder grossen Buchstaben des lateinischen oder griechischen Alphabetes benutzt. Um jedoch die Anzahl der zu Gebote stehenden Zeichen, welche sonst nicht grösser als die Anzahl der Buchstaben jener Alphabete:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \dots$$
$$A,\ B,\ C,\ D,\ \dots$$
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \dots$$
$$A,\ B,\ \Gamma,\ \Delta,\ \dots$$

wäre, ins unbegrenzte zu vermehren, nimmt man sehr oft auch *numerirte* Buchstaben, d. h. Buchstaben mit rechts unten angehängten Zahlzeichen, welche *Stellenzeiger* (*Indices*, *Suffixe*) genannt werden, wie z. B.:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ a_n \text{ (sprich: } a \text{ unten } n).$$

Nicht selten kommen sogar *mehrfache* Indices in Anwendung, z. B. *doppelte*, wie bei:

$$b_{1,1},\ b_{1,2},\ \ b_{1,3},\ b_{2,3},\ \dots$$

Ungern dagegen setzt man die Stellenzeiger *über* den Buchstaben, wie in:

$$a',\ a'',\ a''',\ a^{\mathrm{IV}},\ \dots\ a^{(n)},$$

(sprich: *a prim*, *a secund*, oder *a zwei gestrichen* etc.) und drückt sie alsdann durch römische Ziffern aus, oder klammert sie ein, weil eine rechts übergeschriebene Zahl eine andere Bestimmung erhalten hat, nämlich die, als ein Exponent zu dienen.

Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass wir oft, wenn n eine beliebige Zahl bedeutet, die vorhergehende mit $n - 1$, die zweitvorhergehende mit $n - 2$ bezeichnen werden, ohne noch im übrigen über die Subtraction irgend etwas vorauszusetzen; die nachfolgenden Zahlen heissen: $n + 1$, $n + 2$, und so fort, sodass die Reihe der nach ihrer Grösse geordneten Zahlen lautet:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\ n - 2,\ n - 1,\ n,\ n + 1,\ n + 2,\ \dots$$

Ich werde übrigens von dieser Bemerkung lediglich bei Stellenzeigern Gebrauch machen, und ist demnach beispielsweise unter a_{n-1} eben nur die Zahl zu verstehen, welche in einer von uns gedachten Zahlenreihe a_1, a_2, a_3, ... der irgendwann einmal vorkommenden Zahl a_n unmittelbar vorangeht.

Die Punkte ... sind das Zeichen für „und so weiter (bis)“. —

Wir werden uns also unter jenen Buchstaben stets irgend welche *Zahlen* vorstellen, und zwar im Laufe *einer* Rechnung oder Untersuchung unter demselben Buchstaben, so oft er wiederkehrt, immer die nämliche Zahl. Mit verschiedenen Buchstaben bezeichnen wir

Zahlen, welche verschieden gedacht werden dürfen, aber in besondern Fällen auch einander gleich angenommen werden können, also im allgemeinen gänzlich von einander unabhängig sind.

Es ist nun nachzuweisen, dass eine solche Verwendung der Buchstaben einerseits *erlaubt* und andrerseits, dass sie *vortheilhaft* ist.

24. Berechtigung zu jener Anwendung. Principien der Nomenclatur.

Das erstere leuchtet ohne weiteres ein, da Missverständnisse daraus doch nur dann hervorgehen könnten, wenn die Buchstaben eine anderweitige, eine ihnen eigenthümliche Bedeutung hätten, was ja bekanntlich nicht der Fall ist. Wer über das Wesen der Nomenclatur oder *Bezeichnung* auch nur einigermassen nachgedacht hat, wird überhaupt den folgenden Grundsatz zugeben:

Ein Zeichen, welches noch keinen Sinn besitzt, kann als Name für jeden beliebigen Gegenstand verwendet werden, ohne dass dadurch Verwechselungen oder Missverständnisse hervorgerufen werden könnten.

Es verhält sich mit dergleichen sinnlosen Zeichen ähnlich wie mit einem herrenlosen Gut, das dem ersten besten gehört, der es findet oder es der Mühe werth hält, dasselbe aufzuheben. Auf diesem Gebiet (dem der Nomenclatur) wenigstens liegt keine Verpflichtung vor, etwas so oder so zu halten, so lange noch nichts darüber ausgemacht ist, und wo es sich nur um eine Uebereinkunft (Convention) handelt, kann man — so lange man keine Versprechungen gegeben hat — auch an Gesetze sich nicht gebunden erachten.

Dass andererseits die Beschränkung, das Zeichen, worüber disponirt wird, solle noch ausdruckslos, ohne Sinn sein, eine wesentliche ist, wird sofort klar, wenn man sich die Confusion vergegenwärtigt, die entstehen muss, falls unter einem Wort zweierlei verstanden wird — falls z. B. in einer Gesellschaft zwei Personen den gleichen Namen tragen.

Der obige Grundsatz, der die Freiheit der Bezeichnung garantirt, bildet somit in der That die erste Basis, auf Grund von welcher behufs der Namengebung eine Uebereinkunft zu Stande kommen könnte und findet dieser Grundsatz in der That in der ganzen Mathematik die ausgedehnteste Anwendung. Namentlich bei allen Conventionen, die nur für den Augenblick, für eine *kurze* Weile geschlossen werden sollen, kann man ihn ganz unbedenklich befolgen und braucht sich nicht einmal an Gebrauch und Herkommen — an das „usus est tyrannus“ — zu kehren. Des weiteren hat man sich dabei nur durch die Rücksicht auf zu erzielende Vortheile hinsichtlich der Bequemlichkeit der Ausdrucksweise leiten zu lassen. Eben dadurch aber, dass letzteres in

geschickter Weise geschieht, und von jener Freiheit der Bezeichnung der geeignetste Gebrauch gemacht wird, wird die Mathematik selbst einem ihrer Hauptziele näher gebracht. Da nämlich auch die Gedanken an Worte und Zeichen geknüpft sind, so wird durch ein weises Haushalten mit jenen Zeichen auch auf eine möglichste Ersparniss an Gedankenarbeit hingewirkt, und die Mathematik zu einer Oekonomik des Geistes nicht minder als der Sprache herangebildet.

Wir werden besonders im dritten Bande sehen, wie aus der Ausdehnung des obigen Grundsatzes auch auf solche Zeichen, die ihre Sinnlosigkeit nur dem Umstande verdanken, dass sie aus sinnvollen Zeichen in einer absurden Weise zusammengesetzt sind, ein eminenter Gewinn gezogen wird.

Die Berechtigung zu einer beliebigen Anwendung der Buchstaben, namentlich also auch zur Bezeichnung von Zahlen, steht mithin über allem Zweifel, und auch die Gefahr, etwas inhaltsloses oder sinnloses auszusagen, wird wegfallen, wenn man sich nur jederzeit über den Sinn, welcher den Buchstaben beigelegt werden soll, gehörig verständigt hat.

25. Beweggrund und Vortheile jener Anwendung.

Der Nutzen aber, den diese Verwendung der Buchstaben gewähren kann, ist ein mannigfacher, und soll nun Punkt für Punkt beleuchtet werden, da sich einige nicht unwichtige Bemerkungen daran knüpfen.

A) Auch abgesehen von ihrer Bedeutungslosigkeit eignen sich die Buchstaben schon dadurch, dass sie jedermann bekannt, möglichst leicht mittheilbar und von unübertrefflicher Kürze sind, überhaupt am besten dazu, Namen abzugeben; sie empfehlen sich vor allen andern Wörtern oder Sprachzeichen zur Bezeichnung von solchen Dingen, die noch keine Benennung gefunden haben oder für eine kleine Weile eines neuen Namens bedürftig sind. Sie werden deshalb auch anderwärts vielfach angewendet, z. B. in der Geometrie, um Punkte, Linien u. s. w. zu bezeichnen. In der reinen Mathematik jedoch bedeuten die Buchstaben in der Regel nur Zahlen.

B) Namentlich zur Darstellung noch *unbekannter* Zahlen hat man so die Buchstaben als bequemes Mittel zur Hand, und zwar pflegt man hiezu die letzten Buchstaben x, y, z, ... des Alphabetes vorzugsweise gern zu nehmen. Wenn ich z. B. einen Haufen Nüsse vor mir habe, so ist die Anzahl der Nüsse eine bestimmte, denn ich kann sie erfahren, indem ich die Nüsse zähle; so lange aber das letztere nicht geschehen, ist sie eine unbekannte. Dadurch nun, dass wir sie (nicht die Nüsse, sondern deren Anzahl!) einstweilen mit x bezeichnen, erlangen wir den erheblichen Vortheil, dass wir ohne grosse Um-

schweife von derselben sprechen und vielleicht solche Untersuchungen über sie anstellen können, welche uns schliesslich der Mühe, sie zu zählen, total überheben.

C) Aber nicht nur unbekannte, sondern auch *bekannte* Zahlen werden oft vortheilhaft durch Buchstaben ausgedrückt; diese Darstellung ist ja meistens kürzer als die Bezeichnung, welche die Zahlen in ihrem *ausgerechneten* Zustande mittelst *Ziffern* gefunden haben, und man wird also namentlich bei sehr grossen Zahlen oft wohl daran thun, einen Buchstaben anzuwenden, um den complicirten Namen derselben nicht wiederholt anschreiben und aussprechen zu müssen. Ganz besonders trifft diese Bemerkung bei den irrationalen Zahlen gerne zu, ferner auch bei allen noch unausgerechneten Ausdrücken, mit welchen weitere Rechnungen vorgenommen werden sollen. [Vergleiche hiezu noch E) und F)].

Die Buchstaben empfehlen sich mithin schon zur Bezeichnung von *bestimmten* Zahlen.

D) Weit erheblicher noch ist aber der Nutzen, welchen die Buchstaben als *allgemeine* Zahlzeichen gewähren, um unbestimmt gelassene, ganz beliebige Zahlen vorzustellen.

Erst auf diese Weise gelangen wir dahin, Sätze, welche von unendlich vielen Zahlen gelten, mit völliger Allgemeinheit und dennoch ohne Vergleich kürzer als in Worten — mittelst *Formeln* — auszudrücken. Erst so lässt sich der Vortheil der grössten *Kürze*, den die Zeichensprache gewährt, mit dem Vortheil der höchsten *Allgemeinheit*, welcher der Wortsprache eigen ist, vereinigen.

Es wird passend sein, dies an einigen einfachen arithmetischen Sätzen zu erläutern, von deren Richtigkeit sich der Anfänger einstweilen auf empirischem Wege, durch Probiren, überzeugen kann.

So fasst z. B. die Formel:

$$a\,.\,(b + c) = a\,.\,b + a\,.\,c,$$

genauer:

$$= (a\,.\,b) + (a\,.\,c)$$

eine Eigenschaft der Addition und Multiplication bei unbegrenzt vielen Zahlen vollständig und kurz zusammen, die man sonst nur umständlich verbaliter zu beschreiben im Stande wäre. Es ist nämlich insbesondere: $5\,.\,(3 + 4) = 5\,.\,3 + 5\,.\,4$, ebenso $7\,.\,(8 + 1) = 7\,.\,8 + 7\,.\,1$, $2\,.\,(4 + 9) = 2\,.\,4 + 2\,.\,9$, und so weiter ohne Ende fort; kurz: welche Zahlen man auch an die Stelle der Buchstaben a, b, c setzen mag, so erhält man immer eine richtige Gleichung.

Als weitere das Interesse des Anfängers gerne fesselnde Exempel empfehlen sich unter andern noch die Formeln:

$$a \cdot a - b \cdot b = (a + b)(a - b),$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n \cdot n,$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ etc.},$$

welche sämmtlich der reinen Mathematik oder Zahlenlehre entnommen sind. Die unendlich mannigfaltigen Fälle, wo eine Zahl nicht sowohl durch eine bestimmte arithmetische Bildungsweise, als vielmehr durch ihre Benennung definirt ist (wie in der Geometrie z. B. die Anzahl der Diagonalen eines 3, 4, 5, ... n Eckes), übergehe ich hier als dem Gebiet der angewandten Mathematik angehörig.

„Es ist klar, dass es nicht ausreicht, zum Ausdruck derartiger Gesetze bestimmte Zahlen zu wählen, weil es den dabei erhaltenen Gleichungen sich nicht ansehen lässt, dass sie auch für beliebige andere Zahlen gelten. Sonst könnte man ja aus der Gleichung $2 . 2 = 2 + 2$ mit demselben Rechte schliessen, dass auch $3 . 3 = 3 + 3$ wäre!“ (Müller l. c.)

An den hiermit eingeführten Begriff der Formel knüpfen sich nun so mannigfaltige Betrachtungen, dass ich es für gut finde, dieselben auf eine folgende Nummer zu versparen, und vorerst die begonnene Aufzählung über die Nützlichkeit des Buchstabengebrauches zu beendigen.

E) Die unter C) angeführten Vorzüge finden nicht nur eine Steigerung, sondern auch eine vortheilhafte Verschmelzung mit den sub D) angedeuteten in dem Umstande, dass die Rechnungen, welche überhaupt mit literalen Zahlen gefordert werden können, wesentlich *leichter* sind, als die mit numerischen Zahlen.

Um z. B. zwei Zahlen a und b zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliciren oder zu dividiren, braucht man blos resp. (*respective* = beziehungsweise)

$$a + b, \quad a - b, \quad a . b, \quad \frac{a}{b}$$

zu bilden (zu sagen oder zu schreiben).

Man wird daher, wenn etwa eine Aufgabe zu lösen ist, oft wohl daran thun, Buchstaben an die Stelle der Zahlenwerthe zu setzen. Durch die Verbindung dieser Buchstaben deutet man an, welche Rechnungen mit den Zahlen vorgenommen werden sollen, und führt erst dann an Stelle der Buchstaben die Zahlen wieder ein, nachdem diese Rechnungen auf möglichst einfache zurückgeführt sind.

Alle diese Umformungen könnten zwar auch mit den bestimmten Zahlen ebenso leicht vorgenommen werden, wenn von dem sub C) gesagten abgesehen wird; allein dann hätte man in jeder ähnlichen Aufgabe, in der nur die Zahlen andre Werthe haben, wieder von vorne die nämlichen Umformungen auszuführen, während es durch die Buchstaben ein für alle mal geschieht und dadurch die Allgemeingültigkeit der arithmetischen Gesetze erst ihre volle Verwerthung findet. Manche Aufgaben aber drängen solchermassen sich wirklich in so häufiger Wiederholung auf, dass bei ihrer Behandlung im einzelnen schon die kleinste Ersparniss äusserst schätzenswerth erscheint, und dass vollends durch ihre vereinte Erledigung im ganzen eine unberechenbare Arbeitsersparniss erzielt wird.

F) Als ein Vorzug der Anwendung von Buchstaben, welcher mit dem vorigen im Zusammenhang steht, kann endlich noch hervorgehoben werden, dass Buchstabenausdrücke das Gepräge ihrer Entstehung hartnäckiger festzuhalten pflegen, als Ausdrücke, die aus numerischen Zahlen zusammengesetzt sind. Hat man z. B. den Ausdruck $a \,.\, (b + c)$ für die bestimmten Werthe $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$ berechnet, so kann man dem Resultat 35 diese Entstehung nicht mehr ansehen, während der Buchstabenausdruck sie stetsfort zu erkennen gibt. So liegt also in der Anwendung von Buchstaben eine gewisse Garantie dagegen, dass nicht mühsame numerische Rechnungen unnöthigerweise ausgeführt werden.

VII. Formeln und Functionen.

26. Analytische und synthetische Gleichungen.

Wir haben unter litera D) der vorigen Nummer den Gebrauch der Buchstaben als *allgemeiner* Zahlen motivirt und sind dabei zu dem Begriff einer eigenen Art von Gleichungen gekommen, welche Formeln genannt wurden.

Formel heisst überhaupt jede Relation, in welcher dergleichen allgemeine Zahlzeichen vorkommen. Ist die Relation etwa eine Gleichung, so kann sie, insoferne man sich beide Seiten derselben ausgerechnet denkt, wo dann links und rechts genau dasselbe steht, auch eine *Identität* genannt werden (identitas, von idem); der letztere Name kommt jedoch auch einer Gleichung zwischen ganz bestimmten Zahlen zu, wenn ihre Richtigkeit sich von selbst versteht, d. h. nach den Regeln der Arithmetik nachgewiesen werden kann.

Bisweilen*) werden noch die Bezeichnungen *Formel* (formula, als Diminu-

*) Z. B. in dem bekannten Lehrbuch von Baltzer.

tivum von forma, Form) und *Ausdruck* (wörtlich: expressio) durcheinander geworfen, und scheinen beide ursprünglich allerdings von sehr verwandter Bedeutung gewesen zu sein. Ich glaube indessen, dass man wohl daran thun wird, die beiden Wörter auseinander zu halten und die Trennung, die der Sprachgebrauch bezüglich ihrer Bedeutung geschaffen hat, nicht tendenziös aufzuheben.

Es ist hier der Ort, auf die Eintheilung der Relationen überhaupt etwas näher einzugehen.

Eine Relation enthält entweder blos *numerische* Zahlen, wie z. B. die Gleichung:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100,$$

oder die Ungleichung:

$$2 + 3 < 2 . 3, \text{ etc.}$$

und sie ist dann einfach entweder *richtig* — d. h. im Einklange mit den über Zahlengleichheit und Bedeutung der Ausdrücke getroffenen Festsetzungen — oder *falsch* (und im ersteren Falle, wo sie eine Gleichung ist, wie gesagt *identisch*). Oder es kommen in der Relation — ausser vielleicht einigen aus Ziffern zusammengesetzten Zahlen — auch noch andere Zahlensymbole vor, als welche bekanntlich Buchstaben ausschliesslich verwendet werden.

In dem letzteren Falle aber kann von vornherein nicht darüber entschieden werden, ob die Relation richtig oder falsch sei, da dieses davon abhängig ist, welche Bedeutung man den Buchstaben beilegen wird, und in dieser Beziehung stellt sich sogleich ein capitaler Unterschied heraus — nämlich:

Woferne man sich nur auf einem bestimmten (wenn auch unbegrenzten) Zahlengebiete bewegt, kurz auf einem Zahlengebiete, welches zwar beliebig ausgemacht worden sein darf, aber als bekannt vorauszusetzen ist, so bemerkt man, dass es Relationen gibt, in denen man allen darin vorkommenden Buchstaben jeden beliebigen Werth (aus dem gedachten Zahlengebiete) beilegen kann, ohne ihre Richtigkeit zu beeinträchtigen, während bei anderen Relationen dieses nicht der Fall ist.

Die ersteren sind unsre Formeln, und sie werden auch — obwohl nicht ganz angemessen — *analytische* Gleichungen (resp. Ungleichungen) genannt; das gedachte Zahlengebiet bildet das Gültigkeitsbereich derselben.

Im Gegensatz dazu heissen die letzteren *synthetische* Gleichungen. In einer solchen treten zwar ebenfalls Buchstaben auf, jedoch nicht in der Eigenschaft allgemeiner Zahlzeichen, sondern — woferne es überhaupt innerhalb des vorgeschriebenen Zahlengebietes solche Werthe („Wurzeln“) gibt, welche sie erfüllen — nur um eine ganz bestimmte Zahl oder wenigstens eine gewisse Reihe besondrer Zahlen zu vertreten. Die synthetische Gleichung kann also dazu dienen, um gewisse Zahlen vor den übrigen hervorzuheben, um sie gemäss gegebenen Bedingungen oder als Mittel zur Erreichung gewisser Zwecke zu bestimmen.

So ist auf dem Gebiet der gemeinen Zahlen z. B. die Gleichung: $(a + b) - b = a$, desgleichen $2(x + 3) = 2x + 6$ eine analytische

Gleichung oder Formel, weil sie gültig ist, welche Zahlen man auch unter a, b, x sich vorstellen mag; dagegen ist:

$$2x + 1 = 9$$

eine synthetische Gleichung, weil sie nur in dem einen Falle richtig sein kann, wo x die bestimmte Zahl 4 repräsentirt.

Nach dem gesagten wird man beispielsweise eine transscendente Gleichung mit unendlich vielen Wurzeln sowohl als eine analytische wie auch als eine synthetische ansehen können, je nachdem ihr Gültigkeitsbereich ein vorgegebenes ist oder nicht. So ist etwa die Gleichung $\operatorname{tg} n\pi = 0$ eine analytische zu nennen, wenn bereits ausgemacht ist, dass n eine ganze Zahl vorstellen soll; im andern Fall, wenn die Beschaffenheit von n noch dahinsteht, eine synthetische. In den höheren Gebieten der Mathematik kann jedoch der Unterschied zwischen einer analytischen und einer synthetischen Gleichung auch darein verlegt werden, dass an die erstere die Anforderung gestellt wird, ihr Gültigkeitsbereich solle sich über Werthe erstrecken, die in *stetigem* Zusammenhange miteinander stehen oder ein continuirliches Gebiet ausfüllen.

Zur Unterscheidung von analytischen und synthetischen Gleichungen haben auch einige Autoren die Namen „Gleichheiten" und „Gleichungen" einander gegenüber gestellt.

27. Theoreme, Regeln.

Das charakteristische für eine Formel oder analytische Gleichung war nach dem obigen, dass sie Buchstaben enthält, denen unbeschadet ihrer Richtigkeit beliebige Werthe (aus dem Zahlengebiet) beigelegt werden können.

Und zwar geht daraus hervor, dass in einer Formel für jede Buchstabengrösse nicht nur eine beliebige *bestimmte* Zahl eingesetzt werden darf, sondern auch irgend ein anderes Zeichen, welches wieder eine *allgemeine* Zahl vorstellt, kurz, ein ganz beliebiger einfacher oder zusammengesetzter Ausdruck — der letztere, falls er nur vorschriftsmässig eingeklammert wird.

So gut zum Beispiel $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ist, muss auch $x \cdot (b + c) = x \cdot b + x \cdot c$ sein, denn das Zeichen x stellt in gleicher Weise, wie der Buchstabe a, an dessen Stelle es gesetzt ist, eine noch unbestimmt gelassene Zahl vor, oder: die Zahl, die a genannt wurde, hätte auch x genannt werden können, weil bei der Namengebung über die Wahl des Buchstabens keine Vorschrift existirt. Desgleichen folgt auch noch: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, ferner: $(\alpha - \beta) \cdot (y + z) = (\alpha - \beta) \cdot y + (\alpha - \beta) \cdot z$, und so weiter.

Bei einer Formel tritt also der Fall ein, dass man nicht nur gleiche, sondern auch verschiedene Zahlen unumschränkt für einander setzen darf, und bietet die Substitution somit ein Mittel, um aus einer gegebenen Formel oder Gleichung noch deren neue ohne Ende fort abzuleiten oder zu folgern.

Werden so in einer Formel durch eine Substitution neue Zahlen eingeführt, die von besonderem Interesse erscheinen, so sagt man, es werde die allgemeine Formel auf diese besondern Zahlen *angewendet*. Wenn namentlich die Formel eine Gleichung ist, so findet diese Anwendung in der Regel in der Absicht statt, um einen gegebenen Ausdruck in einen gewünschten umzuformen. Alsdann nämlich spricht die Formel die Erlaubniss aus, die eine Seite derselben durch die andre zu ersetzen.

In dieser Weise aber lässt sich die Formel offenbar auf *zwei* Arten anwenden, je nachdem die linke Seite in die rechte, oder die rechte Seite in die linke umgewandelt werden soll. Jede Seite der Gleichung enthält eine Rechenvorschrift, und die Gleichung sagt aus, dass die Berechnung der beiderseitigen Ausdrücke, wenngleich die Arbeit dabei eine andere ist, zum nämlichen Resultat führt; es kann darum Vortheil bringen (und autorisirt man sich eben durch die Formel dazu), statt der einen Rechenvorschrift die andre zu befolgen oder auch umgekehrt. Gewöhnlich sind auch noch die Zahlen, an welchen jene Rechnungen vorgenommen werden sollen, anders bezeichnet, als die in der Formel vorkommenden, sodass der Uebergang von der einen zur andern Seite derselben zu verbinden ist mit Substitutionen für die dabei auftretenden Zahlen.

Zur Erleichterung dieses zusammengesetzten Geschäftes kann es nun dienen, die Formel in Gestalt einer *Regel* in Worte zu fassen, und wird man nicht selten gut thun, die letztere sich einzuprägen. Je nachdem aber die Formel dabei von links nach rechts oder von rechts nach links gelesen aus der Zeichensprache in die Wortsprache übersetzt wird, d. h. je nachdem sie behülflich sein soll, die Ueberführung eines Ausdruckes wie des links stehenden in einen andern, der dem rechts stehenden nachgebildet ist, zu bewerkstelligen, oder umgekehrt, wird diese Regel ganz verschieden klingen, und liefert also eine Formel, in Worte übersetzt, im allgemeinen *zwei* Regeln, die im Grunde doch nur ein einziges *Theorem* oder ein und denselben Lehrsatz ausdrücken.

Jene beiden Regeln können übrigens auch vollkommen gleichlautend ausfallen, wenn nämlich die eine Seite der Formel durch blosse Vertauschung einiger Buchstaben in die andere verwandelt werden kann (was dann stets auch umgekehrt ausführbar ist) — wenn also die beiderseitigen Ausdrücke sich nicht durch ihren Bau, sondern nur durch die Benennungsweise darin vorkommender Zahlen unterscheiden. In diesem nicht übermässig seltenen Falle wird dann die Formel eine *symmetrische* genannt.

28. Constante und variable Zahlen, Functionen.

Bei literalen Zahlen wird noch eine Unterscheidung gemacht zwischen *beständigen* und *veränderlichen* Zahlen.

Oben wurde gesagt, dass man sich unter einem Buchstaben, z. B. a, im Laufe einer Rechnung oder Untersuchung stets die nämliche Zahl vorstelle. Dies ist im allgemeinen richtig und kann auch immer aufrecht erhalten werden, insoferne man, wo es nicht der Fall ist, behaupten kann, dass eine neue Untersuchung beginne. In allen Theilen ein und desselben Ausdruckes, sowie zu beiden Seiten einer Relation, muss allerdings das nämliche Zahlzeichen, wo immer es auftritt, auch unbedingt die nämliche Zahl bedeuten. Im übrigen jedoch sieht man sich sehr oft veranlasst, in einem ganzen Ausdruck, oder durchweg in einer Formel, demselben Buchstaben a der Reihe nach verschiedene Werthe beizulegen — sei es nun, dass man die Formel so auf mehrere Zahlen anwenden will, indem ein Fall, auf den die Formel passt, sich oft wiederholt, sei es auch, dass man die Werthe der Ausdrücke, die bei verschiedener Annahme der Buchstabengrössen aus einem gegebenen Ausdruck hervorgehen, unter sich vergleichen will. Kurzum: es müssen oft viele gleichartige einfache Untersuchungen aneinander gereiht und zu einer zusammengesetzten Untersuchung verflochten werden.

Man pflegt nun in diesem Falle die Zahl a eine *veränderliche Zahl* oder eine *Variable* zu nennen, und im Gegensatz dazu eine (literale) Zahl, welcher man keine wechselnde Bedeutung untergelegt wissen will, eine *unveränderliche Zahl* oder *Constante*.

Strenge genommen legt man dadurch der Zahl selbst eine Eigenschaft bei, die ihren Grund doch nur in unsrer eigenen Willkür hat; man sagt z. B. die Zahl *a ändere sich, wachse* oder *nehme ab,* während eigentlich eine jede Zahl sich fortwährend gleich bleibt und nur *wir* unsre Aufmerksamkeit von der einen auf die andre lenken und dabei den gleichen Namen von jener auf diese übertragen. Dieses Verfahren aber ist gerechtfertigt nicht nur durch den anschaulichen Vergleich, den es implicirt und durch die Bequemlichkeit der Ausdrucksweise, indem dabei die Zahlen gleichwie auf einer Reise die Gegenstände vor unserm Auge vorüberzuziehen scheinen, sondern es ist auch in vielen Fällen der innersten Natur der Sache angemessen, da die (variable) Zahl häufig definirt ist als Masszahl einer Grösse, welche in Wirklichkeit in einer Aenderung, im Zunehmen oder im Verschwinden, begriffen ist.

Die numerischen Zahlen bilden somit gewissermassen das starre, feste, die literalen Zahlen aber das flüssige, bewegliche Element in dem Organismus der Analysis.

Jedem Werthe oder Werthsysteme der veränderlichen literalen Zahlen *„entspricht"* dabei ein bestimmter Werth des aus ihnen zusammengesetzten Ausdruckes, nämlich derjenige, welcher sich durch die Substitution jener Zahlenwerthe und Berechnung des daraus hervorgehenden Ausdruckes ergibt — und man sagt: der Ausdruck *hänge* von den in ihm vorkommenden Variabeln *ab*, er sei eine ***Function*** dieser Variabeln; die letzteren ihrerseits heissen auch die ***Argumente*** der genannten Function. [Die Constanten dagegen, welche noch in dem Ausdruck vorkommen können, werden, wenn sie literale Zahlen sind, bisweilen die *Parameter* der Function genannt.] Die Argumente nennt man häufig auch *unabhängig veränderliche* und die Functionen derselben *abhängig veränderliche* Zahlen.

So ist z. B., um auf ein früheres Exempel zurückzukommen, der Ausdruck $a(b+c)$ eine Function der drei Argumente a, b, c; der Werth desselben hängt lediglich davon ab, welche Werthe man den letzteren beilegt. Ebenso sind $2n+1$ und n^2 Functionen von n, und zwar solche, von denen man z. B. sagen kann, dass sie gleichzeitig mit n wachsen; d. h. legt man dem n immer grössere und grössere Werthe bei, so nimmt auch n^2 immer grössere Werthe an. Für $n=1$ ist $n^2=1$; für $n=2$ ist $n^2=4$; für $n=3$ ist $n^2=9$, u. s. w. Ebenso entsprechen den Werthen 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... von n beziehungsweise die Werthe 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... von $2n+1$, u. s. w. [Sieht man $a+xb$ nur als Function von x an, so sind die Constanten a und b die Parameter dieser Function.]

Wie nahe verwandt auch die Bezeichnungen „(analytischer) *Ausdruck*" und *„Function"*, [sowie *„Operationsglied"* und *„Argument"*] nach dem obigen erscheinen mögen, so sind sie doch keineswegs identisch.*) Z. B.:

$$(a+x)-(a-x) \quad \text{und} \quad 2x$$

sind ganz verschiedene Ausdrücke, dagegen die nämliche Function von x. Ob zwar der erste Ausdruck eine Differenz, der zweite ein Product ist, so muss doch — da nach den Regeln der Arithmetik hier beide stets einander gleich sind — einem beliebigen Werthe von x jedesmal der nämliche Werth des einen wie des andern Ausdrucks entsprechen. Eben diese Zusammengehörigkeit bestimmter Werthe macht aber das charakteristische Merkmal der Function aus.

Eine veränderliche Zahl w heisst überhaupt eine *„Function"* von einer (oder mehreren) andern Variabeln x (resp. x, y, z, ...), wenn eine Vorschrift gegeben ist, nach welcher zu einem beliebigen Werthe (resp. Werthsysteme) der letzteren Zahlen jedesmal ein *bestimmter* Werth jener ersten Zahl gehört.

Es kann demnach zwar vieldeutige Ausdrücke, doch keine *vieldeutigen* Functionen geben, denn nach der eben aufgestellten Definition liegt das Wesen der

*) Die Vermengung dieser Begriffe ist ein Fehler, in den neuerdings z. B. Liersemann verfällt (dessen Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipzig 1871).

Function gerade darin, dass jedem Werthsystem der Argumente je eine bestimmte Zahl als Werth der Function unzweideutig zugeordnet ist.

Eine Function kann daher höchstens ungenügend erklärt oder noch unbestimmt gelassen sein; eine Mehrdeutigkeit kann nur der Art ihrer Bestimmung, nicht aber der Function selber anhaften. Je nachdem diese Angabe für die Function beschaffen ist, wird man die letztere eine unvollständig oder aber eine vollständig *explicirte* nennen.

Man deutet oft das Vorhandensein eines solchen Abhängigkeitsverhältnisses dadurch an, dass man schreibt:

$$w = f(x), \quad \text{beziehungsweise} \quad w = F(x, y, z, \ldots),$$

oder auch wohl:

$$w = \varphi_x \quad \text{resp.} \quad w = \Phi_{x, y, z, \ldots}$$

— d. h. also, indem man vor die durch Kommata getrennten Argumente eines der *„Functionszeichen"* $f, \varphi, \psi, \ldots F, \Phi, \Psi, \ldots$ setzt (oder auch die Argumente als Suffixe dem Functionszeichen anhängt).

Darnach wird nun allgemein $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ denjenigen Werth der Function $w = F(x, y, z, \ldots)$ vorstellen, welcher dem Werthsystem der Argumente:

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma, \ldots$$

zu entsprechen hat, und setzt uns also eine derartige Darstellung in den Stand, für alle möglichen Werthsysteme der Argumente den zugehörigen Werth der Function unzweideutig nach einem einfachen Princip zu bezeichnen.

Es werden so z. B. unter $f(1), f(2), f(3), \ldots$ diejenigen Werthe einer Function $f(x)$ zu verstehen sein, welche beziehungsweise den Werthen $1, 2, 3, \ldots$ des Argumentes x entsprechen.

Das Functionszeichen soll jedoch noch etwas mehr als das blosse Vorhandensein einer derartigen Beziehung oder Abhängigkeit ausdrücken; es kann auch bis zu einem gewissen Grad die Art des Abhängigkeitsverhältnisses selbst andeuten, insoferne durch dasselbe die Gleichheit oder Verschiedenheit von Functionen kenntlich zu machen ist.

Zwei Functionen von gleich viel Variabeln, wie:

$$w = F(x, y, z, \ldots) \quad \text{und} \quad \omega = \Phi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$

heissen *gleich*, wenn zu jeder Zusammenstellung von Werthen der Argumente bei der einen Function stets der nämliche Functionswerth gehört, wie bei der andern; sobald dagegen dieses nicht durchweg der Fall ist, heissen die Functionen *verschieden*.

Sollen F und Φ gleiche Functionen sein, so muss also z. B. der Werth von ω, welcher den Werthen: $\xi = 9$, $\eta = 5$, $\zeta = 6, \ldots$ zugehört, gleich sein dem Werthe von w, der den Werthen $x = 9$, $y = 5$, $z = 6, \ldots$ entspricht, d. h. es muss:

$$F(9, 5, 6, \ldots) = \Phi(9, 5, 6, \ldots)$$

ebenso muss:

$$F(7, 8, 3, \ldots) = \Phi(7, 8, 3, \ldots)$$

sein und so weiter ohne Ende fort. [Welches die gedachten Werthe von w oder ω selbst sind, das wird natürlich erst aus der specifischen Definition der Function F zu ersehen sein.]

Gleiche Functionen dürfen demnach mit denselben, verschiedene dagegen müssen mit verschiedenen Functionszeichen bezeichnet werden, und ersieht man hieraus ferner, dass die Wahl der Buchstaben, mit welchen die Argumente bezeichnet werden, keinen Einfluss auf den Charakter einer Function haben kann.

Was nun die Arten betrifft, auf welche eine specielle Function definirbar ist, so kann dieselbe zunächst *tabellarisch* gegeben werden; man kann sie sich nämlich bestimmt denken durch eine Tabelle, in welcher zu jedem Werthsystem der Argumente der zugehörige Functionswerth aufzuschlagen wäre. In dieser Weise — als tabellarisch gegebene — bieten alle Functionen sich dar, welche aus *beobachteten* Zahlenwerthen erkannt werden sollen, z. B. solche Functionen, welche die Abhängigkeit gewisser Naturerscheinungen von anderen darstellen. Tabellarisch gegebene Functionen können ohne jede Spur von Gesetzmässigkeit sein. Indem man sich einen Ueberblick über alle ihre vorliegenden Werthverknüpfungen bildet, setzt man sich den Begriff dieser Functionen nach und nach *synthetisch* zusammen.

Auf der andern Seite kann eine Function auch eine *generelle* Bestimmung erfahren, d. h. die Zusammengehörigkeit zwischen Functions- und Argumentwerthen kann vermittelst allgemeiner Festsetzungen mit einem Schlage bestimmt werden.

Die Function heisst alsdann eine gesetzmässige, *analytische*, und zwar kann dieselbe noch *implicite* gegeben sein durch irgend welche Bedingungen oder Bestimmungsgleichungen, die sie erfüllen soll, oder auch *explicite* durch einen algebraischen Ausdruck, welcher bei seiner Ausrechnung selbst die verschiedenen Functionswerthe liefert.

Setzt man überhaupt eine gesetzmässige Abhängigkeit zwischen Zahlen voraus, nimmt man z. B. an, dass eine Zahl w mit andern Zahlen x, y, z, ... derart in Zusammenhang stehe, dass der Werth der ersteren aus den Werthen der letzteren stets auf einerlei Art ableitbar ist, so ist umgekehrt auch eben damit angenommen, dass w eine analytische Function dieser Argumente sei. Es wird alsdann auch einen analytischen Ausdruck geben, der gleich w gesetzt die gedachte Function $F(x, y, z, \ldots)$ vorstellt. Denn da die Ableitung einer Zahl durch gesetzmässige Verknüpfung aus andern Zahlen (im weitesten Sinne des Wortes) „Rechnung“ genannt wurde, so ist mit obigem festgesetzt, dass sich jeder Werth der ersten Variabeln aus den zugehörigen Werthen der letzteren unzweideutig *berechnen* lasse. Die Rechengeschäfte aber, die mit diesen vorzunehmen sind, um jene zu erhalten, kann man sich immer dadurch angedeutet denken, dass die gegebenen Zahlen mittelst Operationszeichen zu einem Ausdrucke ver-

knüpft sind, welcher selbst explicite den Werth der gesuchten Zahl für alle Fälle vorstellt.

Es kann übrigens auch vorkommen, dass Functionen eine *gemischte* Bestimmungsweise erleiden, dass sie für verschiedene Theile des Zahlengebietes durch verschiedenartige Ausdrücke vorgestellt oder zum Theil auch tabellarisch gegeben sind. Ferner kann es gelingen, ursprünglich beliebig ungesetzmässige Functionen durch analytische Ausdrücke darzustellen und dadurch als gesetzmässige erscheinen zu lassen.

Denken wir uns nun eine Function $F(x, y, z, \ldots)$ durch einen analytischen Ausdruck, wie z. B. $x^2 + 3xy + z$, gegeben, so wird von diesem speciellen Ausdruck der Function das für dieselbe allgemein eingeführte Zeichen $F(x, y, z, \ldots)$ — als der *symbolische Ausdruck* derselben — zu unterscheiden sein.

Während in dem symbolischen Ausdruck die Variabeln $x, y, z, \ldots$ nur *ein*mal als Argumente angeschrieben erscheinen, können sie in jenem wirklichen oder actuellen Ausdruck auch *mehrmals* verknüpft enthalten sein; nach dem gesagten wird der letztere Ausdruck auch andere, z. B. numerisch bestimmte Zahlen als Bestandtheile enthalten können, überhaupt noch Zahlen, die von $x, y, z, \ldots$ unabhängige vorgegebene Werthe besitzen.

Da jedoch diese constanten Bestandtheile, sowie nach unsrer Annahme auch der ganze Bau des Ausdruckes stets die gleichen sein müssen, für welche Werthe von $x, y, z, \ldots$ man auch die zugehörigen Werthe von w berechnen will, so brauchen dieselben in dem symbolisch abgekürzten Ausdrucke für die Function auch in der Regel nicht markirt zu werden und wird überhaupt bei vielen Untersuchungen die specielle Natur des (actuellen) Functionsausdruckes zeitweise nicht in Betracht kommen.

Für diese Fälle ist es nun wichtig, ein für alle mal auf folgendes aufmerksam zu machen.

Soll in dem actuellen Ausdruck für irgend eine Variable, z. B. x, wo immer dieselbe in ihm vorkommt, ein Werth α substituirt werden, so kann dies an dem symbolischen Ausdruck der Function zur genüge sichtbar gemacht werden dadurch, dass nur an der *einen* Stelle, wo das x in ihm steht, dieselbe Substitution ausgeführt wird. Umgekehrt also hat man sich eine jede Veränderung, die an dem Namen einer Variabeln in dem symbolischen Ausdruck der Function nur *einmal* ausgeführt oder angedeutet wird, in dem actuellen Ausdruck der Function stets *durchweg* vollzogen zu denken — an allen Stellen, wo diese Variable in ihm vorkommt — wogegen alles andere dabei unverändert zu lassen ist. So z. B. wenn $F(x, y, z) = x^2 + 3xy + z$ ist, muss $F(\alpha, y, z) = \alpha^2 + 3\alpha y + z$ bedeuten, und wird in eben dieser Zurück-

führung eines mehrfachen Geschäftes auf ein einfaches ein Hauptvortheil der symbolischen Functionsbezeichnung bestehen. —

Die weitere Ausbildung des Begriffes der Function und die Untersuchung ihrer Eigenschaften macht übrigens den Vorwurf der höchsten Partieen der Mathematik aus, und mag für den elementaren Theil das bisherige genügen. —

VIII. Schlussbemerkung.

28.

Wir setzen nun die im bisherigen angegebenen einfachen Begriffe und Bezeichnungen als bekannt voraus, und gehen zur Betrachtung der 7 algebraischen Operationen über. Zur Kenntniss dieser Operationen und ihrer Hauptgesetze lassen wir uns zwar — wie an einer Richtschnur — an dem Leitfaden der natürlichen Zahlen hinführen; dabei werden wir jedoch dem Objecte — den Zahlen selber — möglichst wenig Aufmerksamkeit widmen. Wir wollen vielmehr unser Hauptaugenmerk auf den Begriff und die Grundeigenschaften der Rechengeschäfte richten, welche mit jenen vorgenommen werden können, damit wir dann später mit Hülfe dieser Operationen die Eigenschaften der Zahlen um so besser untersuchen können.

Auf den ersten Blick scheint es allerdings naturgemässer, nicht von den Operationen auszugehen, sondern von dem Gegenstand, an welchem sie zu vollziehen sind (den Zahlen), und so die Operationen erst einzuführen, nach Massgabe als sich das Bedürfniss derselben herausstellt — wie man dies übrigens auch leicht im Anschluss an den gegenwärtigen Lehrgang, sobald er vollendet, durchführen könnte.

Im Interesse der Uebersichtlichkeit und strengen Gliederung habe ich jedoch auf eine solche rein genetische Entwickelung verzichtet, und schicke der eigentlichen Arithmetik die Lehre von den Operationen gewissermassen propädeutisch voraus.

Die abgeleiteten Formeln haben demnach zunächst allerdings nur beschränkte Gültigkeit, indem alle vorkommenden Werthe natürliche Zahlen sein müssen, und auch die Null — zum Beispiel — überall ausgeschlossen bleibt. Insofern aber diese Gesetze späterhin als Norm auch für andere Arten von Zahlen aufgestellt werden, lässt sich dieser erste Abschnitt als *formaler* Theil der Algebra ansehen, welchem die nachfolgenden Abschnitte erst nach und nach den *realen* Inhalt vollständig geben werden.

Dabei sind namentlich auch die (wenigen) Voraussetzungen zu merken, aus welchen alle Folgerungen fliessen, damit man bei der späteren Ausdehnung der Sätze auf andere Arten von Zahlen nicht genöthigt ist, dieselben Schlussreihen nochmals durchzumachen.

Der Nachtheil der bedingten Gültigkeit unsrer Gesetze wird übrigens zum Theil schon durch einen Vorzug aufgewogen, auf den ich nicht unterlassen will, hinzuweisen; es ist der Umstand, dass (mit einziger Ausnahme des Symbols $\overset{1}{\log}\, 1$) sämmtliche Operationen vollkommen eindeutig sind, mithin die Schwierigkeit, welche mehrdeutige Operationen zu bereiten pflegen, für den Anfang wegfällt.

Es soll gleichwohl auch diesen Schwierigkeiten hier schon vorgebaut werden, und gebe ich demnach für diejenigen Leser, welche tiefer in die Materie einzudringen wünschen, eine eingehende Behandlung auch der vieldeutigen Operationen. Die einschlägigen Betrachtungen sind aber sämmtlich in die mit *geraden* römischen Ziffern überschriebenen Abschnitte verwiesen, und kann diese der Anfänger, der nur rasch in höhere Gebiete vordringen will, zunächst überschlagen.

Zweites Kapitel.

Die drei directen Operationen.

Ich werde den vorliegenden Stoff im folgenden auf zwei grundverschiedene Arten behandeln, die gänzlich von einander unabhängig sind und je ihre eigenthümlichen Vorzüge besitzen.

Die sogenannte *independente* Behandlungsweise besitzt den Vorzug, eine jedermann sofort zugängliche *Motivirung* für sämmtliche Festsetzungen abzugeben, und zwar überall die einfachsten Beweggründe zu offenbaren, die sich denken lassen; sie führt alle neuen Begriffe auf leichte und naturgemässe Weise ein.

Bei dieser Behandlungsweise sind überdies weniger lange Schlussreihen erforderlich, sie eignet sich mehr zu abgekürzter Behandlung und ist gewissermassen intuitiver, macht dafür aber grössere Ansprüche an das innere Anschauungsvermögen. Sie ist ausserdem diejenige Methode, durch welche die Theorie historisch nach und nach herangebildet worden ist.

Die andre Behandlungsweise, die wir die *recurrente* nennen, ist aus dem Bedürfniss grösserer Strenge in der Absicht nach möglichster Vereinfachung der zum Ausgangspunkt genommenen Voraussetzungen und Einschränkung der alsdann benutzten Schlussmittel hervorgegangen. Man verdankt dieselbe hauptsächlich Grassmann (l. c.) und kann das genannte Ziel als durch sie erreicht angesehen werden; dieselbe lässt in Hinsicht auf Gründlichkeit kaum noch zu wünschen übrig. Obwohl diese Behandlungsweise für Anfänger von der durchschnitt-

lichen Begabung sich nicht empfehlen möchte, hauptsächlich wegen der Schwierigkeit, die es verursachen muss, begreiflich zu machen, wie man auf Definitionen und Deductionen, wie die dort aufgestellten, verfallen konnte, so ist sie doch in methodologischer Hinsicht von solchem Interesse, dass ich mich nicht enthalten kann, ihr in gegenwärtigem Lehrbuch Aufnahme zu gönnen — um so weniger, als letzteres ja gerade in dieser Hinsicht nach Vollständigkeit strebt.

Um jedoch Wiederholungen zu vermeiden, werde ich in Worten die Sätze zumeist nur bei der ersten Darstellung aussprechen.

I. Die Addition in independenter Behandlung.

§ 1. Begriffe und Benennungen.

Gleichwie es schwierig sein mag, demjenigen, der eben das Alphabet erlernt, einen Begriff von dem Reichthum der Literatur beizubringen, die ihm durch die Kenntniss desselben erschlossen wird, so erscheint es auch als eine schwierige, wenn nicht unmögliche Aufgabe, dem an der Schwelle der Arithmetik stehenden Anfänger sogleich eine richtige Vorstellung von der Tragweite ihrer ersten Operation zu geben, welche die *Addition* ist.

Es lässt sich erst bei längerer Aufmerksamkeit und praktischer Erfahrung einigermassen ermessen, wie häufig es sich ereignet, dass man im Laufe einer Untersuchung Anlass bekommt, Dinge als einander *gleich* zu betrachten, die man zu Anfang derselben als von einander *verschieden* anzusehen Ursache hatte, dass man sich also dahin gebracht sieht, die verschiedenen Arten dieser Dinge, die anfangs getrennt gezählt wurden, nun *zusammen zu zählen.*

Nicht nur kommt es bei den Aenderungen, die sich fortwährend in der Wirklichkeit vollziehen, alle Augenblicke vor, dass die Gegenstände unsrer Betrachtung factisch in den Zustand der Gleichheit eintreten, sondern es bieten sich auch oft genug Gründe dar, die Hinsicht, in der man die Dinge betrachtet, zu wechseln, sodass Dinge, die in einer Hinsicht verschieden erschienen und deshalb in unsrer Vorstellung getrennt waren, in einer andern Hinsicht als einander gleich erscheinen, weshalb wir sie nun als gleichzeitige Vorstellungselemente in uns aufnehmen und gemeinschaftlich zählen werden.

Hat man z. B. mehrere Haufen Nüsse, und wirft sie zusammen, so lassen sich die Nüsse der verschiedenen Haufen hernach nicht mehr unterscheiden, und können auch nur *zusammen* gezählt werden.

Soll mir jemand eine Summe Geldes zahlen, so habe ich Ursache, die in seinem Besitz befindlich gewesenen Thaler so lange als verschieden anzusehen von den mir schon ausbezahlten, als sie noch nicht in den meinigen übergegangen sind. Erst im letzteren Falle werde ich über sie alle verfügen und sie in gleicher

Weise zu meinen Zwecken verwenden können und erst dann gelten sie mir *gleich*. Wer überhaupt von der Grösse seines Eigenthums eine richtige Vorstellung erhalten und sich in seinen Ausgaben darnach einrichten will, wird Geldstücke immer nach Massgabe dessen als sie ihm legal überantwortet werden, zu den seinigen hinzuzählen, obwohl diese Stücke doch sämmtlich schon vorhanden sein und vielleicht auch am nämlichen Ort verbleiben mögen.

Beim Zählen von Ereignissen z. B. werden die künftigen zu den vergangenen hinzuzuzählen sein, sobald man sich in Gedanken in einen noch spätern Zeitraum versetzt, u. s. w.

Diese Beispiele, die leicht auf die mannigfaltigste Weise zu vermehren wären, werden genügen, um den Sinn der vorangestellten allgemeinen Behauptung zu erläutern und damit die Einführung der Addition als erster Operation der Algebra zu motiviren.

Da jeder Einheit ein Einer entspricht, so werden verschiedene Mengen von Einheiten addirt oder *zusammengezählt*, d. h. in der That gemeinschaftlich gezählt werden durch eine solche Zahl, welche die Einer der sämmtlichen getrennt gezählten Mengen von Einheiten in sich vereinigt, oder wir können sagen:

Bei der Addition handelt es sich darum, eine Zahl zu bilden, die für sich allein so viele Einer enthält, als die gegebenen Zahlen zusammengenommen.

Die verlangte oder gesuchte Zahl — das Resultat der Addition — heisst *Summe*, die gegebenen Zahlen heissen die *Glieder* oder *Summanden* (termes, termini, Terme, Addenden, Posten) der Summe.

Sind die Glieder in ihrer Urform, als Summen von Einern gegeben, wie z. B.:

$$2 = 1 + 1, \quad 3 = 1 + 1 + 1,$$

so wird also nach dem Sinne und der Meinung der obigen Definition ihre Summe erhalten, indem man diese Reihen von Einern einfach durch das Zeichen $+$ verknüpft aneinanderhängt; sie ist demnach:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5.$$

Um jedoch auszusprechen, dass diese Zahl durch Addition eben der Zahlen 2 und 3 entstanden ist, stellt man die Summe auch dadurch dar, dass man die Glieder — ein jedes derselben als ein ganzes genommen — mittelst des Pluszeichens verbindet, nämlich schreibt:

$$5 = 2 + 3.$$

Lassen wir übrigens die dekadische Darstellung der Zahlen ganz aus dem Spiel, so haben wir nun als Bezeichnung für die Summe der beiden Zahlen $1 + 1$ und $1 + 1 + 1$ den Ausdruck eingeführt:

$$(1 + 1) + (1 + 1 + 1),$$

und die Erklärung dieses Ausdruckes oder die Definition der Summe

besteht in der Festsetzung, dass die beiden Seiten der folgenden Gleichung für einerlei gelten sollen:

$$(1+1)+(1+1+1)=1+1+1+1+1.$$

Das heisst — allgemein gesprochen — es birgt unsre Definition der Summe die Erlaubniss in sich:

In einer Summe von Einern dürfen beliebige Gruppen von nebeneinander stehenden Einern durch Klammern eingeschlossen und solche Klammern auch wieder nach Gutdünken weggelassen werden.

Man pflegt zu sagen, links sei (in der letzten Gleichung) die Addition blos *angedeutet*, rechts sei sie *ausgeführt*. Die Ausführung der Addition besteht also, äusserlich betrachtet, in der Weglassung der Klammern, welche die Einer der verschiedenen Glieder von einander scheiden (und durch diese Trennung zugleich unterscheiden); sie besteht in der *Aufhebung* einer Verschiedenheit. [Ebenso wird man später sehen, dass die Subtraction auf die *Herstellung* eines Unterschiedes hinzielt.]

Gleichwie die Einer das Bild der Einheiten sind, so erscheint auch die Absonderung der ersteren durch die Klammern als das Sinnbild der Verschiedenheit, welche diesen letzteren anhaftet, bevor man sie zusammen zählt. Von dieser Verschiedenheit der Einheiten wird abgesehen, sobald sie *insgesammt gezählt* werden sollen, und ebenso kommt auch die Scheidewand zwischen den Einern in Wegfall, sobald dieselben *zusammenzuzählen*, d. h. zu addiren sind.

Sind die Glieder einer Summe durch Buchstaben dargestellt, z. B. a und b, so bildet man die Summe nach der obigen Vorschrift, indem man schreibt:

$$a+b,$$

und man sagt alsdann, die Zahl b werde *zu a hinzugefügt*, oder die Zahl a werde *um b vermehrt*; die Zahlen a und b werden *zu einander addirt*, sie werden *summirt*.

Das zweite Glied b wird auch wohl der Zuwachs oder das *Increment* des ersten Gliedes a genannt, welches seinerseits als der *Augend* bezeichnet werden könnte. Indessen ist nur die erstere Bezeichnung eine in der höheren Mathematik vielfach übliche geworden.

Auch die Summe von mehreren Gliedern $a, b, c, d, \ldots$ wird in ähnlicher Weise dargestellt durch:

$$a+b+c+d+\cdots$$

Zu zeigen, wie eine solche Summe im dekadischen System ausgerechnet wird, wenn die Summanden als dekadische Zahlen gegeben sind, ist Aufgabe der gemeinen Arithmetik. (Vergl. Bd. 2.)

Nichts steht im Wege, die Ergebnisse des Zählens, nämlich die Zahlen selbst, von neuem als Objecte oder Einheiten dem Processe

des Zählens zu unterwerfen, und also auch bei einer Summe nach der Anzahl ihrer Glieder zu fragen. Beachtenswerth erscheint hierbei, dass man diese Gliederzahl einer Summe unmittelbar erhalten kann, indem man ihre Glieder selbst in lauter Einer verwandelt. Nach dieser Anzahl ihrer Glieder pflegt man die Summen einzutheilen in *Monome*, *Binome*, *Trinome* etc. und *Polynome*, d. h. in 1, 2, 3 und mehrgliedrige Summen.

Ein *Monom* oder Monomium (zusammengezogen aus Mononomium) soll eine für sich stehende Zahl bedeuten, überhaupt einen Ausdruck, der nicht aus einer Addition hervorgegangen ist, eigentlich also gar nicht in der Form einer Summe erscheint.

Zum Beispiel die Ausdrücke $(x+y)^2$, $3b$, c^n, 7, $\frac{5(a^2+b^2)}{\sqrt{c}}$, a, etc. sind lauter Monome, und es erhalten viele Sätze über Summen in vortheilhafter Weise eben dadurch eine grössere Tragweite, dass in ihnen auch derartige Ausdrücke als *eingliedrige* Summen mit zugelassen sind, wenngleich allerdings, nach der ursprünglichen Erklärung der Summe, zur Bildung derselben mehr als *ein* Glied erforderlich ist.

Ein Binomium ist ferner $a+b$ oder $3+z$, desgleichen x^2+y^2, u. s. w. $a+b+c$ ist ein Trinomium und zugleich damit auch ein Polynomium.

Die in Rede stehenden Benennungen sind nicht ganz consequent gebildet, nämlich zu einem Theile dem lateinischen, zum andern dem griechischen entnommen. —

§ 2. Erstes Gesetz der Addition.

Von der Addition gelten zwei fundamentale Sätze — die einzigen, welche in Bezug auf *allgemeine* Zahlen über sie ausgesagt werden können.

Dieselben sind so innig mit den Begriffen von Zahl und Summe verwachsen, dass man sie gewöhnlich als Axiome hinstellt, oder, anstatt sie logisch aus jenen Begriffen zu deduciren, sich höchstens bemüht, sie etwas plausibel zu machen. Mir wenigstens ist bei der independenten Behandlung — also abgesehen von den recurrenten Beweisen Grassmann's — kaum ein ernsthafter Versuch eines eigentlichen Beweises zu Gesicht gekommen. Im folgenden soll nun ein solcher bei allen beiden Gesetzen gegeben werden, wozu hier die nöthige Vorarbeit bereits geleistet ist.

Das erste derselben heisst:

Die Ordnung oder Aufeinanderfolge der Glieder einer Summe ist beliebig. Mit andern Worten: *Die Glieder dürfen ihre Plätze wechseln; der Werth der Summe bleibt ungeändert, wenn man irgend welche Glieder derselben miteinander vertauscht.*

Dieser Satz wird das *Commutationsgesetz der Addition* genannt (von commutare, vertauschen). Man sagt, die Addition sei eine commutative Operation, weil sie diesem Gesetze gehorcht.

Für den einfachsten Fall — den einer *zweigliedrigen* Summe oder eines Binoms — kann der Satz durch die Formel ausgedrückt werden:

$$(1) \qquad a + b = b + a,$$

welche vorzugsweise als der Ausdruck des genannten Gesetzes gilt.

Für eine *dreigliedrige* Summe hat man schon die sechs auf Grund des Satzes gleichwerthigen Darstellungen:

$$a + b + c = b + c + a = c + a + b =$$
$$= a + c + b = b + a + c = c + b + a,$$

und so weiter.

Die Aufgabe, alle möglichen Anordnungen in einer $n$gliedrigen Summe vollständig und methodisch herzustellen, gehört der Combinationslehre an, und findet dort auch die Frage nach der Anzahl der so erhältlichen Darstellungen ihre Beantwortung.

Ich schreite nun dazu, das Gesetz zu beweisen.

Wenn in dieser Beziehung angeführt wird, dass eine Reihe von a Einern, zu denen b Einer addirt worden:

$$\underset{\frown \atop 1}{1} + \underset{\frown \atop 2}{1} + \underset{\frown \atop 3}{1} + \cdots + \underset{\frown \atop a}{1} + \underset{\frown \atop 1}{1} + \underset{\frown \atop 2}{1} + \cdots + \underset{\frown \atop b}{1}$$

vom Ende aus gesehen in der That erscheint als die Reihe von b Einern, zu denen a Einer addirt worden, so kann dies nicht wohl als ein *Beweis* des Satzes gelten, sondern ist es eben nur eine wirksame Art, denselben glaubhaft zu machen oder ihm Zustimmung zu verschaffen. Es würde sonst auf die gleiche Weise sich auch beweisen lassen, dass $a - b = b - a$ oder $a : b = b : a$ wäre!

Seine genauere Begründung findet der Satz sogleich allgemein durch die folgende Ueberlegung.

Es wurde oben die Summe charakterisirt durch die Reihe der zu ihr vereinigten Einer, welche einerlei ist mit der Anzahl der einzeln diesen Einern unzweideutig entsprechenden Einheiten, die eben vermittelst der Summe gemeinschaftlich gezählt werden sollen, nachdem sie vorher getrennt gezählt waren (also zum Theil als von einander verschieden betrachtet wurden).

Wenn aber die Glieder der Summe auf verschiedene Weise angeordnet werden, so sind damit offenbar nur verschiedene Bestimmungen getroffen über die Reihenfolge, in welcher die Einheiten, deren Anzahl die Summe repräsentirt, insgesammt gezählt werden sollen. Geht z. B. bei einer gewissen Anordnung der Summanden das Glied a dem Gliede b voran, und folgt ihm bei einer andern Anordnung derselben nach, so unterscheidet sich hiemit die Summe mit der ersten Anordnung der Glieder lediglich dadurch von derjenigen mit der andern Anordnung derselben, dass zu ihrer Bildung gefordert wird, von den sämmtlichen überhaupt zu zählenden Einheiten solle die erste Art, nämlich diejenigen, die in der Anzahl a vorhanden sind, gezählt werden *vor* der zweiten Art von Einheiten, die durch die Anzahl b charak-

terisirt waren — während die zweite Anordnung der Glieder weiter nichts andeutet, als dass das umgekehrte geschehen solle.

Es drückt demnach eine verschiedene Anordnung der Glieder nichts anderes aus, als eine verschiedene Anordnung des Zählprocesses für sämmtliche Einheiten, und somit ist dieselbe nach dem in Nummer 12.—14. der Einleitung gesagten ohne Einfluss auf den Werth der Zahl, welche die Summe vorstellt, und ist der verlangte Beweis geliefert.

Es ist nicht einmal nöthig, bei dem Beweise auf die Einheiten zurückzugehen, welche ursprünglich die Benennung der Zahlen bildeten, sondern man kann in kürzester Weise, wie folgt, zu werke gehen:

Denkt man sich (bei zwei verschiedenen Anordnungen der Glieder einer Summe) diese Glieder in ihrer Urform, als Summen von Einern, geschrieben und die Additionen ausgeführt, so sieht man, dass eine verschiedene Anordnung dieser *Glieder* nichts anderes ist, als eine verschiedene Anordnung der *Einer* in der resultirenden Summe; dass aber die letztere ohne Einfluss auf den Werth derselben sein muss, wurde schon in der Einleitung (l. c.) eingehend begründet. —

§ 3. Zweites Gesetz der Addition.

Das zweite Gesetz der Addition sagt aus:

Es ist gleichgültig, in welcher Weise die Glieder einer Summe gruppirt, d. h. noch weiterhin zu besondern Summen (Theilsummen, Partialsummen) *zusammengefasst oder vereinigt werden.* Auch umgekehrt:

Eine Summe von Summen ist gleich der Summe aus den Gliedern der letzteren.

Insoferne die Zahlen später als Maass von Grössen angesehen werden, wird dies zusammenfallen mit dem Satze:

Das Ganze ist nicht allein die Summe seiner Theile, sondern auch die Summe aus den Theilen seiner Theile.

Da die Ordnung der Glieder nach dem ersten Gesetze schon beliebig geändert werden darf, so genügt es, den gegenwärtigen Satz nur unter der Beschränkung auszusprechen, dass bei den verschiedenen Gruppirungen der Glieder die Reihenfolge derselben ungeändert bleibe.

Der Satz enthält dann die folgende rein äusserliche Regel — genauer gesagt — er spricht bezüglich der Einschliessung die Erlaubniss aus:

In jeder Summe darf man eine beliebige Reihe von aufeinanderfolgenden Gliedern mittelst einer Klammer zusammenschliessen. Eine solche Klammer wird natürlich am Anfange des Ausdrucks oder hinter einem Pluszeichen beginnen, und vor einem Pluszeichen oder am Ende des Ausdrucks aufhören. Umgekehrt: *Wo eine solche Klammer steht,*

kann sie auch weggelassen werden, oder braucht man sich bei allen weiteren Rechnungen nicht um dieselbe zu kümmern.

Für den einfachsten Fall, wo die Summe nur *drei* Glieder hat, lässt sich demnach unser Satz durch die Formel ausdrücken:

$$(2) \qquad a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$$

Ebenso ist für eine viergliedrige Summe:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= (a+b)+c+d = a+(b+c)+d = a+b+(c+d) = \\ &= (a+b+c)+d = (a+b)+(c+d) = a+(b+c+d) = \\ &= \{(a+b)+c\}+d = a+\{(b+c)+d\} = \\ &= \{a+(b+c)\}+d = a+\{b+(c+d)\}, \end{aligned}$$

und so weiter.

Zu ermitteln, wie viel verschiedene Darstellungen einer beliebig vielgliedrigen Summe auf diese Weise möglich sind*) und zugleich zu zeigen, wie selbige methodisch gebildet werden können, liegt der Combinationslehre ob.

Wir werden den Satz, nun er richtig verstanden wird, auf die kürzeste Weise so aussprechen:

(A) *Die Gruppirung der Glieder einer Summe ist beliebig.*

Derselbe wird das allgemeine *Associationsgesetz der Addition* genannt (von associare, sich zugesellen). Insbesondre kömmt dieser Name dem letzten Theile der Gleichung (2) zu:

$$(3) \qquad (a + b) + c = a + (b + c),$$

weil es darnach dem mittleren Buchstaben b gewissermassen freisteht, sich mit dem ersten oder mit dem letzten Buchstaben zu associiren.

Die Addition wird eine *associative* Operation genannt, weil sie diese Eigenschaften besitzt.

Geht man von der Anschauungsweise aus, als ob bei der Bildung einer Summe $a + b$ die zweite Zahl b zu der ersten bereits vorhandenen Zahl a erst hinzutrete, so drückt die letzte Formel, von links nach rechts gelesen, folgenden Satz aus:

(B) *Anstatt eine Zahl* [nämlich c] *zu einer Summe* $[a + b]$ *zu addiren, kann man diese Zahl* $[c]$ *auch zu einem Gliede* $[b]$ *der Summe und das Ergebniss* $[b + c]$ *zu dem andern Gliede* $[a]$ *hinzufügen.*

Es scheint allerdings, als ob wir nur berechtigt wären, die Zahl c zu dem *zweiten* Gliede b der Summe $a + b$ zu addiren, nicht aber zu dem ersten. Zu letzterem ist die Erlaubniss in der That nicht direct in unserm Satze enthalten. Wohl aber lässt sich aus demselben in Verbindung mit dem Gesetze (1) eine verwandte Formel ableiten, welche uns auch hiezu berechtigt, sodass wir es also nicht nöthig haben, die genannte Einschränkung dem Gedächtnisse aufzubürden.

---

*) Diese Aufgabe ist, nebst einigen damit verwandten, von mir gelöst worden in einem Aufsatze: „*Vier combinatorische Probleme*“, Zeitschrift für Mathematik und Physik von Schlömilch etc., Jahrg. 1870, pag. 361, nebst Berichtigung dazu, Jahrg. 1871, pag. 179 sqq.

Jene Formel lautet:

$$(4) \qquad (a+b)+c=(a+c)+b,$$

und ergibt sich dieselbe, indem man nach (1), (3) und (1) hat:

$$(a+b)+c=(b+a)+c=b+(a+c)=(a+c)+b;$$

sie stellt, wie man sieht, einen besondern Fall des allgemeinen commutativen Gesetzes (in seiner Verbindung mit dem associativen) vor, und ist — im Gegensatze zu (3) — *symmetrisch*, indem die eine Seite derselben durch Vertauschung zweier Buchstaben in die andere übergeführt werden kann.

Von rechts nach links gelesen und in Worte übersetzt liefert die Formel (3) den Satz:

(C) *Anstatt eine Summe* [$b+c$] *zu einer Zahl* [a] *zu addiren, kann man auch die Glieder* [b *und* c] *der Summe nacheinander* (*oder fortschreitend*) *zu dieser Zahl* [a] *addiren.*

Wir werden überhaupt, falls mehrere Zahlen $a, b, c, \ldots$ durch Rechnungen miteinander verknüpft werden sollen, sagen, dies geschehe *fortschreitend*, oder die folgenden Zahlen $b, c, d, \ldots$ würden *hintereinander* mit der ersten a durch die bezüglichen Rechnungen verknüpft, wenn zuerst a mit b verknüpft wird, und hierauf nicht mehr a selber, sondern dieses Ergebniss mit c verknüpft wird, und so fort, wenn also stets das letzte Ergebniss mit der nächstfolgenden Zahl verknüpft zu denken ist. Soll hingegen eine Zahl a erst mit b, dann wieder a selbst mit c, und a mit d und so weiter einzeln verknüpft werden, so ist das „Nacheinander“ jedenfalls unwesentlich, indem diese Geschäfte sehr wohl auch gleichzeitig von mehreren Personen ausgeführt werden könnten, und soll darum in solchen Fällen der besprochene Ausdruck nicht gebraucht werden.

[Desgleichen wird man sagen können, dass die Zahlen einer Reihe *rückschreitend* zu verknüpfen seien, sobald man sie, in umgekehrter Ordnung genommen, fortschreitend verknüpft denkt.]

Indem man nun von dieser Benennung Gebrauch macht, kann man auch den ersten unsrer beiden Sätze noch in etwas andrer Weise, wie folgt, aussprechen:

(D) *Sollen* (zu einer Zahl andre) *Zahlen nacheinander addirt werden, so kann man auch statt dessen die Summe derselben auf einmal* (zu jener Zahl) *addiren.*

Zufolge der vorhin eingeschalteten Bemerkung ist es auch *gleichgültig, in welcher Ordnung die gegebenen Zahlen nacheinander addirt werden.*

Alle diese Sätze aber werden nicht allein für zwei oder drei, sondern ganz unumschränkt für beliebig viele Zahlen Gültigkeit haben.

Um das Associationsgesetz allgemein zu begründen, erinnere man sich daran, dass, nach der zu Anfang gegebenen Definition der Ad

tion selbst, in einer jeden als Summe von Einern geschriebenen Zahl es zulässig ist, diese Einer in beliebiger Weise durch Klammern zusammenzufassen. Denkt man sich aber in einer vorgelegten (mehrgliedrigen) Summe die Werthe der Glieder als Summen von Einern eingesetzt, so sieht man, dass eine verschiedenartige Zusammenfassung der Glieder eben nichts anderes ist, als eine verschiedenartige Einklammerung von Einern, und darum ebenso wie diese gestattet.

Wenn gewöhnlich und mit Recht bemerkt wird, dass es bei einer Summe eben nur auf den Inhalt selbst ankomme, nicht aber auf seine Form, auf die Art seiner Entstehung und Bildung, so ist dies immerhin kein *Beweis* des Gesetzes, indem dabei nicht deutlich genug hervortritt, wieso dieses in der aufgestellten Definition der Summe liege. Dasselbe gilt von den Versuchen, das Gesetz durch Beispiele zu erklären, wie etwa, wenn man anführen wollte, dass die Anzahl der in einer Geldkiste enthaltenen Thalerstücke die gleiche bleibt, wie man dieselben auch in Rollen vertheilen und in kleinere Kisten legen mag — oder etwa, wenn man drei Haufen von beziehungsweise a, b und c Nüssen betrachtete, um sich einmal die beiden ersten, dann auch die beiden letzten erst miteinander und dann mit dem dritten vereinigt zu denken, u. s. w.

§ 4. Zusammenfassung beider Gesetze.

Von allen beiden Gesetzen der Addition, welche, nach dem bisherigen, aussagen, *dass die Ordnung und auch die Gruppirung der Glieder eine beliebige ist,* macht man sehr oft gleichzeitig mit grossem Vortheil Gebrauch. Man kann sie zu diesem Zwecke in einen einzigen Satz vereinigen.

Wenn man in einer Reihe von Zahlen deren eine beliebige Menge herausgreift und in beliebiger Ordnung zu einer Summe vereinigt, hierauf diese Summe an ihrer statt in die Reihe einfügt, so erhält man eine neue Reihe von weniger Zahlen als vorhin, auf welche sich das nämliche Verfahren noch weiter anwenden lässt. Thut man dieses nach Belieben, und addirt schliesslich alle Zahlen der letzten so erhaltenen Reihe, bei der man aufhören will, so erhält man stets dieselbe Summe, auf welche Art dieser Additionsprocess auch ausgeführt worden ist.

In dieser Weise lässt sich nun eine 2, 3, 4, 5, 6, ... gliedrige Summe auf respective $2 . 1 = 2$, $6 . 3 = 18$, $24 . 11 = 264$, $120 . 45 = 5400$ und $720 . 197 = 141840$, ... verschiedene Arten bilden und darstellen, wobei der erste Factor die Zahl der Anordnungen oder Permutationen, der zweite die Zahl der Gruppirungen oder Associationen der Glieder angibt.

Hieraus ist denn schon von vornherein zu ersehen, wie freie Wahl man in der Mathematik bezüglich der Mittel haben wird, die zur Erreichung vorgesetzter Zwecke zu Gebote stehen, wie also — einem sehr verbreiteten Vorurtheil entgegen — die Anwendung dieser Wissenschaft keineswegs nach starren Gesetzen erfolgt, durch die alles strenge vorgeschrieben wäre, wie sie vielmehr ganz den

Charakter einer freien Kunst trägt, die sich allerdings gleich jeder anderen durch die Rücksicht auf die Zweckdienlichkeit der verwendeten Mittel wird leiten lassen, im übrigen aber lediglich eingeschränkt ist durch die Forderung der Consequenz, d. h. durch die Forderung, dass man dasjenige halte, was man in reiflicher Ueberlegung freiwillig ausgemacht hat.

§ 5. Zusätze über Ungleichungen.

Aus dem Associationsgesetze der Addition fliesst noch eine wichtige Folgerung mit Bezug auf *Ungleichungen.*

Zunächst ist es wichtig, zu bemerken, *dass jede Ungleichung sich auf eine Gleichung zurückführen lässt.* Ist nämlich:

$$a > b \quad \text{oder} \quad b < a,$$

so heisst dies (laut Definition), dass die Zahl a erhalten werden kann, indem man zu der Zahl b (in ihrer Urform) noch Einer hinzusetzt oder anreiht. Nennen wir die uns unbekannte Summe oder Anzahl dieser noch anzufügenden Einer jetzt u, so geht (laut Definition der Addition) die Zahl a auch dadurch aus der Zahl b hervor, dass man u zu dieser letzteren addirt. Es kann also die obige Ungleichung auch in Gestalt der Gleichung ausgedrückt werden:

$$a = b + u,$$

worin u wie gesagt eine *unbestimmte* Zahl vorstellt, auf deren Werth es uns weiter nicht ankommt, und die, wie später gezeigt wird, den *Unterschied* von a und b oder den *Ueberschuss* von a über b vorstellt.

Umgekehrt, wenn $a = b + u$ ist, so folgt auch $a > b$, d. h.:

(A) *Die Summe ist immer grösser als eines ihrer Glieder*, das Ganze grösser als seine Theile.

Ist nun ebenso $b > c$, also $b = c + u'$, so ergibt sich durch Einsetzung:

$$a = (c + u') + u,$$

oder nach dem Associationsgesetze:

$$a = c + (u' + u).$$

Die Summe der beiden unbestimmten Zahlen u' und u ist aber selbst wieder eine unbestimmte Zahl, die u'' genannt werden kann, sodass folgt:

$$a = c + u'' \quad \text{oder} \quad a > c.$$

Wir sind damit zu dem Resultate gelangt:

(B) *Wenn $a > b$ und $b > c$, so ist um so mehr* (a fortiori) *auch* $a > c$, und durch fortgesetzte Anwendung dieses Satzes ergibt sich leicht der noch allgemeinere:

(C) *Hat man eine Reihe von Zahlen, von welchen jede grösser ist als die unmittelbar darauf folgende, so ist auch die erste grösser als*

die letzte und überhaupt jede frühere grösser als jede spätere; man hat alsdann eine *abnehmende* Reihe von Zahlen: $a > b > c > d > \cdots$

Derselbe Satz gilt auch — wie dies zufolge der zwiefältigen Ausdrucksweise überhaupt bei allen Sätzen über Ungleichungen der Fall ist — wenn die Worte „grösser" und „abnehmend" durchweg ersetzt werden durch „kleiner" und „zunehmend", und vice versa.

Von jeder Zahl b, die $< a$ und $> c$ ist, wird gesagt, dass sie *zwischen* a und c oder in dem *Intervall* von c bis a (exclusive) *liege.*

Aus dem Associationsgesetze:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

desgleichen aus dem damit ebenbürtigen Satze:

$$(a + c) + b = (a + b) + c$$

kann nach dem obigen auch geschlossen werden:

$$a + (b + c) > a + b,$$

desgleichen:

$$(a + c) + b > a + b,$$

indem hier die unbestimmte Zahl u rechts durch c vertreten ist. Da nun die Summen linker Hand aus der $a + b$ rechts hervorgehen, indem man zu einem Gliede der letzteren die beliebige Zahl c addirt, so liefert uns dies den für die Folge äusserst wichtigen Satz:

(D) *Eine Summe ändert sich, nimmt zu oder ab, wenn irgend eines ihrer Glieder sich ändert, wächst oder schwindet.*

Dies lässt sich ebenso für eine mehrgliedrige Summe beweisen, wie es hier für eine zweigliedrige bewiesen worden ist. Man braucht nur die übrigen Glieder, ohne dasjenige, was man zunehmen lassen will, zu einer Partialsumme zu vereinigen, d. i. in ein einziges Glied zusammenzufassen, und kann alsdann die ganze Summe wie ein Binom behandeln.

Nunmehr sind noch die Sätze, welche sich auf die Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen untereinander (durch die bisher betrachtete Rechnungsart oder Addition) beziehen, hier anzureihen.

In Nummer 18. der Einleitung wurde schon ein Grundsatz aufgestellt, aus welchem hervorgeht, *dass Gleichungen zu einander addirt werden dürfen*, oder wie man gewöhnlich den Satz ausspricht, *dass gleiches, zu gleichem addirt, gleiches gibt.*

Der Addition können in dem ursprünglichen Sinne des Wortes allerdings nur *Zahlen* unterworfen werden, nicht aber *Gleichungen*; doch ist auch das *Addiren etc. von Gleichungen* ein sehr gebräuchlicher Ausdruck geworden, unter welchem man ein zusammengesetzteres Geschäft versteht, nämlich die Addition ihrer linken Seiten, desgleichen die ihrer rechten Seiten, und dann die Gleichsetzung dieser beiden Summen.

Ebenso gilt nun der Satz (der eigentlich nur eine geringfügige Verallgemeinerung des zweitvorigen (D) ist):

(E) *Gleiches, zu grösserem addirt, gibt grösseres,* das heisst, wenn $a > b$, und $a' = b'$, so ist auch: $a + a' > b + b'$.

Der Beweis ergibt sich leicht, indem man aus $a = b + u$ und $a' = b'$ nach dem vorigen Grundsatze schliesst: $a + a' = (b + u) + b'$, also, nach dem Associationsgesetze, $= (b + b') + u$, mithin $> b + b'$.

Endlich ist hier der Satz anzuführen:

(F) *Grösseres, zu grösserem addirt, gibt grösseres,* oder: wenn $a > b$ und $a' > b'$, so ist auch

$$a + a' > b + b'.$$

Beweis. Aus den beiden Gleichungen:

$$a = b + u \quad \text{und} \quad a' = b' + u',$$

folgt wieder:

$$a + a' = (b + u) + (b' + u'),$$

und dies lässt sich nach den beiden Grundgesetzen der Addition auch so schreiben:

$$a + a' = (b + b') + (u + u'),$$

oder, wenn $u + u' = u''$ genannt wird:

$$a + a' = (b + b') + u'',$$

woraus zu ersehen ist, dass in der That: $a + a' > b + b'$.

(G) *Ueberhaupt können Ungleichungen von übereinstimmenden Ungleichheitszeichen addirt werden, indem man ihre linken Seiten, und dann ihre rechten Seiten addirt und die erste Summe mit der zweiten durch das nämliche Ungleichheitszeichen verbindet.*

Auch aus $b < a$ und $b' < a'$ folgt $b + b' < a + a'$.

Solche Ungleichungen werden auch wohl *gleichstimmige* genannt, im Gegensatz zu den *ungleichstimmigen,* wie es zum Beispiel die beiden: $a > b$ und $b' < a'$ sind.

Der letzte Satz gilt übrigens auch für beliebig viele Ungleichungen.

II. Die Addition in recurrenter Behandlung.

§ 6. Begriff von Zahl und Summe.

Indem wir von den bisherigen Ergebnissen jetzt absolut nichts voraussetzen, führen wir die Namen der natürlichen Zahlen ein durch folgende Reihe von Gleichungen:

(5) $\quad 2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad 4 = 3 + 1, \quad 5 = 4 + 1,$ etc.,

die wir uns ins unbegrenzte fortgesetzt denken, so jedoch, dass niemals der Name einer früheren Zahl wiederkehrt.*)

*) Diese unerlässliche Bedingung haben die bisherigen Schriftsteller über diesen Gegenstand (Grassmann, Hankel u. A.) zu erwähnen vergessen. Man

Hierdurch sind die natürlichen Zahlen nun ***recurrirend*** definirt. Man muss nämlich, um die Bedeutung einer Zahl vollständig angeben, das heisst, sie durch die Einheit ausdrücken zu können, von ihr aus auf die vorhergehende Zahl zurückgehen und überhaupt die ganze Reihe rückwärts durchlaufen (recurrere). Um z. B. die Zahl 5 zu bilden, geht man von der Gleichung $5 = 4 + 1$ aus; in sie setzt man rechts den Werth von 4 ein, welchen diese Zahl nach der vorhergehenden Gleichung besitzt, nämlich $3 + 1$; durch die Einsetzung ergibt sich eine neue Gleichung, in welche man den Werth von 3 aus der vorhergehenden Gleichung zu substituiren und in deren Substitutionsergebniss endlich den Werth von 2 aus der ersten Gleichung einzusetzen hat. So hat man successive:

$$5 = [3 + 1] + 1,$$
$$5 = [\{2 + 1\} + 1] + 1,$$
$$5 = [\{(1 + 1) + 1\} + 1] + 1.$$

Wollte man dieses Resultat auf der Stelle erhalten, so müsste man eben die vorhergehenden Zahlen:

$$3 = (1 + 1) + 1,$$
$$4 = \{(1 + 1) + 1\} + 1,$$

schon zuvor gebildet haben.

Ist nun a eine Zahl aus unsrer Reihe:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

so ist auch $a + 1$ eine solche, indem:

$$a' = a + 1$$

die allgemeine Form der Gleichungen (5) ist. Nennt man a', nämlich $a + 1$, die *Summe* aus dem *ersten Glied* a und dem *zweiten Glied* 1 [wovon die Summe aus 1 und a noch streng zu unterscheiden ist], so ist das Wesen der Addition zunächst in einem besondern Falle erklärt. Es ist erklärt, was es heisse, eine Zahl a um 1 vermehren oder die Einheit zu ihr addiren; dies heisst nämlich: den Namen derjenigen Zahl suchen, welche in den Gleichungen (5) dem Ausdruck $a + 1$ gleichgesetzt ist.

Da also der Begriff der Addition feststeht für zwei Zahlen, deren zweite gleich 1 ist, so kann man diesen Begriff nun allgemein für

---

könnte indessen durch Festsetzung einer Wiederkehr von einzelnen Ziffern in der Zahlenreihe (5) ein neues Zahlensystem begründen, welches eigenthümlichen Gesetzen unterworfen wäre, und sich in gewisser Hinsicht geometrisch durch die Punkte einer geschlossenen Curve, eines Kreises repräsentiren liesse, sodass sich vielleicht der Name „*cyklische* oder *Circular-Zahlen*“ dafür empfehlen würde.

zwei beliebige Zahlen erklären, indem man definitionsweise für ganz beliebige Werthe von a und b die Gleichung festsetzt:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1. \tag{6}$$

Diese Gleichung — [wie man sieht, nur ein besondrer Fall des Associationsgesetzes im vorigen Abschnitt] — enthält in der That eine *recurrente* Definition der Summe irgend zweier Zahlen. Sie gibt zwar nicht unmittelbar an, was eine solche Summe bedeutet; sie führt aber das Verständniss der Summe aus a und $b + 1$ zurück auf das der Summe von a und b. Denn wenn $a + b$ eine bekannte Zahl unsrer Zahlenreihe ist, so haben wir schon gesehen, dass auch $(a + b) + 1$ eine solche sein muss; dann wird also die linke Seite der Gleichung (6) wirklich durch die rechte Seite derselben erklärt.

Nun ist aber $a + 1$ eine schon bekannte Zahl unsrer Reihe. Nimmt man also in (6) zunächst $b = 1$ an, so ist:

$$a + (1 + 1) = (a + 1) + 1,$$

oder weil $1 + 1 = 2$ ist:

$$a + 2 = (a + 1) + 1,$$

darum auch eine bestimmte Zahl unsrer Reihe. Ferner ist, wenn $b = 2$ gesetzt wird:

$$a + (2 + 1) = (a + 2) + 1, \quad \text{oder:} \quad a + 3 = (a + 2) + 1,$$

wo $a + 2$ und daher auch $(a + 2) + 1$ oder $a + 3$ eine völlig bestimmte Zahl unsrer Reihe ist, und so fort.

Nach der Formel (6) ist daher endlich jede Summe zweier Zahlen eine ganz bestimmte Zahl der Reihe (5). Eine solche Summe kann man auf diesem Wege auch wirklich unzweideutig ermitteln durch ein recurrirendes Verfahren, welches rein mechanisch vor sich geht. Um z. B. $7 + 5$ zu ermitteln, hat man:

$$\begin{aligned}
7 + 5 &= 7 + (4 + 1) = (7 + 4) + 1, \\
7 + 4 &= 7 + (3 + 1) = (7 + 3) + 1, \\
7 + 3 &= 7 + (2 + 1) = (7 + 2) + 1, \\
7 + 2 &= 7 + (1 + 1) = (7 + 1) + 1, \\
7 + 1 &= 8,
\end{aligned}$$

also $7 + 2 = 8 + 1 = 9$, $7 + 3 = 9 + 1 = 10$, $7 + 4 = 10 + 1 = 11$, $7 + 5 = 11 + 1 = 12$, was zu finden war. —

Aus dem bisherigen ergibt sich zugleich, dass die Addition, wie man sich ausdrückt, eine *eindeutige* Operation ist, indem die Summe zweier Zahlen nicht mehrere Werthe, sondern nur *einen* ganz bestimmten Werth haben kann. Diese Summe ist nämlich *definirt* durch einen einzigen ganz unzweifelhaft vorgeschriebenen Weg zu ihrer Bildung.

Die Summe zweier Zahlen kann niemals dem ersten Gliede gleich sein, denn um sie zu bilden, mussten wir vom ersten Gliede aus in der Zahlenreihe (5) vorwärts gehen, und wir haben angenommen, dass in dieser Zahlenreihe eine frühere Zahl niemals wiederkehrt. Jede Zahl aber, die in der Reihe (5) später auftritt als eine andere, wird jetzt *grösser* als diese zu nennen sein. Ueberdies nimmt die Summe um eine Einheit zu, wenn das zweite Glied um 1 wächst. Hieraus, sowie aus den noch folgenden Gesetzen, wird man wieder mit Leichtigkeit ersehen, dass überhaupt eine Summe stets verschieden davon und grösser ist als eines ihrer Glieder, und dass sie sich stets ändert, wenn sich einer der Summanden ändert — sodass wir auf diesen Punkt nicht mehr zurückzukommen brauchen. (Grassmann, Hankel l. c.) —

§ 7. Das Associationsgesetz für Trinome.

Ich gehe nun dazu über, das Associationsgesetz für die Addition, wie es die Formel ausspricht:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \tag{7}$$

allgemein zu beweisen. Zu diesem Zwecke kann man eine Ueberlegung ausführen, welche von vielfältiger Anwendung in der ganzen Mathematik und unter dem Namen der *vollständigen Induction* (*Schluss von* n *auf* $n+1$, *Bernoulli'scher Inductionsschluss*, nach andern auch *Kästner'sches Verfahren*) bekannt ist.

Zuerst nämlich beweist man, dass wenn die Formel (7) für einen bestimmten Werth von c richtig ist, sie auch für den nächst höheren $c + 1$ gelten muss.

Findet in der That die Formel (7) für ein gewisses c statt, so ergibt sich durch zweimalige Anwendung von (6):

$$a + \{b + (c + 1)\} = a + \{(b + c) + 1\} = \{a + (b + c)\} + 1.$$

Nach (7) aber ist dies gleich $\{(a + b) + c\} + 1$, also nach (6) gleich $(a + b) + (c + 1)$, sodass gefunden ist:

$$a + \{b + (c + 1)\} = (a + b) + (c + 1).$$

Gilt also das associative Princip in Gestalt der Gleichung (7) für eine gewisse Zahl c, so gilt es auch, wenn c durch $c + 1$ ersetzt wird.

Nun überlegt man weiter, dass die Formel (7) jedenfalls erfüllt ist, wenn c den Werth 1 hat, da sie alsdann auf (6) hinaus kommt.

Gilt sie aber für $c = 1$, so muss sie nach dem eben bewiesenen Satze auch für $c = 1 + 1 = 2$ richtig sein; ist letzteres der Fall, so muss die Formel nach demselben Satze auch für $c = 2 + 1 = 3$ gültig

bleiben, woraus wieder ihre Gültigkeit für $c = 3 + 1 = 4$ folgt, und so weiter. Da durch successive Addition von 1 alle Zahlen erhalten werden, so muss also das associative Princip (7) für jeden Werth von c, mithin allgemein gültig sein. —

Da nun in dem Ausdruck:

$$a + b + c,$$

welcher nach dem in gegenwärtiger Untersuchung adoptirten Standpunkte für sich noch keinen Sinn besitzt (indem die Addition erst für *zwei* Zahlen erklärt wurde), eine Klammer nur auf zwei Arten gesetzt werden kann, nämlich auf die beiden in (7) angegebenen Arten, und da es sich nach (7) für das Resultat einerlei gezeigt hat, auf welche dieser beiden Arten sie gesetzt werden soll, so braucht man nicht mehr ausdrücklich anzugeben, *wie* die Klammer angebracht werden soll; man kann dieselbe als überflüssig weglassen, und den Ausdruck $a + b + c$ eine Summe *aus drei* Gliedern in der Reihenfolge a, b, c nennen.

Unter der dreigliedrigen Summe $a + b + c$ verstehen wir also lediglich das übereinstimmende Ergebniss der beiden in Gleichung (7) linker oder rechter Hand vorgeschriebenen Additionen von zwei Zahlen. (Grassmann, Hankel, l. c.)

§ 8. Das Associationsgesetz für Polynome.

Es erübrigt zu beweisen, dass sich ebenso auch der Begriff einer $n$gliedrigen Summe allgemein feststellen lässt.

Verbindet man zunächst vier Zahlen a, b, c, d in dieser bestimmten Reihenfolge durch das Zeichen $+$, so kann darunter eine der drei folgenden zweigliedrigen Summen verstanden werden, deren Gleichheit nachzuweisen ist:

$$(a + b + c) + d = (a + b) + (c + d) = a + (b + c + d),$$

wobei die dreigliedrigen Summen auf die einfachste Art, nämlich ohne Klammern, geschrieben sind.

In der That ergibt sich durch mehrmalige Anwendung des Associationsgesetzes (7):

$$\begin{aligned}(a + b + c) + d &= \{(a + b) + c\} + d = (a + b) + (c + d)\\ &= a + \{b + (c + d)\} = a + (b + c + d).\end{aligned}$$

womit der verlangte Beweis für viergliedrige Summen geleistet ist. Man kann das Resultat dieser Rechnungen nun auch als dreigliedrige Summe schreiben, wie folgt:

$$(a + b) + c + d = a + (b + c) + d = a + b + (c + d),$$

da eine dreigliedrige Summe nichts anderes ist, als eine zweigliedrige, bei welcher es freigestellt ist, auf welche der beiden möglichen Arten man sie bilden will, und es darf nun endlich jede Klammer weggelassen und für alle diese Ausdrücke geschrieben werden:

$$a + b + c + d,$$

was fortan eine *viergliedrige* Summe heissen möge. —

Hat man allgemein eine Reihe R von n in bestimmter Ordnung aufeinanderfolgenden Zahlen:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n,$$

wobei selbstverständlich $m < n$ gedacht ist, so ist die allgemeinste Art, diese Zahlen durch wiederholte Anwendung einfacher, d. h. nur auf zwei nebeneinander stehende Zahlen bezüglicher Additionen zu einer Summe zu vereinigen, folgende. Man greife aus der Reihe R irgend zwei benachbarte Zahlen nach Belieben heraus, und bilde ihre Summe. Die Summe dieser beiden Zahlen ist eine Zahl, welche zwischen die der ersteren Zahl vorausgehenden und die der letzteren nachfolgenden Zahlen eingereiht werden soll. Sie bildet dann mit diesen übrigen Zahlen eine neue Reihe von nur $n - 1$ Zahlen, welche wir R_1 nennen wollen, sodass R_1 eine Zahl weniger als R enthält. Indem man wieder ganz nach Belieben zwei nebeneinander stehende Zahlen aus der Reihe R_1 zu ihrer Summe vereinigt, und diese an der betreffenden Stelle zwischen den übrigen einreiht, welche unverändert bleiben, erhält man eine Reihe R_2 von Zahlen, deren Anzahl $[n - 2]$ um zwei geringer ist als die der ursprünglich gegebenen Zahlen. Fährt man so fort, so wird man zuletzt zu einer Reihe $[R_{n-2}]$ von zwei, und dann zu einer einzigen Zahl $[R_{n-1}]$ gelangen, und der zu beweisende Satz besteht darin, dass diese am Ende des Processes sich ergebende Zahl immer dieselbe sein wird, auf welche Art man auch — innerhalb der vorgeschriebenen Schranken — die einzelnen einfachen Additionen ausführen mag.

Um dies zu zeigen, wenden wir die vollständige Induction an, d. h. wir nehmen an, der Satz sei richtig, wenn die Anzahl der ursprünglich gegebenen Zahlen oder Glieder kleiner als n, also gleich $1, 2, 3, \ldots$ oder $n - 1$ ist, und beweisen, dass der Satz dann auch für die nächst grössere Anzahl von Gliedern, nämlich n selbst, gültig sein muss.

Ist der Satz für weniger als n Zahlen richtig, so ist der Begriff einer Summe von weniger als n Gliedern bereits klargestellt, und können in einer solchen jedesmal alle Klammern weggelassen werden. Es handelt sich dann darum, zu zeigen, dass wenn man die Zahlen unsrer $n$gliedrigen Reihe (ohne die Ordnung derselben zu stören) auf

irgend eine Art in zwei Gruppen scheidet, von jeder Gruppe die Summe bildet, welche, da sie weniger als n Glieder hat, bereits unzweideutig erklärt ist, wenn man endlich beide Summen addirt, stets das gleiche Resultat herauskommen muss, dass also:

$$(8)\quad \begin{cases} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1}) + a_n = \\ = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2}) + (a_{n-1} + a_n) = \\ = \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ = (a_1 + a_2) + (a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) = \\ = a_1 + (a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) \end{cases}$$

sein muss. Auch dieser Nachweis ist durch den vollständigen Inductionsschluss geführt, wenn man zeigt, dass man ein Glied der einen Gruppe zur andern schlagen darf, sodass das letzte Glied der ersteren Theilsumme zum ersten Glied der letzteren Theilsumme wird, oder dass:

$$(9)\quad \begin{cases} (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m) + (a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n) \\ = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n) \end{cases}$$

sein muss. Denn durch diesen Process kann der erste von den obigen Ausdrücken (8) successive in die folgenden übergeführt werden.

Denkt man sich nun in der ersten Zeile von (9) die ersten $m-1$ Glieder der ersten Summe zu einer einzigen Zahl zusammengefasst, was gestattet ist, da die Bildungsweise dieser Summe beliebig, und betrachtet man auch die zweite Summe als eine einzige Zahl, so kann man das Associationsgesetz (7), welches für drei Zahlen gilt, anwenden, und erhält als Werth der ersten Zeile von (9):

$$\{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + a_m\} + (a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + \{a_m + (a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n)\};$$

der letztere Ausdruck ist aber einerlei mit der zweiten Zeile von (9) und damit ist diese Gleichung erwiesen. [Derselbe Schluss ist offenbar auch zulässig, wenn die zweite Klammer in der ersten Zeile, oder die erste Klammer in der zweiten Zeile von (9) nur ein einziges Glied enthält, wenn sie also von Anfang an fehlte, oder zuletzt fortzulassen sein wird.]

Wir können demnach das associative Princip bei der Addition in seiner Ausdehnung auf mehrgliedrige Summen jetzt allgemein als erwiesen ansehen; denn da es für drei- und viergliedrige Summen gilt, so muss es nach dem obigen auch für fünfgliedrige, dann ferner für sechsgliedrige Summen gelten, und so weiter ohne Ende fort.

Beachtenswerth ist dabei, dass das Associationsgesetz für mehrere Zahlen geradezu als eine Consequenz hervorging aus demjenigen für drei Zahlen — eine Bemerkung, die uns auch bei andern Operationen zu gute kommen wird. —

§ 9. Das Commutationsgesetz für Binome.

Ich gehe jetzt zum Beweise des Commutationsgesetzes über, welches als eine Folgerung aus dem Associationsgesetz (6) oder (7) hingestellt werden kann. [Bei andern Operationen, die, ebenso wie die Addition, associativ sind, wird eine derartige Folgerung keineswegs zulässig sein, weil dann die Operationszeichen nicht mehr mit denen übereinstimmen, welche in der Definition (5) der Zahlenreihe figuriren.]

Zuerst lässt sich zeigen, dass wenn die Gleichung:

$$1 + a = a + 1 \tag{10}$$

für eine bestimmte Zahl a richtig ist, sie auch gelten muss, wenn man die nächst höhere Zahl $a + 1$ an Stelle von a schreibt. In der That ist nach (6):

$$1 + (a + 1) = (1 + a) + 1,$$

und dieses nach (10) $= (a + 1) + 1$, wie zu zeigen war. Da nun die Gleichung (10) offenbar für $a = 1$ erfüllt ist, so muss sie nun für $a = 2, 3, \ldots$ und nach dem Schluss der vollständigen Induction allgemein für jede Zahl a gelten.

Es sei nun die Gleichung:

$$a + b = b + a \tag{11}$$

für einen bestimmten Werth von b — bei beliebigem a — richtig; dann muss sie auch gelten, wenn $b + 1$ an Stelle von b geschrieben wird, denn nach (6), (11), (6) und (10) ist:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 = (b + a) + 1 = b + (a + 1) = b + (1 + a),$$

also nach (7):

$$a + (b + 1) = (b + 1) + a,$$

wie behauptet worden. Da nun die Gleichung (11) für jeden Werth von a erfüllt ist, wenn $b = 1$, so muss sie es zugleich auch für $b = 2, 3, \ldots$ und nach dem Schluss der vollständigen Induction für jedes b sein. —

§ 10. Das Commutationsgesetz für Polynome.

Das jetzt für zweigliedrige Summen allgemein bewiesene commutative Princip lässt sich ferner leicht auch auf mehrgliedrige Summen ausdehnen.

Der Beweis, dass in jeder $n$gliedrigen Summe die Reihenfolge der Summanden beliebig ist, wird geleistet sein, wenn man darthun kann, dass in einer solchen Summe *zwei beliebige Glieder miteinander vertauscht werden dürfen.* Denn durch fortgesetzte Vertauschung von jedesmal nur zwei Gliedern wird man jede gegebene Ordnung von

Gliedern herstellen können: man vertausche einfach nach der Reihe das erste, zweite, dritte, ... Glied immer mit demjenigen unter den auf dasselbe folgenden Gliedern, welches an dessen Stelle treten soll.

Nun lassen sich in der That zwei *benachbarte* Glieder stets miteinander vertauschen, weil ja nach dem associativen Princip dieselben auch zu einer zweigliedrigen Summe zusammengefasst werden können, worauf man zu ihrer Vertauschung auf Grund von (11) berechtigt ist, und weil endlich nach vollzogener Vertauschung die sie verbindende Klammer wieder weggelassen werden darf. In Zeichen, weil:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n =$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + (a_m + a_{m+1}) + a_{m+2} + \cdots + a_n =$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + (a_{m+1} + a_m) + a_{m+2} + \cdots + a_n =$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_{m+1} + a_m + a_{m+2} + \cdots + a_n.$$

Eine Vertauschung von *irgend zwei* Gliedern kann aber durch fortgesetzte Vertauschung benachbarter Glieder zu wege gebracht werden. Sollen z. B. die Glieder a_m und a_r miteinander vertauscht werden, welche unter der Annahme $r > m$ in der Reihe:

$$\cdots a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{r-2} + a_{r-1} + a_r + \cdots$$

aufeinander folgen, so vertausche man a_m so lange mit jedem unmittelbar darauf folgenden Gliede, bis es direct hinter a_r zu stehen kommt. Dies geschieht durch die Reihe von $[r - m]$ Transformationen:

$$\cdots a_{m+1} + a_m + a_{m+2} + \cdots + a_{r-2} + a_{r-1} + a_r + \cdots$$
$$\cdots a_{m+1} + a_{m+2} + a_m + \cdots + a_{r-2} + a_{r-1} + a_r + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots + a_m + a_{r-1} + a_r + \cdots$$
$$\cdots a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots + a_{r-1} + a_m + a_r + \cdots$$
$$\cdots a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots + a_{r-1} + a_r + a_m + \cdots$$

Hierauf vertausche man das Glied a_r so lange mit jedem unmittelbar links vorhergehenden, bis es dicht vor a_{m+1} zu stehen kommt, was durch die Folge von $[r - m - 1]$ Umformungen bewirkt wird:

$$\cdots a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots + a_r + a_{r-1} + a_m + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots a_{m+1} + a_{m+2} + a_r + \cdots + a_{r-2} + a_{r-1} + a_m + \cdots$$
$$\cdots a_{m+1} + a_r + a_{m+2} + \cdots + a_{r-2} + a_{r-1} + a_m + \cdots$$
$$\cdots a_r + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{r-2} + a_{r-1} + a_m + \cdots$$

Dann erscheinen in der That a_m und a_r miteinander vertauscht, während die zwischenliegenden Glieder und ihre Reihenfolge dieselben

geblieben sind und doch immer nur benachbarte Glieder ihren Platz gewechselt haben.

Mithin ist die Addition auch bei mehreren Summanden commutativ. Wenn wir jedoch zurückblicken, so bemerken wir, dass dieses allgemeine Commutationsgesetz keineswegs eine Folgerung aus dem speciellen (11) allein gewesen ist, sondern dass sich dasselbe wesentlich auch auf das allgemeine associative Princip stützt, und erst dem Miteingreifen dieses letzteren seine Begründung verdankt. —

In Bezug auf einen kürzeren, wenn auch weniger instructiven Beweis des allgemeinen Commutationsgesetzes vergleiche § 22., VII.

III. Die Multiplication in independenter Behandlung.

§ 11. Grundbegriffe.

Von der Addition wird man zu der nächst höheren Rechnungsart der Algebra, nämlich zu der *Multiplication* geführt, indem man eine gewisse *Erfahrung* macht. Man bemerkt nämlich, dass unter den Summen, die sich bei verschiedenen Untersuchungen zur Berechnung darbieten, besonders häufig solche vorkommen, deren Glieder sämmtlich einander *gleich* sind.

Es ist anzurathen, dass man sich an Beispielen überzeuge, wie ausserordentlich mühsam und darum unsicher die Berechnung einer derartigen Summe wird, ja wie umständlich und langweilig es schon ist, sie nur auszusprechen; man versuche beides etwa mit einer Summe, welche aus nur 100 Gliedern besteht, deren jedes z. B. gleich 37 ist.

Es wird daher das Bedürfniss rege, dergleichen Summen einerseits abgekürzt zu bezeichnen, andererseits auch, sie schneller ausrechnen zu lernen als es durch wirkliche Addition der Glieder möglich ist. Letzteres ist eine Aufgabe der gemeinen Arithmetik, die wir erst später lösen werden, da man die allgemeinen Eigenschaften einer Operation schon kennen muss, wenn man in den Stand gelangen will, ihre Ausführung zu begreifen. Das erstere geschieht in folgender Weise.

Eine Summe aus lauter gleichen Gliedern wird ein Product genannt. Sie wird abgekürzt als ein solches geschrieben, indem man das sich wiederholende Glied nur *ein* mal setzt, und neben (hinter) dasselbe, mit dem Zeichen $\times$ oder $\cdot$ (*mal*) verbunden, den Namen der Zahl schreibt, welche angibt, wie oft es als Summand vorgekommen ist, also wie oft es eigentlich in additiver Verknüpfung zu denken wäre. Man pflegt das Mal-Zeichen auch ganz wegzulassen, falls es nicht gerade zwischen zwei Ziffern steht, da das Nebeneinanderstellen von Ziffern in der gemeinen Arithmetik in einem andern Sinn, nämlich zu der dekadischen Darstellung der Zahlen gebraucht wird.

Die obige Definition des Productes wird demnach allgemein durch die Formel ausgedrückt:

$$(12) \qquad \underset{\frown}{a}_{1} + \underset{\frown}{a}_{2} + \underset{\frown}{a}_{3} + \cdots + \underset{\frown}{a}_{b} = a \times b = a \,.\, b = ab$$

[sprich: erstes a plus zweites a plus drittes a plus und so weiter bis zum b^{ten} a ist gleich a mal b], und kann man umgekehrt auch sagen:

Unter einem Product $a \,.\, b$ *ist* unabänderlich *eine Summe aus* b (gleichen) *Gliedern* a *zu verstehen.*

Zum Beispiel $3 \,.\, 4$ bedeutet die Summe $3 + 3 + 3 + 3$, welche aus vier Gliedern 3 besteht; $3b = 3 \,.\, b$ bedeutet ebenso eine Summe aus b Gliedern, welche sämmtlich 3 sind, nämlich: $\underset{\frown}{3}_{1} + \underset{\frown}{3}_{2} + \cdots + \underset{\frown}{3}_{b}$; ferner $a \,.\, 4$ bedeutet $a + a + a + a$. Auch in $2 \times (3 + 4) = 2(3 + 4)$ kann das Multiplicationszeichen unterdrückt werden; keineswegs jedoch in $4 \,.\, 3 = 4 + 4 + 4$, weil diese Summe den Werth 12 und nicht den Werth 43 hat.

Die Rechnung, durch welche das Product ab — oder, wie man es auch nennt, das Product *aus a in b* — gefunden wird, heisst *Multiplication*; man sagt: die Zahl a werde mit b *multiplicirt* (vervielfältigt), oder b *mal genommen*. Die erste Zahl, nämlich der sich wiederholende Summand a, heisst der *Multiplicand* des Productes; die zweite Zahl b, welche angibt, wie oft der Multiplicand als Glied zu denken ist, heisst der *Multiplicator* dieses Productes. Man nennt auch wohl b den *Coëfficient* (Mitfactor) von a in dem Producte ab, ohne es jedoch mit dieser Benennung allzu genau zu nehmen (vergleiche z. B. § 15. und 17., Anmerkung). —

Der Anfänger hat sich zu hüten vor der Verwechselung der Ausdrücke: „um etwas vermehren" und „mit etwas vervielfältigen"; zum Beispiel a, um b vermehrt, gibt $a + b$, dagegen mit b vervielfältigt wird es ab; desgl. ist die Zahl $a + b$ *um b grösser* als a zu nennen; hingegen $a \,.\, b$ heisst *b mal so gross* als a. Fehlerhaft wäre für den letzteren Fall die Wortbildung: „b mal grösser" (z. B. $\frac{1}{2}$ mal grösser!). —

Hinsichtlich der obigen Erklärung eines Productes ist noch ein besonderer Fall hervorzuheben. Wenn nämlich der *Multiplicand* die Einheit ist, so ist das Product dem Multiplicator gleich; nach der gegebenen Definition des Productes hat man zum Beispiel:

$$1 \times 4 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

und dieses ist gleich 4 nach dem Begriffe dieser letzteren Zahl selbst, mithin $1 \times 4 = 4$. Ebenso ist allgemein:

$$1 \,.\, a = a,$$

da beide Ausdrücke nichts anderes bedeuten als:

$$\underset{\frown}{1}_{1} + \underset{\frown}{1}_{2} + \underset{\frown}{1}_{3} + \cdots + \underset{\frown}{1}_{a}.$$

Wenn hingegen der Multiplicator gleich 1 angenommen wird, so

erhält man ein Zeichen, welches noch keinen Sinn besitzt, dem wir also einen beliebigen Sinn ertheilen könnten. Denn es würde $a\,.\,1$ strenge genommen bedeuten: „eine Summe aus 1 gleichen Gliedern a“, was nicht nur grammatikalisch, sondern auch logisch betrachtet ein Unsinn ist, indem ursprünglich zur Bildung einer *Summe* wenigstens zwei Glieder erforderlich sind, und man auch, um von *gleichen* Objecten zu reden, deren mehr als *eines* voraussetzen muss.

Wenn wir uns aber der schon ausgesprochenen Definition des Monomiums erinnern und ferner eingedenk sind, dass jede Zahl sich selbst gleich gilt, sowie auch, dass die Eins zu den Zahlen gerechnet wurde, so werden wir uns leicht bewogen sehen, festzusetzen, dass $a\,.\,1$ fortan a selbst bedeuten solle. Zu dieser Definition:

$$a\,.\,1 = a$$

drängt indessen noch viel mächtiger der Umstand hin, dass erst durch sie die nachfolgenden Gesetze der Multiplication eine unbeschränkte Gültigkeit erhalten werden. So namentlich das erste derselben, welches fordert, dass $a\,.\,1 = 1\,.\,a$ sein solle. Da nämlich $1\,.\,a$ ohnehin $= a$ ist, so wird die Formel $a\,.\,b = b\,.\,a$ nur dann allgemein gelten, nur dann nicht für $b = 1$ eine Ausnahme erleiden, die äusserst lästig zu beobachten sein würde, wenn $a\,.\,1$ ebenfalls $= a$ definirt wird. In ähnlicher Weise liesse sich unsere Festsetzung auch durch die anderen Gesetze der Multiplication motiviren. Es bleibt demnach zu merken, dass stets:

$$a\,.\,1 = 1\,.\,a = a \tag{13}$$

zu gelten hat, und wenn wir — etwas vorgreifend, um den Fall sogleich völlig zu erledigen — uns des Namens „Factor“ jetzt schon bedienen, so können wir dies, wie folgt, in Worte fassen:

Wenn der eine Factor eines Productes gleich 1 *ist, so ist das Product gleich dem andern Factor.*

Mit andern Worten: *Der Coefficient* 1 *braucht nicht geschrieben zu werden*; aber auch umgekehrt kann man denselben einer jeden Zahl nach Belieben beifügen; ja nicht selten, nämlich bei manchen Rechengeschäften, gilt es geradezu als Vorschrift: *Wo kein Factor zu sehen ist, hat man in Gedanken den Factor* 1 *zu ergänzen.* Wohl am einfachsten dürfte man sich den Satz in der Fassung einprägen: *Mit* 1 *multipliciren ändert nichts.* —

Von der Multiplication hat man drei Grundeigenschaften kennen zu lernen, von welchen zwei die Multiplication allein angehen und genau den Sätzen über die Addition analog sind; die dritte bezieht sich auf die Verknüpfung von Addition und Multiplication.

§ 12. Das Commutationsgesetz der Multiplication.

Es ist eine erste merkwürdige Eigenschaft der Multiplication, dass stets:

$$a \,.\, b = b \,.\, a \tag{14}$$

ist. Dies heisst in Worten:

Der Werth eines Productes bleibt ungeändert, wenn Multiplicand und Multiplicator desselben miteinander vertauscht werden.

Da man hiernach nicht nöthig haben wird, Multiplicator und Multiplicand von einander zu unterscheiden, indem beide sich verwechseln lassen, ohne dass dieses von Einfluss auf den Werth des Productes wäre, so braucht man dieselben auch in der Benennung nicht mehr zu unterscheiden, und darf ihnen einen gemeinschaftlichen Namen beilegen; man nennt sie die *Factoren* des Productes, und es ist also gleichgültig, welchen Factor man als Multiplicand ansieht, und welchen man zum Multiplicator macht, m. a. W.:

Die Factoren eines Productes dürfen miteinander vertauscht werden.

Dieser Satz, den in concisester Weise die Gleichung (14) ausdrückt, bildet das *Commutationsgesetz für die Multiplication*, welche somit der Addition darin gleicht, dass sie auch eine commutative Operation ist.

Merkwürdig erscheint der Satz hier deshalb, weil auf den ersten Blick die beiden Producte ab und ba eine ganz verschiedene Bedeutung haben; nach unsrer Definition bedeutet nämlich:

$$a \,.\, b = \underset{\frown\atop 1}{a} + \underset{\frown\atop 2}{a} + \cdots + \underset{\frown\atop b}{a},$$

und:

$$b \,.\, a = \underset{\frown\atop 1}{b} + \underset{\frown\atop 2}{b} + \underset{\frown\atop 3}{b} + \cdots + \underset{\frown\atop a}{b}.$$

Die Uebereinstimmung dieser beiden Summen tritt erst zu Tage, wenn man die Glieder derselben sämmtlich in ihre Einheiten zerlegt. Um dieses auszuführen, und damit die Richtigkeit des Gesetzes (14) zu erkennen, wird man am besten gleich von vornherein das nachstehende Schema von b Zeilen aus jedesmal a Einern hinschreiben:

$$\begin{array}{rl}
\overset{1}{\smile}\ \ \overset{2}{\smile}\ \ \overset{3}{\smile}\qquad\quad \overset{a}{\smile} & \\
1 + 1 + 1 + \cdots + 1 & (1 \\
+ 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 & (2 \\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots \\
+ 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 & (b
\end{array}$$

und sich die Aufgabe stellen, die Summe dieser sämmtlichen Einer auf die Form eines Productes zu bringen. Hierbei ist man nun be-

rechtigt, von den Eigenschaften der Addition einen verschiedenartigen Gebrauch zu machen. Fasst man zuerst immer die horizontal nebeneinander stehenden Einer zu einer besondern Summe zusammen, und addirt hernach diese Partialsummen, so ergibt sich der erste der obigen Ausdrücke, welcher $= a \, . \, b$ ist. Fasst man aber zuerst die vertical untereinander stehenden Einer zusammen, so ergibt sich ebenso die zweite Summe, die $= b \, . \, a$ ist. Je nachdem also zuerst die Horizontalreihen (*Zeilen*) oder zuerst die Verticalreihen (*Colonnen*) summirt werden, erhält man entweder ab oder ba, und diese beiden Ergebnisse müssen der ganzen Summe von Einern und folglich auch einander gleich sein, weil die Anordnung des Additionsprocesses beliebig ist.

Höchst einfach gestaltet der Beweis sich für ein Beispiel, wie etwa:

$$\begin{array}{r|l} 3 \, . \, 2 = 3 + & = 1 + 1 + 1 + \\ + 3 = & + 1 + 1 + 1 = \\ \hline & = 2 + 2 + 2 = 2 \, . \, 3. \end{array}$$

Das Rechengeschäft, durch welches man in dem dekadischen Zahlensystem das Product $a \, . \, b$ zweier in eben diesem System gegebenen Zahlen findet, ist ein anderes als dasjenige, wodurch man das ihm gleiche Product $b \, . \, a$ erhält. Dieser Umstand wird benutzt, um die Richtigkeit des Ergebnisses einer Multiplication mittelst einer andern Multiplication zu prüfen, oder um, wie man sagt, die *Probe* einer Multiplication zu machen.

§ 13. Das Associationsgesetz der Multiplication.

Die Multiplication ist auch eine *associative* Operation, indem das Product einer ganzen Reihe von Zahlen unabhängig von der Art ist, wie sie zu einem solchen vereinigt werden.

Um dies, zunächst bei drei Zahlen, einzusehen, kann man so verfahren.

Man schreibe eine Summe aus lauter Gliedern c hin, welche in b Zeilen zu je a vertheilt sein mögen, nämlich:

$$\begin{array}{ll} \overset{1}{\breve{c}} + \overset{2}{\breve{c}} + \overset{3}{\breve{c}} + \cdots + \overset{a}{\breve{c}} & (1 \\ + c + c + c + \cdots + c & (2 \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \vdots \\ + c + c + c + \cdots + c & (b \end{array}$$

und setze sich zur Aufgabe, diese Summe als ein Product darzustellen. Hierbei wird man aber von allen den Freiheiten Gebrauch machen können, welche durch die Gesetze der Addition verbrieft sind.

Zunächst kann man sagen: da die Zahl c in jeder Horizontalreihe a mal als Glied vorkommt, so ist nach dem Grundbegriff der

Multiplication die Summe aller in einer solchen Zeile befindlichen Zahlen gleich

$$\underset{\frown \atop 1}{c} + \underset{\frown \atop 2}{c} + \underset{\frown \atop 3}{c} + \cdots + \underset{\frown \atop a}{c} = c \, . \, a$$

— wobei wir, ohne noch von dem Commutationsgesetze Gebrauch machen zu wollen, den Multiplicanden stets dem Multiplicator voranstellen —; da ferner b solche Zeilen vorhanden sind, so ist die Summe sämmtlicher Zahlen gleich

$$\underset{\frown \atop 1}{ca} + \underset{\frown \atop 2}{ca} + \cdots + \underset{\frown \atop b}{ca} = (ca) \, . \, b \, ,$$

wo jetzt $(c \, . \, a)$ der Multiplicand und b der Multiplicator ist.

Nun können wir aber dieselbe Summe auch auf anderem Wege bestimmen durch die Bemerkung, dass das obige Schema aus a Verticalreihen besteht, deren jede b mal die Zahl c enthält; es ist also die Summe aller in einer solchen Colonne befindlichen Zahlen:

$$\underset{\frown \atop 1}{c} + \underset{\frown \atop 2}{c} + \cdots + \underset{\frown \atop b}{c} = c \, . \, b \, ,$$

und folglich die Totalsumme auch gleich:

$$\underset{\frown \atop 1}{cb} + \underset{\frown \atop 2}{cb} + \underset{\frown \atop 3}{cb} + \cdots + \underset{\frown \atop a}{cb} = (cb) \, . \, a \, .$$

Wir erhalten somit das erste Resultat:

$$(ca) \, . \, b = (cb) \, . \, a \, ,$$

aus welchem sich nebenbei, indem die bisher ganz willkührliche Zahl c gleich 1 angenommen wird, nach (13) von neuem schliessen lässt, dass $a \, . \, b = b \, . \, a$ sein, also das Commutationsgesetz bestehen muss. —

Wir können nun dieselbe Totalsumme sämmtlicher in dem obigen Schema befindlichen Glieder auch noch auf eine dritte Art bestimmen, indem wir abzählen, wie oft der Summand c im Ganzen vorkommt.

Zunächst ist a die Anzahl der in einer jeden Zeile befindlichen Zahlen, und da b solcher Zeilen vorhanden sind, so ist $a \, . \, b$ die Anzahl aller überhaupt aufgeschriebenen Glieder c; doch hätte man ebenso auch zeigen können, dass $b \, . \, a$ diese Anzahl ist.

Vollkommen deutlich muss dies werden, wenn man die ursprüngliche Methode des Zählens anwendet, welche darin besteht, dass man jeden der zu zählenden Gegenstände mit dem Zeichen 1 abbildet — eine Methode, die hier noch dahin abgekürzt werden kann, dass man die zu zählenden Summanden selbst einfach durch Einer ersetzt. Auf diese Weise nämlich erhält man zur Darstellung der Anzahl von Gliedern c offenbar genau das Tableau oder Schema des § 12., an welchem wir dort erstmalig das Commutationsgesetz $ab = ba$ entdeckten.

Die Totalsumme hat also den Werth:

$$c \,.\, (ab) = c \,.\, (ba),$$

sodass nun im ganzen gefunden ist:

$$(ca)b = (cb)a = c(ab) = c(ba)\,.$$

Aus diesen Gleichungen kann man zwei neue Gesetze entnehmen, welche aber insofern von einander abhängig sind, als ein jedes derselben aus dem andern vermittelst des Commutationsgesetzes abgeleitet werden kann.

Um übrigens diese Gesetze endgültig auszusprechen und für das Memoriren zurechtzulegen, erscheint es durch den Geschmack geboten, die Bezeichnung in etwas abzuändern — etwa a die Zahl zu nennen, welche bisher c hiess, und umgekehrt.*) Noch besser werden wir die Buchstaben a, b, c „cyklisch" miteinander vertauschen, d. h. a durch b, b durch c und c durch a ersetzen. Die letzterhaltene Gleichung heisst alsdann:

$$(ab)c = (ac)b = a(bc) = a(cb),$$

und ein erstes Gesetz wird dargestellt durch die Gleichheit der beiden ersten Ausdrücke:

$$(ab)c = (ac)b, \tag{15}$$

was in Worten so ausgesprochen werden kann:

Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge eine Zahl mit (zwei) andern successive multiplicirt wird.

Dasselbe repräsentirt eine Eigenschaft der Multiplication von eigentlich *gemischtem*, theils associativem, theils commutativem Charakter, indem durch die Umordnung oder Vertauschung der Factoren b und c, durch welche die eine Seite der Gleichung in die andre übergeführt werden kann, zugleich eine Andersgruppirung dieser Factoren bewirkt, nämlich einmal a mit b und das andre mal a mit c associirt wird. Da jedoch auf den ersten Blick der commutative Charakter des Gesetzes mehr in die Augen fällt und, äusserlich betrachtet, die Klammer links und rechts den gleichen Platz einnimmt, so will ich dasselbe künftig als *commutatives* Princip bei drei Factoren citiren.

Ein zweites Gesetz liefert die Gleichheit des ersten und dritten Ausdruckes:

$$(ab)c = a(bc), \tag{16}$$

und lautet dasselbe vorwärts gelesen:

Um ein Product mit einer Zahl zu multipliciren, genügt es, einen

---

*) Dass dieses nicht von vornherein ausgeführt wurde, geschah der Bezugnahme auf § 12. zu liebe.

Factor des Productes mit dieser Zahl, und mit dem Ergebnisse dann den andern Factor zu multipliciren, oder auch:

Anstatt eine Zahl mit mehreren (zunächst nur zwei) *andern Zahlen nacheinander zu multipliciren, kann man sie auch auf einmal mit dem Producte derselben multipliciren*, und rückwärts gelesen:

Anstatt eine Zahl mit einem Producte zu multipliciren, kann man dieselbe auch mit den Factoren des Productes nacheinander multipliciren.

Dieses Gesetz heisst das *Associationsgesetz der Multiplication*. Es lehrt uns, dass in beiden Ausdrücken (16) *die Klammer auch gänzlich weggelassen werden darf*, indem es gleichgültig sein wird, auf welche Art man sie gesetzt denkt, und führt uns dasselbe so zu dem Begriff eines Productes $a \,.\, b \,.\, c$ von *drei* in einer bestimmten Ordnung miteinander multiplicirten Zahlen.

Dass in der That die beiden Sätze (15) und (16) mittelst des Commutationsgesetzes (14) auseinander folgen, ist leicht einzusehen, denn nach (14), (15) und dann wieder (14) ist:

$$(ab)c = (ba)c = (bc)a = a(bc),$$

mithin das Associationsgesetz abgeleitet, und ebenso wird von diesem wieder auf den Satz (15) zurückgeschlossen, indem nach (14), (16) und (14):

$$(ab)c = (ba)c = b(ac) = (ac)b$$

sein muss.

Es braucht demnach nur der eine der beiden Sätze (15) und (16) als ein Fundamentalsatz der Multiplication angemerkt zu werden. Wir wählen dazu das Associationsgesetz (16), weil dasselbe die Reihenfolge der Buchstaben unberührt lässt — somit gewissermassen seiner Reinheit halber — wenngleich es nicht, wie die andern zwei bisherigen Gesetze, durch eine symmetrische Formel ausgedrückt erscheint.

Cf. Dirichlet-Dedekind (l. c.).

§ 14. Vereinigung und weitere Ausdehnung beider Gesetze.

Durch Anwendung der beiden Principien, des commutativen sowohl als des associativen, lässt sich nun vollends leicht die Gleichheit nachstehender zwölf Producte nachweisen:

$$a(bc) = b(ca) = c(ab) = a(cb) = b(ac) = c(ba) =$$
$$= (cb)a = (ac)b = (ba)c = (bc)a = (ca)b = (ab)c$$

und kann man dies in folgendem Satze zusammenfassen:

Wenn man von drei Zahlen zwei nach Belieben auswählt und zu ihrem Producte vereinigt, sodann dieses Product und die dritte jener Zahlen miteinander multiplicirt, so hat das entstehende Product stets

denselben Werth, wie man auch die beiden ersten Zahlen ausgewählt haben mag.

Das übereinstimmende Ergebniss aller dieser (zwölf) Berechnungsarten nennen wir schlechthin das *Product der drei* in Rede stehenden *Zahlen,* und diese letzteren nennen wir in gleicher Weise die *Factoren* dieses Productes, da nunmehr keine von ihnen vor den beiden andern einen Vorzug hat. Die Klammern, welche nach dem obigen ganz beliebig gesetzt werden dürfen, und also nur zur Unterscheidung von Werthen gedient haben, die sich schliesslich als nicht verschieden herausstellten, lässt man gänzlich weg, und ergeben sich dadurch noch sechs neue Darstellungen unsres Productes aus drei Factoren, als deren Repräsentanten man für gewöhnlich die alphabetisch geordnete Darstellung $a \, . \, b \, . \, c$ beibehält. —

Es tritt nun die Aufgabe an uns heran, die bisherigen Sätze auf *mehr* als drei Zahlen auszudehnen.

Zu diesem Zwecke könnte man einen Weg einschlagen, der dem vorhin befolgten vollkommen analog ist. Man würde etwa, wenn die zu betrachtenden n Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ genannt werden, sich die Zahl a_1 wiederholt als Summand geschrieben denken und zwar a_2 mal in jeder Zeile. Solcher Zeilen wären a_3 untereinander zu setzen auf jeder Seite; dieser Seiten aber würde man sich a_4 zu einem Buche zusammengebunden denken; a_5 solcher Bücher würden in eine Reihe nebeneinander gestellt ein Fach eines Büchergestelles, a_6 solche Fächer den ganzen Bücherschrank, und je a_7 ebensolche Schränke in a_8 Schichten aufgestellt ein Bibliothekzimmer ausfüllen, u. s. w. u. s. w. Oder kurz und allgemein zu reden: *Man würde sich die Zahl* a_1 *als Glied in einer Mannigfaltigkeit der ersten, zweiten, dritten, vierten, ...* $(n - 1)^{\text{ten}}$ *Dimension fortschreitend* $a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$ *mal reproducirt vorzustellen haben.*

Würde man sich nun die Aufgabe stellen, die Totalsumme dieser sämmtlichen Glieder a_1 in Gestalt eines Productes zu finden, so könnte man durch verschiedenartige Anordnung des Additionsprocesses alle möglichen Bildungsweisen des mit dem Multiplicand a_1 beginnenden Productes der n gegebenen Zahlen gewinnen, etc.

Man durchschaut jedoch diese Methode bereits hinlänglich, um zu erkennen, dass die allgemeine Durchführung derselben sich allzu weitläufig gestalten muss. Ich ziehe daher auf Kosten der Systematik vor, von der bisher gewahrten Reinheit der *independenten* Behandlungsweise etwas zu opfern und einen Compromiss mit der recurrenten Methode zu schliessen, als welchen ich für den so wichtigen Fundamentalsatz der Multiplication im folgenden den eleganten Beweis von Dirichlet (Dedekind l. c.) reproducire.

§ 15. Erweiterte Definition des Productes. Dirichlet's Beweis des Fundamentalsatzes.

Es handelt sich darum — ohne Anwendung eines neuen Principes — zu zeigen, dass ein ähnlicher allgemeiner Satz wie bei drei Zahlen auch für jedes System S von beliebig vielen Zahlen a_1, a_2, a_3, ... gilt.

Die allgemeinste Art, diese Zahlen durch wiederholte Anwendung *einfacher,* d. h. nur auf zwei Zahlen bezüglicher Multiplicationen zu einem der hier in Betracht zu ziehenden Producte zu vereinigen, ist folgende:

Man greife nach Belieben zwei Zahlen aus dem System S heraus, und bilde ihr Product; der aus den übrigen Zahlen des Systems S und aus diesem Product bestehende Zahlencomplex S_1 enthält dann eine Zahl weniger als S. Indem man wieder ganz nach Belieben zwei Zahlen aus S_1 zu ihrem Producte vereinigt und die andern unverändert lässt, erhält man ein System S_2 von Zahlen, deren Anzahl um zwei kleiner ist, als die der ursprünglich gegebenen Zahlen. Fährt man so fort, so wird man zuletzt zu einer einzigen Zahl gelangen, und der zu beweisende Satz besteht darin, *dass diese am Ende des Processes resultirende Zahl immer dieselbe sein wird, auf welche Art man auch die einzelnen einfachen Multiplicationen anordnen mag.*

Um dies zu zeigen, wenden wir die vollständige Induction an, d. h. wir nehmen an, der Satz sei noch richtig, wenn die Anzahl der ursprünglich gegebenen Zahlen oder Factoren (sei es auch nur um 2 oder um 1) kleiner als eine bestimmte Zahl n ist, und beweisen, dass er dann auch für die nächst grössere Anzahl von Factoren — nämlich für n selbst — gültig sein muss.

Gesetzt also, das gegebene System S bestehe aus den n Zahlen:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5, \quad \ldots \, a_n.$$

Alsdann wird man, um eine erste Anordnung zu erhalten, irgend zwei derselben, z. B. a_1 und a_2, auszuwählen und ihr Product $a_1 a_2$ zu bilden haben; der so entstehende Zahlencomplex enthält hierauf nur noch die $n - 1$ Zahlen:

I. $$a_1 a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5, \quad \ldots \, a_n,$$

und folglich ist nach unsrer Annahme das Endresultat von der weitern Anordnung des Processes von jetzt an ganz unabhängig. Bei einer andern Anordnung der ganzen Operation kann daher höchstens dann ein anderes Resultat zum Vorschein kommen, wenn das bei dem ersten Schritte ausgewählte Zahlenpaar von a_1, a_2 verschieden ist, und zwar sind dann von neuem zwei Fälle zu unterscheiden.

Erstens kann es sein, dass bei der zweiten Anordnung zuerst *eine* der beiden Zahlen a_1, a_2, zum Beispiel a_1, mit einer der übrigen a_3,

$a_4, \ldots$, zum Beispiel mit a_3, zu einem Product $a_1 a_3$ vereinigt wird, sodass der nächste Complex aus den $n-1$ Zahlen:

II. $$a_1 a_3, \ a_2, \ a_4, \ a_5, \ldots a_n$$

besteht. Da nun sowohl bei der ersteren wie bei der letzteren Anordnung die auf den ersten Schritt folgenden Operationen keinen Einfluss auf das Endresultat ausüben können, so setze man die erste Anordnung (I) so fort, dass zunächst die beiden Zahlen $a_1 a_2$ und a_3, die zweite (II) so, dass zunächst die beiden Zahlen $a_1 a_3$ und a_2 vereinigt werden. Auf diese Weise entsteht bei der ersten Anordnung zunächst der Complex:

$$(a_1 a_2) a_3, \ a_4, \ a_5, \ldots a_n,$$

bei der zweiten der Complex:

$$(a_1 a_3) a_2, \ a_4, \ a_5, \ldots a_n.$$

Weil nun zufolge des Theorems (15) die beiden Producte $(a_1 a_2) a_3$ und $(a_1 a_3) a_2$ und folglich auch die beiden vorstehenden Complexe identisch sind, so wird, da jeder derselben nur noch $n-2$ Zahlen enthält, bei der ersten wie bei der zweiten Anordnung dasselbe Endresultat auftreten.

Zweitens kann es aber auch sein, dass bei dem ersten Schritt der neuen Anordnung *keine* der beiden Zahlen a_1, a_2, sondern zwei von den übrigen, zum Beispiel a_3, a_4, herausgegriffen werden, sodass zunächst der Complex:

III. $$a_1, \ a_2, \ a_3 a_4, \ a_5, \ldots a_n$$

entsteht. Auch jetzt kann man wieder die auf den ersten Schritt folgenden Operationen bei beiden Anordnungen nach Belieben ausführen; man vereinige daher zunächst bei der ersten Anordnung (I) die Zahlen a_3, a_4, und bei der zweiten Anordnung (III) die Zahlen a_1, a_2; dann besteht *bei beiden Anordnungen* der nächstfolgende Complex aus denselben $n-2$ Zahlen:

$$a_1 a_2, \ a_3 a_4, \ a_5, \ldots a_n,$$

und folglich wird abermals das Endresultat bei beiden dasselbe sein.

Hiermit ist die Allgemeingültigkeit des Satzes bewiesen, denn da er nach den vorhergehenden Theoremen für $n = 2$ und für $n = 3$ gilt, so gilt er nach dem obigen auch für alle Systeme von Zahlen, deren Anzahl 4, 5, 6, ... ist. Das Endresultat heisst auch jetzt wieder *das Product aus den gegebenen Zahlen*, diese letzteren heissen ohne Unterschied die *Factoren* des Productes, und man bezeichnet dasselbe — ohne Anwendung von Klammern — durch das Nebeneinanderschreiben sämmtlicher in beliebiger Ordnung folgenden Factoren.

Ein besondrer Fall dieses Satzes ist der, dass man bei der Bildung des Productes aus beliebig vielen Zahlen oder Factoren, dieselben nach Belieben in Gruppen vertheilen und alle in einer Gruppe enthaltenen Factoren zu ihrem Product vereinigen darf; das Product aus diesen den einzelnen Gruppen entsprechenden Producten wird immer mit dem Producte aller gegebenen Zahlen übereinstimmen, denn offenbar ist diese Bildung selbst eine der verschiedenen möglichen Anordnungen des Processes. So ist z. B.:

$$abcde = (ab)c(de) = (abcd)e = (abc)(de) = \text{etc.}$$

Dieser Theil des Satzes stellt das eigentliche *allgemeine Associationsprincip* vor, wenn dabei, wie in dem eben angeführten Beispiel, die Ordnung der Factoren unverändert gelassen wird.

Ein andrer besondrer Fall des Satzes — schon in der Definition enthalten, zu welcher er uns die Berechtigung geliefert hat — ist der, dass man die Aufeinanderfolge der Factoren beliebig ändern oder diese unter sich vertauschen darf. Wenn dabei die Gruppirung der Factoren, nämlich die Stellung der Klammern, unverändert gelassen wird, so stellt dies das reine *Commutationsprincip* in seiner vollen Allgemeinheit vor.

Der obige allgemeine Satz besteht in der Verschmelzung beider Principien miteinander.

Anmerkung.

Das vorstehende Gesetz wird ungemein häufig angewendet, indem der Rechner sich die darin ausgedrückten Eigenschaften der Multiplication fortwährend zu Nutze macht. Dasselbe schliesst namentlich die *Vorschrift für die Multiplication der Monome* in sich.

An einem Monom lassen sich im allgemeinen mehrere Factoren unterscheiden — sowohl numerische, als auch solche, die Buchstabenausdrücke sind oder wenigstens Buchstaben in solcher Weise enthalten, dass sie nicht ohne weiteres numerisch ausgerechnet werden können. Man darf nun jederzeit die numerischen Factoren von den literalen absondern und durch ihr ausgerechnetes Product ersetzen. Letzteres wird gewöhnlich dem Product der Buchstabenfactoren vorangeschrieben und schlechtweg der *Coefficient des Monoms* genannt. Ebenso machen die zu einem Product vereinigten Buchstabenfactoren den sogenannten *Buchstabenausdruck* desselben aus. Das Monom besteht somit aus einem Coefficienten und einem Buchstabenausdruck.

Zum Beispiel $3 \,.\, 5 = 15$ ist der Coefficient und $ab\,\frac{c^2}{d}$ der Buchstabenausdruck des Monomiums: $3\,ab\,5\,\frac{c^2}{d}$.

Einen (solchen) Coefficienten darf man in der That immer voraus-

setzen, da sich überall der Factor 1 hinzudenken lässt; dagegen ist sehr wohl der Fall möglich, dass gar keine Buchstabenfactoren vorhanden sind.

Es ist nun stets erlaubt und in der Regel vortheilhaft, die Vorschrift zu befolgen:

Sollen Monome miteinander multiplicirt werden, so multiplicire man ihre Zahlencoefficienten und setze hinter das Product (wo möglich in alphabetischer Ordnung) *die sämmtlichen Buchstabenfactoren, die in den Monomen vorkommen.*

Hienach erhält man z. B. die elegantere Darstellung und Vereinfachung:

$$(3\,ab) \times \left(5\,a\,\frac{c}{d}\right) \times (4\,e) = 60\,a\,a\,b\,\frac{c}{d}\,e\,.$$

§ 16. Die Distributionsgesetze.

Um nachfolgend das allzuhäufige Auftreten von Klammern zu vermeiden, schicke ich sogleich die Bemerkung voraus, dass wenn die Multiplication mit der Addition *ohne* Anwendung von Parenthesen verknüpft erscheint, dies stets den Sinn haben soll, dass man sich die Multiplication *zuerst* ausgeführt denkt. Die Klammer hat nämlich nur den Zweck, je die nachstehend untereinander geschriebenen Fälle zu unterscheiden:

$$(a+b)\,.\,c \quad , \quad (a\,.\,b)+c = a\,.\,b+c\,,$$
$$a+(b\,.\,c) = a+b\,.\,c \quad , \quad a\,.\,(b+c)\,,$$

welche die beiden möglichen Arten ausdrücken, auf die — je durch die nämlichen Operationen in der nämlichen Reihenfolge — die drei in bestimmter Ordnung stehenden Zahlen verknüpft gedacht werden können. Diese Klammer kann offenbar für den einen der beiden Fälle erspart werden, und man hat dazu denjenigen gewählt, für welchen wir es angegeben haben. Gerade auf die andern Fälle, wo die Klammer alsdann *nicht* weggelassen werden darf, bezieht sich das nun folgende Distributionsgesetz und lehrt es, wie dieselbe „aufzulösen" sei.

Eigentlich gelten von der Multiplication noch *zwei* Hauptsätze, welche unabhängig von einander bewiesen werden können, aber bei Berücksichtigung des Commutationsgesetzes auf einen einzigen Satz hinauskommen, der den Namen des *vollen distributiven Principes* führt.

Die gedachten beiden Eigenschaften der Multiplication werden in der einfachsten Weise durch die Formeln ausgedrückt:

$$a\,.\,(b+c) = a\,.\,b+a\,.\,c\,, \tag{17}$$

$$(a+b)\,.\,c = a\,.\,c+b\,.\,c\,, \tag{18}$$

und heissen resp. das *erste* und das *zweite Distributionsgesetz* (von distribuere, vertheilen). Der Name rührt daher, weil sich nach diesen Gesetzen ein Factor, mit welchem eine Summe behaftet erscheint, gewissermassen *vertheilt* auf die einzelnen Glieder derselben.

Diese „Vertheilung" ist allerdings von eigenthümlicher Art, indem dabei jedes einzelne von den an der Vertheilung Antheil nehmenden Individuen das nämliche erhält wie die Gesammtheit derselben, und also das Object der Vertheilung sich vervielfältigend in Existenz tritt. Zu vergleichen wäre sie etwa nur mit der Mittheilung eines Gedankens, oder — auf concretem Gebiete — mit der Austheilung von Feuer, an eine Gesellschaft von Personen (wobei jedoch die letzteren Objecte für denjenigen, der sie hergibt, auch nicht verloren gehen). Sollte für einen derartigen Fall der Ausdruck „Vertheilung" auch etwas anfechtbar erscheinen, so ist er doch einmal eingeführt und immerhin nicht ganz unbezeichnend.

Dass nun in der That nach dem Commutationsgesetz der Multiplication eine jede der beiden Formeln (17) und (18) aus der andern folgt, ist unschwer einzusehen. So ist z. B. $a.(b+c) = (b+c).a$, und nach der Formel (18), wenn in dieser einige Buchstaben verändert werden, ist dies gleich $b.a + c.a = a.b + a.c$; es lässt sich also (17) aus (18) ableiten. Aehnlich ist umgekehrt: $(a+b).c = c.(a+b)$ und nach (17) gleich $c.a + c.b = a.c + b.c$. Es verlohnt sich darum nicht der Mühe, indem man Multiplicator und Multiplicand noch fernerhin unterscheidet, die beiden Formeln (17) und (18) mit *verschiedenem* Text auszusprechen. Wir fassen sie gemeinschaftlich, wie folgt, in Worte, und zwar, vorwärts gelesen:

I. *Anstatt eine Summe und eine Zahl miteinander zu multipliciren, kann man auch ein jedes Glied der Summe und die Zahl miteinander multipliciren, und die einzelnen Producte addiren.*

Rückwärts gelesen thut man gut, sich die Formeln in Gestalt des folgenden Satzes einzuprägen:

II. *Wenn die Glieder einer Summe einen gleichen („gemeinschaftlichen") Factor enthalten, so kann man denselben „ausscheiden", d. h. ihn neben eine Parenthese setzen, in welche die Summe der übrigen (der ungleichen oder nicht gemeinsamen) Factoren geschrieben wird.*

NB. Der Ausdruck „gemeinschaftlicher" Factor ist weniger genau als etwa „gleicher" oder „übereinstimmender" Factor; man denke nur, welchen Unterschied es z. B. ausmacht, ob man von Dreiecken mit *gleicher* oder von solchen mit *gemeinsamer* Grundlinie spricht! Indessen ist jener Ausdruck doch so allgemein üblich, dass ich nicht geglaubt habe, ganz von demselben abgehen zu dürfen.

Um nun die beiden Distributionsgesetze zu beweisen, erinnere man sich der Bedeutung des Productes als einer Summe aus gleichen Gliedern, und ferner der beiden Fundamentaleigenschaften der Addition. Alsdann erkennt man, dass:

$$a.(b+c) = \underset{\widehat{1}}{a} + \underset{\widehat{2}}{a} + \underset{\widehat{3}}{a} + \cdots + \underset{\widehat{b}}{a} + \underset{\widehat{b+1}}{a} + \underset{\widehat{b+2}}{a} + \underset{\widehat{b+3}}{a} + \cdots + \underset{\widehat{b+c}}{a} =$$

$$= (\underset{\widehat{1}}{a} + \underset{\widehat{2}}{a} + \underset{\widehat{3}}{a} + \cdots + \underset{\widehat{b}}{a}) + (\underset{\widehat{1}}{a} + \underset{\widehat{2}}{a} + \underset{\widehat{3}}{a} + \cdots + \underset{\widehat{c}}{a}) = a.b + a.c$$

ist, d. h. in Worten: eine Summe von b Gliedern a, vermehrt um

eine Summe von c Gliedern a, ist offenbar eine Summe, die $b+c$ Glieder a enthält; und damit ist der Satz (17) bewiesen.

Ebenso ist:

$$(a+b).c = (\underset{1}{a+b}) + (\underset{2}{a+b}) + (\underset{3}{a+b}) + \cdots + (\underset{c}{a+b}) =$$

$$\begin{aligned} &= a + b + &&(1 \\ &+ a + b + &&(2 \\ &+ a + b + &&(3 \\ &+ \cdots\cdots &&\vdots \\ &+ a + b &&(c \end{aligned}$$

$$= (\underset{1}{a} + \underset{2}{a} + \underset{3}{a} + \cdots + \underset{c}{a}) + (\underset{1}{b} + \underset{2}{b} + \underset{3}{b} + \cdots + \underset{c}{b}) = a.c + b.c,$$

oder in Worten: eine Summe aus c Gliedern $a+b$ kann angesehen werden als eine Summe aus c Gliedern a vermehrt um eine Summe aus c Gliedern b, womit auch der Satz (18) nun bewiesen ist.

Bei dem vorausgehenden Beweise wurde, wie man sieht, nur von dem Associationsgesetz der Addition Gebrauch gemacht, indem nur die Gruppirung der Glieder geändert, nämlich die b ersten und die c letzten zusammengefasst wurden; bei dem letzten Beweise hingegen ist auch das Commutationsgesetz der Addition in Anwendung gekommen, indem man statt der Zeilen zuerst die Colonnen summiren musste.

§ 17. Erweiterung derselben. Ausmultipliciren und Vereinigen.

Die beiden Sätze (17) und (18) sind nun zwar erst für zweigliedrige Summen abgeleitet; sie gelten aber auch für eine mehrgliedrige Summe, indem:

$$(19)\quad a(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) = ab_1 + ab_2 + ab_3 + \cdots + ab_n,$$

$$(20)\quad (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)b = a_1 b + a_2 b + a_3 b + \cdots + a_n b$$

ist. Auch diese beiden Formeln scheinen nur so lange zwei verschiedene Sätze auszudrücken, als man das Commutationsgesetz nicht in Berücksichtigung zieht; um sie in Worte zu kleiden kann geradezu der Text der Sätze I. und II. des vorigen Paragraphen beibehalten werden.

Gebraucht man diese Formeln zum Uebergange von ihrer linken zur rechten Seite, wendet man also den ersten (I) jener beiden Sätze an, so wird dadurch zwar ein gegebenes Product in eine Summe verwandelt, trotzdem aber die Anzahl der bei der Berechnung des Ausdruckes auszuführenden Multiplicationen vermehrt. In Anbetracht, dass die Multiplication eine mühsam auszuführende Operation ist, empfiehlt sich daher dieses Verfahren vorzugsweise nur bei Ausdrücken, mit welchen noch weiter gerechnet, namentlich eine Addition oder

eine Subtraction vorgenommen werden muss — nur dann also, wenn man Hoffnung hegen kann, dass hernach viele von den erhaltenen Gliedern sich mit andern wegheben oder zusammenziehen und so eine Vereinfachung entstehen werde. Das genannte Verfahren heisst „*Ausmultipliciren*".

Die Anwendung der beiden Formeln von rechts nach links, oder des Satzes II., wobei stets Multiplicationen *erspart* werden, heisst „*Vereinigen*", und empfiehlt sich aus dem letzteren Grunde vorzugsweise bei Ausdrücken, die als Endresultate hingestellt werden und für die numerische Ausrechnung bestimmt sind.

Was nun den Beweis der beiden Formeln (19) und (20) betrifft, so könnten dieselben wiederum ganz unabhängig von den Sätzen (17) und (18) auf offenbar ganz dem gleichen Wege bewiesen werden, wie die letzteren. Man übersieht jedoch, dass die Durchführung eines solchen Beweises in Zeichen sich etwas umständlich gestalten würde. Es ist deshalb bequemer, recurrent zu verfahren, indem man sich vergegenwärtigt, dass jede mehrgliedrige Summe sich auf lauter zweigliedrige zurückführen lässt.

Zu diesem Zwecke ist es gut, die Formeln (17) und (18) etwa so auszusprechen:

Wenn der eine Factor eines Productes um eine Zahl zunimmt, so wächst das ganze um das Product dieser Zahl in den andern Factor.

Gelten nun die Formeln (19) und (20) für eine $(n-1)$ gliedrige Summe, sodass:

$$a(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) = ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_{n-1},$$
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})b = a_1 b + a_2 b + \cdots + a_{n-1} b,$$

so müssen sie auch für eine n gliedrige Summe gelten. Denn indem man nach dem Associationsgesetze der Addition die $n-1$ ersten Glieder dieser letzteren zu einer besondern Summe zusammenfasst, kann man sie auch dadurch aus jener $(n-1)$ gliedrigen entstanden denken, dass man diese um ein weiteres Glied, nämlich das letzte der n gliedrigen Summe, zunehmen lässt, und hat man in Zeichen:

$$(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n) = a\{(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + b_n\} =$$
$$(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + ab_n = (ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_{n-1}) + ab_n =$$
$$= ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_{n-1} + ab_n,$$

und ebenso:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n)b = \{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n\}b =$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})b + a_n b = (a_1 b + a_2 b + \cdots + a_{n-1} b) + a_n b =$$
$$= a_1 b + a_2 b + \cdots + a_{n-1} b + a_n b,$$

wie zu beweisen war.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die beiden Gesetze (19) und (20) mit Rücksicht auf (13) auch die Definition des Productes oder die Gleichung (12) als besondern Fall in sich schliessen; zum Beispiel ist:

$$a + a + a + a = a \,.\, 1 + a \,.\, 1 + a \,.\, 1 + a \,.\, 1 = a \,.\, (1 + 1 + 1 + 1) = a \,.\, 4,$$

sodass nun die Distributionsgesetze eigentlich das einzige Mittel sind, welches wir vorerst haben, um, wo es angeht, Summen in Producte, oder umgekehrt, zu verwandeln.

Anmerkung.

Als ganz besondern Fall schliessen die Distributionsgesetze noch die Zwecken der Rechnung dienliche *Vorschrift für die Addition gleichnamiger Monome* in sich.

Monome heissen nämlich *gleichnamig*, wenn sie sich nur durch ihre Coefficienten unterscheiden, in den Buchstabenfactoren aber übereinstimmen; z. B. $3\,ab$ und $5\,ba$ sind gleichnamige Monome. Dagegen sind $3\,ab$ und $3\,ac$ *ungleichnamig.*

Sollen nun ungleichnamige Monome addirt werden, so vermag man zur Vereinfachung des für ihre Summe resultirenden Ausdruckes im allgemeinen keinen Satz anzuwenden und bleibt nichts übrig, als die Monome eben durch das Zeichen der Addition miteinander zu verknüpfen. Z. B. die Summe von $3\,a$ und $4\,b$ lässt sich, solange die Beschaffenheit oder aber die Werthe von a und b nicht irgendwie genauer bekannt sind, nur durch $3\,a + 4\,b$ ausdrücken.

Dagegen hat man die Regel:

Sollen gleichnamige Monome addirt werden, so addire man ihre Coefficienten, und setze neben die Summe einmal den übereinstimmenden Buchstabenausdruck.

Z. B. es ist:

$$2\,a + 3\,a = (2 + 3) \,.\, a = 5\,a,$$

denn die Befolgung dieser Regel ist in der That lediglich ein Ausscheiden jenes Buchstabenausdruckes a als eines gemeinschaftlichen Factors.

Da die Summe der Coefficienten sofort numerisch ausgerechnet werden kann, so ist bei diesem speciellen Fall des Distributionsgesetzes der Nutzen und die dadurch erzielte Vereinfachung der Ausdrücke am evidentesten, daher auch eben dieser Fall von der häufigsten Anwendung. —

§ 18. Verschmelzung der Distributionsgesetze zu der Multiplicationsregel für Polynome.

Die beiden Theile (17) und (18), in welchen sich das distributive Princip bei der Multiplication ausprägt, lassen sich zu einem einzigen

ıtze verknüpfen und dieser sich noch auf mehrgliedrige Summen ısdehnen.

Der Satz lehrt, auf welche Weise zwei Summen miteinander multiplicirt werden können, und wird für den einfachsten Fall durch eine ɜr beiden Formeln ausgedrückt:

$$21)\quad (a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd = ac+ad+bc+bd;$$

r lautet, von links nach rechts gelesen, in Worten:

Anstatt zwei Summen miteinander zu multipliciren, kann man auch edes Glied der einen Summe mit jedem Glied der andern multipliciren ınd die Einzelproducte addiren.

In diesem Sinne dient der Satz dazu, ein Product (von Summen) zu verwandeln in eine Summe (von Producten, welche eben *Einzelproducte* oder *Partialproducte* genannt werden im Gegensatz zu dem ersten, dem *Total-* oder *Gesammtproducte*). Rückwärts kann der Satz auch angewendet werden, um umgekehrt *gewisse Summen in Factoren zu zerlegen*; doch würde es zu umständlich sein, denselben für diesen Zweck in Worte zu fassen.

Der Beweis des Theorems (21) folgt leicht durch zweimalige Anwendung des Distributionsgesetzes, nämlich einmal in seinem ersten, dann in seinem zweiten Theile oder umgekehrt. Betrachtet man anfangs $(a+b)$ als eine einzige Zahl, als ein Monom, und wendet (17) an, hierauf erst (18), so kommt:

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d = ac+bc+ad+bd;$$

ebenso bei der andern Anordnung, wenn erst (18), dann (17) angewendet wird:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac+ad+bc+bd,$$

wie zu beweisen war.

Aehnlich hat man für den allgemeinen Fall mehrgliedriger Summen, wenn wir sogleich die Herleitung in die Formel einschalten, bei der einen Anordnung:

$$(22)\qquad (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)(b_1+b_2+\cdots+b_n) =$$

$$\begin{array}{l|l} =(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)b_1+ & =a_1b_1+a_2b_1+a_3b_1+\cdots+a_mb_1+ \\ +(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)b_2+ & +a_1b_2+a_2b_2+a_3b_2+\cdots+a_mb_2+ \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots & +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)b_n= & +a_1b_n+a_2b_n+a_3b_n+\cdots+a_mb_n, \end{array}$$

und bei der andern Anordnung:

$$(23)\quad (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) =$$

$$\begin{array}{ll} = a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + & = a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_1 b_n + \\ + a_2(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + & + a_2 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_2 b_n + \\ + a_3(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + & + a_3 b_1 + a_3 b_2 + \cdots + a_3 b_n + \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_m(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = & + a_m b_1 + a_m b_2 + \cdots + a_m b_n. \end{array}$$

Um dies in Worten auszusprechen, kann man den obigen Text beibehalten. Der Satz wird die *Multiplicationsregel für Polynome* genannt. Zu seiner Anwendung — dem Geschäft des „Ausmultiplicirens“ — wird es rathsam sein, stets eine bestimmte Ordnung einzuhalten, nämlich das *erste*, *zweite*, *dritte*, ... Glied der einen Summe (des Multiplicanden) *nach der Reihe* mit dem ersten, zweiten, dritten, ... Gliede der andern Summe (des Multiplicators) zu multipliciren. Dabei hat man unter zwei Anordnungen die Wahl, je nachdem man die eine oder die andere Summe zum Multiplicanden macht, welcher, beiläufig gesagt, meist über den Multiplicator geschrieben wird.

Man sieht, dass das Zusammenbestehen oder die Coexistenz der beiden Distributionsgesetze — also das volle distributive Princip — nothwendig die commutative Eigenschaft der Addition involvirt.

Die obigen Gesetze würden sich endlich noch einmal ausdehnen lassen auf die Multiplication von mehr als zwei, von beliebig vielen Polynomen. Ein solches Product kann nach dem bisherigen bereits recurrent ausgeführt werden durch successive einfache Multiplicationen von immer nur zwei polynomischen Factoren, allein man könnte dasselbe auch independent auf einmal entwickeln. Die Darlegung hievon wird jedoch besser bis nach Erledigung der Combinationslehre verschoben. [Vergleiche auch den Anhang gegenwärtigen Bandes.]

§ 19. Gesichtspunkt zu einer andern Behandlung des bisherigen.

Da bei der Herleitung des Distributionsgesetzes weder die associative noch die commutative Eigenschaft der Multiplication berücksichtigt oder vorausgesetzt werden musste, so hätte man jenes Gesetz auch an den Anfang stellen und der Theorie dieser Operation zu Grunde legen können. Alsdann würden nur die beiden Distributionsgesetze auf verschiedene Weise in Worte zu fassen gewesen sein, nämlich etwa:

(19) vorwärts gelesen: *Um eine Zahl mit einer Summe zu multipliciren, kann man dieselbe auch mit den Gliedern der Summe einzeln multipliciren, und die Ergebnisse addiren.*

Rückwärts: *Statt Producte von gleichem Multiplicand zu addiren, kann man auch diesen letzteren mit der Summe ihrer Multiplicatoren multipliciren.*

(20) vorwärts: *Um eine Summe mit einer Zahl zu multipliciren, darf man auch jedes Glied der Summe mit dieser Zahl multipliciren und die Einzelproducte addiren.*

Rückwärts: *Sollen Producte von gleichem Multiplicator addirt werden, so kann man auch die Summe ihrer Multiplicanden mit diesem Multiplicator multipliciren.*

Zwar dürfte die angegebene Vermehrung der Sätze wohl nicht als ein Gewinn anzusehen sein; dafür aber lässt sich die Herleitung der übrigen Gesetze sehr einfach auf diese Distributionsgesetze gründen.

Aus dem Begriff des Productes geht nämlich die Gleichung hervor:

$$a \,.\, b = \underset{\widehat{1}}{a} + \underset{\widehat{2}}{a} + \cdots + \underset{\widehat{b}}{a},$$

und multiplicirt man dieselbe beiderseits mit c, so folgt nach dem Distributionsgesetze (20):

$$(ab)c = \underset{\widehat{1}}{ac} + \underset{\widehat{2}}{ac} + \cdots + \underset{\widehat{b}}{ac},$$

und dies ist nach dem Begriff des Productes wiederum $= (ac)b$, womit der Satz (15) gewonnen ist.

Für $a = 1$ geht daraus das Commutationsgesetz $bc = cb$ hervor.

Scheidet man aber in der vorigen Gleichung auf Grund des Distributionsgesetzes (19) den gemeinschaftlichen Multiplicand a aus, so wird:

$$(ab)c = a(\underset{\widehat{1}}{c} + \underset{\widehat{2}}{c} + \cdots + \underset{\widehat{b}}{c}) = a(cb)$$

und also auch $= a(bc)$, womit dann das Associationsgesetz gewonnen ist.

§ 20. Zusätze über Ungleichungen.

Aus dem Begriff und den vorstehenden Gesetzen der Multiplication, namentlich aus dem Distributionsgesetze gehen wieder Folgerungen in Bezug auf die Ungleichung hervor, welche von ungemeiner Wichtigkeit sind.

Zunächst hat man den Satz:

(A) *Gleiches mit grösserem multiplicirt gibt grösseres*, oder: *Wenn man eine Gleichung mit einer Ungleichung multiplicirt, so geht das Gleichheitszeichen im Ungleichheitszeichen auf.* Wenn

$$a > b \quad \text{und} \quad c = d,$$

so ist auch:

$$a \,.\, c > b \,.\, d.$$

Beweis. Nach § 5. kann die vorausgesetzte Ungleichung in Gestalt der Gleichung geschrieben werden:

$$a = b + u.$$

Daraus entsteht aber durch Multiplication mit der Gleichung $c = d$ nach dem Grundsatze, dass jede Gleichung mit jeder andern multiplicirt werden darf, oder dass gleiches, mit gleichem multiplicirt, gleiches geben muss:

$$ac = bd + ud,$$

oder, wenn $ud = u'$ genannt wird:

$$ac = bd + u',$$

d. h.:

$$ac > bd,$$

q. e. d. Es ist wichtig, den obigen Satz auch in folgender Form auszusprechen, in welcher er zwar im Grunde einerlei damit, oder nur ein specieller Fall davon, dennoch ganz anders klingt.

(B) *Ein Product ändert sich* (*nimmt zu* oder ab), *wenn ein Factor desselben sich ändert* (*wächst* oder abnimmt), d. h. es ist:

$$a \,.\, (b + c) > a \,.\, b$$

und ebenso auch:

$$(a + c) \,.\, b > a \,.\, b.$$

Auch direct geht dies aus den Distributionsgesetzen:

$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c \quad \text{und} \quad (a + c) \,.\, b = a \,.\, b + c \,.\, b$$

hervor, wenn man darin $a \,.\, c = u$, desgleichen $c \,.\, b = u'$ nennt, resp. von den Werthen dieser Producte absieht.

Dasselbe gilt abermals von einem Producte aus mehreren Factoren, da man die sich nicht ändernden oder sich gleich bleibenden Factoren zu einem einzigen Factor oder Partialproducte vereinigt denken kann.

Und ferner gilt der Satz:

(C) *Grösseres, mit grösserem multiplicirt, gibt grösseres,* oder: *Ungleichungen von übereinstimmenden Ungleichheitszeichen* („gleichstimmige" Ungleichungen) *können miteinander multiplicirt werden, indem man das Product ihrer linken Seiten durch das nämliche Ungleichheitszeichen mit dem Product ihrer rechten Seiten verbindet.*

Voraussetzung: $a > b$ und $a' > b'$,

Behauptung: $a \,.\, a' > b \,.\, b'$.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist:

$$a = b + u, \quad a' = b' + u',$$

also nach dem Distributionsgesetze:

$$a \cdot a' = (b + u)(b' + u') = bb' + bu' + ub' + uu' =$$
$$= bb' + (bu' + ub' + uu').$$

Nennt man aber das letzte Glied rechter Hand u'', so ist:

$$a \cdot a' = b \cdot b' + u'',$$

d. h.:

$$a \cdot a' > b \cdot b'$$

q. e. d. Von zwei Ungleichungen ist der Satz leicht auf mehrere auszudehnen.

Bisweilen mögen auch noch die Sätze von Nutzen sein:

(D) *Ein Product ist immer grösser als irgend ein Factor desselben, ausgenommen wenn die andern Factoren sämmtlich gleich* 1 *sind.*

Fasst man nämlich diese letzteren Factoren in einen einzigen zusammen, dessen Werth $n > 1$ sein möge, so ist nach dem Begriff des Productes dieses gleich:

$$a \cdot n = \underset{\frown}{\overset{}{a}}_{1} + \underset{2}{a} + \underset{3}{a} + \cdots + \underset{n}{a} = \underset{1}{a} + (\underset{2}{a} + \underset{3}{a} + \cdots + \underset{n}{a}),$$

oder, wenn man die Summe $\underset{1}{a} + \underset{2}{a} + \cdots + \underset{n-1}{a} = u$ setzt: $a \cdot n = a + u$, mithin:

$$a \cdot n > a,$$

wie zu zeigen war. Nur wenn $n = 1$ ist, hat man $a \cdot 1 = a$ und folgen auf das erste Glied a keine weiteren Glieder mehr, die man zu einer Partialsumme u zusammenfassen könnte.

(E) *Das Product zweier Zahlen ist immer grösser als ihre Summe, ausgenommen, wenn die eine derselben* = 1 *oder wenn beide* = 2 *sind,* d. h. es ist im allgemeinen:

$$a \cdot b > a + b.$$

Beweis. Es sind die Fälle zu unterscheiden: $a \geqq b$ (lies a grösser *oder* gleich b) und $a < b$, deren ersterer ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit angenommen werden kann. Nun ist für $b > 1$:

$$a \cdot b = \underset{1}{a} + \underset{2}{a} + \cdots + \underset{b}{a} = \underset{1}{a} + (\underset{2}{a} + \cdots + \underset{b-1}{a}),$$

und da die letztere, eingeklammerte Summe $= a \cdot (b - 1) \geqq a$ und (den Fall $a = b = 2$ ausgenommen) um so mehr $> b$ ist, so ist hiemit die Behauptung erwiesen.

IV. Die Multiplication in recurrenter Behandlung.

§ 21. Begriff und Gesetze.

Es ist wieder sehr interessant zu sehen, wie sich alle Eigenschaften der Multiplication auf die einfachste und strengste Weise recurrirend ableiten lassen — wozu wir vor allem eine Definition aufstellen müssen.

Multiplication sei eine Operation, für welche

$$a \,.\, 1 = a \tag{24}$$

ist. Da hiemit die Bedeutung eines Productes für den Fall erklärt ist, wo der zweite Factor (Multiplicator) den Werth 1 hat, so brauchen wir, um die Definition eines Productes zu vervollständigen, nur noch anzugeben, wie ein Product von zwei beliebigen Factoren zurückgeführt werden kann auf ein solches mit um 1 niedrigerem Multiplicator. Dies geschieht, indem wir die Gleichung festsetzen [welche einen speciellen Fall des Distributionsgesetzes vorstellt]:

$$a \,.\, (b + 1) = a \,.\, b + a, \tag{25}$$

denn hierdurch ist ein Product mit dem Multiplicator $b + 1$ zurückgeführt auf ein solches mit dem Multiplicator b. Fährt man fort, den Satz (25) anzuwenden, so kommt man endlich zu einem Product mit dem Multiplicator 1, welches durch (24) erklärt ist. Es können also die beiden Gleichungen (24) und (25) in der That als (recurrirende) Definition der Multiplication genommen werden.

Nach denselben ist z. B. $a(1 + 1) = a \,.\, 1 + a$, also $a \,.\, 2 = a + a$ bestimmt, da die Addition eine bestimmt ausführbare Operation ist; ferner ist $a(2 + 1) = a \,.\, 2 + a$, also $a \,.\, 3$ ebenfalls bestimmt, etc. Aus demselben Grunde ist überhaupt jedes Product eindeutig bestimmt, oder die Multiplication eine eindeutige Operation.

Die Definition (25) enthält den Satz: *Wenn ein Factor* (zunächst eigentlich nur der zweite) *eines Productes um die Einheit wächst, so nimmt das Product um den andern Factor zu.* Das Product ändert also seinen Werth, wenn ihn der eine Factor ändert, während der andre constant bleibt. —

Um nun das distributive Princip in seiner Allgemeinheit darzuthun, nehmen wir an, es gelte für eine gewisse Zahl c die Gleichung:

$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c, \tag{26}$$

dann ist:

$$\begin{aligned} a\left\{b + (c + 1)\right\} &= a\left\{(b + c) + 1\right\} \\ &= a(b + c) + a = a\,b + a\,c + a, \end{aligned}$$

wenn man nach der Reihe die Sätze (6), (25) und die Gleichung (26) nebst (2) anwendet; nach (25) aber hat man schliesslich:

$$a\{b + (c + 1)\} = ab + a(c + 1).$$

Gilt also die Gleichung (26) für einen bestimmten Werth von c, so gilt sie auch für den nächst höheren $c + 1$, und da sie für $c = 1$ nach (24) und (25) richtig ist, so haben wir sie durch vollständige Induction allgemein erwiesen.

Was die andre Hälfte des distributiven Principes:

$$(27) \qquad (a + b) . c = a . c + b . c$$

betrifft, so nehmen wir wieder diese Gleichung als erfüllt an für ein gewisses c; dann ist nach (25), (26) und (2), (1), (25):

$$(a + b)(c + 1) = (a + b)c + (a + b) = ac + bc + a + b =$$
$$= ac + a + bc + b = a(c + 1) + b(c + 1).$$

Die Gleichung (27) muss dann also auch für die nächst höhere Zahl $c + 1$ gelten, und da sie für $c = 1$ richtig ist, so gilt sie demnach allgemein, und mit ihr das volle distributive Princip.

Die Ausdehnung des letzteren auf mehrgliedrige Summen ist wie in § 17. zu leisten. —

Es sei ferner die Gleichung:

$$(28) \qquad a . (b . c) = (a . b) . c$$

für eine gewisse Zahl c erfüllt; dann muss sie auch noch für die nächst höhere Zahl $c + 1$ richtig sein; denn nach (25), (26), (28) und (25) ist:

$$a\{b(c + 1)\} = a\{bc + b\} = a(bc) + ab =$$
$$= (ab)c + ab = (ab)(c + 1),$$

womit, da $a . (b . 1) = (a . b) . 1$, das associative Princip ebenfalls erwiesen ist. —

Sei weiter für eine gewisse Zahl a:

$$(29) \qquad 1 . a = a,$$

so ist nach (25) und (29):

$$1 . (a + 1) = 1 . a + 1 = a + 1,$$

und da $1 . 1 = 1$, so gilt die Gleichung (29) allgemein. —

Wenn endlich für ein bestimmtes a bei beliebigem b:

$$(30) \qquad a . b = b . a$$

ist, so hat man nach (27), (29), (30), (25):

$$(a + 1) . b = a . b + 1 . b = a . b + b = b . a + b = b . (a + 1),$$

und es muss die Gleichung (30) allgemein auch für jedes a gelten, da sie für $a = 1$ gilt, wo nach (24) und (29) sich $1 . b = b . 1$ heraus-

stellt. Hiemit ist auch das commutative Princip für zwei Factoren in seiner Allgemeinheit bewiesen. (Grassmann, Hankel, l. c.) —

Die Ausdehnung des associativen und des commutativen Principes auf Producte von *mehreren* Factoren kann genau ebenso ausgeführt werden wie in § 8. und 10. die Ausdehnung der über zwei- und dreigliedrige Summen gewonnenen Sätze auf mehrgliedrige bewerkstelligt wurde. Man braucht sich dort nur das $+$ Zeichen durch das $\times$ Zeichen und die Benennungen Summe, Glieder, Addition respective durch Product, Factoren, Multiplication ersetzt zu denken. Wir hätten deshalb nicht mehr nöthig, von neuem hierauf einzugehen. Da es indessen stets von Interesse ist, die Methoden zu variiren, zumal bei dem Beweise eines so überaus wichtigen Satzes, so gebe ich im nächsten Paragraphen zur Abwechselung noch eine neue Art der Beweisführung, wie sie sich ungefähr in dem Lehrbuche von Bertrand (l. c.) durchgeführt findet. Das abweichende dieser Beweisart besteht darin, dass wir diesmal die commutative Eigenschaft *vor* der associativen begründen, während in § 8. und 10. umgekehrt die erstere sich auf die letztere stützte.

§ 22. Noch ein Beweis des Fundamentalsatzes.

Definition. Ein Product von *mehreren* Factoren, die ohne Verbindung durch Klammern nebeneinander gestellt sind, soll das Ergebniss derjenigen Rechnung bedeuten, bei welcher man diese Zahlen in der Ordnung, wie sie aufeinander folgen, *fortschreitend* multiplicirt, z. B. es bedeute:

$$abcde = [\{(ab)c\}d]e,$$

oder ganz allgemein:

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n = [\ldots \{(a_1 a_2) a_3\} \ldots a_{n-1}] a_n.$$

I. Eine unmittelbare Folge dieser Festsetzung ist, dass hinfort eine Klammer, welche *vor* dem ersten Factor eines Productes sich öffnet (und hinter irgend einem folgenden Factor schliesst), nach Belieben gesetzt oder weggelassen werden darf, z. B.:

$$(abc)de = abcde,$$

und überhaupt für $p < n$:

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots a_p) a_{p+1} a_{p+2} \ldots a_n = a_1 a_2 a_3 \ldots a_p a_{p+1} a_{p+2} \ldots a_n.$$

Zum Ausgangspunkt wählen wir nun die beiden längst bewiesenen Sätze (14):

II. $$ab = ba,$$

wonach ein Product aus zwei Factoren ungeändert bleibt, wenn man diese Factoren intervertirt, und (15):

III. $(ab)c = (ac)b$, oder $abc = acb$,

wonach ein Product aus drei Factoren ungeändert bleibt, wenn man die beiden letzten intervertirt.

Und wir beweisen darnach successive, was folgt.

IV. *Ein Product ändert sich nicht, wenn man die zwei ersten Factoren vertauscht:*

$$abcde = bacde.$$

Beweis. In der That ist die linke Seite nach der vorangegangenen Bemerkung I. gleich $(ab)cde$ und nach II. gleich $(ba)cde$ und wieder aus dem ersten Grunde $= bacde$. Ebenso ist allgemein:

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n = (a_1 a_2) a_3 \ldots a_n = (a_2 a_1) a_3 \ldots a_n = a_2 a_1 a_3 \ldots a_n.$$

V. *Ein Product ändert sich nicht, wenn man die zwei letzten Factoren vertauscht:*

$$abcde = abced.$$

Beweis. Man kann nämlich die vorhergehenden Factoren zu einem einzigen Factor zusammenfassen und den Satz III. anwenden, oder ausführlicher: bezeichnet man abc mit P, so ist nach I., III. und I.:

$$\begin{aligned} abcde &= (abc)de = \\ &= Pde = Ped \\ &= (abc)ed = abced, \end{aligned}$$

und ebenso, allgemein:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \ldots a_{n-2} a_{n-1} a_n &= (a_1 a_2 \ldots a_{n-2}) a_{n-1} a_n = \\ &= (a_1 a_2 \ldots a_{n-2}) a_n a_{n-1} = \\ &= a_1 a_2 \ldots a_{n-2} a_n a_{n-1}. \end{aligned}$$

VI. *Ein Product bleibt ungeändert, wenn man irgend zwei aufeinanderfolgende Factoren vertauscht:*

$$abc\,de\,fg = abc\,ed\,fg.$$

Beweis. Fasst man in der That die Factoren, welche den in Rede stehenden vorangehen, in einen einzigen Factor, und diesen mit den zwei letzteren selbst wieder in ein Theilproduct zusammen, so lässt sich der Satz III. anwenden. Noch deutlicher: wenn $abc = P$ gesetzt wird, so ist nach I., III. und I.:

$$\begin{aligned} abcdefg &= \{(abc)de\} fg = \\ &= \{Pde\} fg = \{Ped\} fg \\ &= \{(abc)ed\} fg = abcedfg, \end{aligned}$$

desgleichen möglichst allgemein gehalten:

$$a_1 a_2 \ldots a_{p-1} a_p a_{p+1} a_{p+2} \ldots a_n = \{(a_1 a_2 \ldots a_{p-1}) a_p a_{p+1}\} a_{p+2} \ldots a_n =$$
$$\{(a_1 a_2 \ldots a_{p-1}) a_{p+1} a_p\} a_{p+2} \ldots a_n = a_1 a_2 \ldots a_{p-1} \cdot a_{p+1} a_p \cdot a_{p+2} \ldots a_n.$$

VII. *In jedem Producte von beliebig vielen Zahlen kann man die Ordnung der Factoren nach Willkür verändern, ohne dass der Werth des Productes alterirt wird.*

Beweis. In der That kann man einen beliebigen Factor auswählen und ihn auf den ersten Platz bringen, indem man ihn (auf Grund von VI.) successive mit denjenigen vertauscht, die zu seiner linken stehen werden. Hierauf wird man unter den nun auf ihn folgenden Factoren einen zweiten auswählen und ihn ebenso auf den zweiten Platz bringen können; einem beliebigen Factor aus der Reihe der noch übrigen Zahlen kann man ebenso den dritten Platz verschaffen und so fort, bis sie alle in der verlangten Ordnung stehen.

Hiemit ist nun das Commutationsgesetz allgemein bewiesen. —

VIII. *In einem jeden Producte kann man eine beliebige Folge von Factoren durch ihr ausgeführtes Product ersetzen:*

$$abcdefgh = abc(def)gh.$$

Beweis. Denn da nach VII. die Ordnung der Factoren beliebig ist, können wir annehmen und nöthigenfalls bewirken, dass diejenigen def, von welchen die Rede sein soll, die ersten seien:

$$abcdefgh = defabcgh.$$

Alsdann ist nach I. evident, dass wir sie in Klammer schliessen und durch ihr ausgeführtes Product ersetzen dürfen:

$$defabcgh = (def)abcgh.$$

Das letztere bildet nunmehr einen einzigen Factor des ganzen Productes und kann nach VII. an einer beliebigen Stelle zwischen die andern Factoren eingereiht werden, z. B. wieder an der alten Stelle, welche die noch nicht zusammengefassten Factoren def zu Anfang eingenommen haben:

$$(def)abcgh = abc(def)gh.$$

Will man auch diesen Beweis ganz allgemein geführt wissen, so hat man unter der Annahme $p < q < n$ die Gleichungen durchzugehen:

$$\begin{aligned} & a_1 a_2 \dots a_{p-1} a_p a_{p+1} \dots a_{q-1} a_q \; a_{q+1} \dots a_n = \\ = \; & a_p a_{p+1} \dots a_{q-1} a_q \cdot a_1 a_2 \dots a_{p-1} \cdot a_{q+1} \dots a_n = \\ = \; & (a_p a_{p+1} \dots a_{q-1} a_q) a_1 a_2 \dots a_{p-1} \cdot a_{q+1} \dots a_n = \\ = \; & a_1 a_2 \dots a_{p-1} (a_p a_{p+1} \dots a_{q-1} a_q) a_{q+1} \dots a_n . \end{aligned}$$

Hiermit aber ist auch das Associationsgesetz gewonnen. —

Zur ferneren Verdeutlichung führen wir noch die speciellen Fälle durch:

IX. *Um ein Product mit einer Zahl zu multipliciren, kann man einen Factor desselben mit der Zahl multipliciren:*

$$(abcd)e = a(be)cd.$$

Beweis. Nach I., VII., I. und VII. ist:

$$(abcd)e = abcde = becda = (be)cda = a(be)cd,$$

und überhaupt (wenn man, noch besser, sich auf I., VII. und VIII. stützt):

$$(a_1 a_2 \dots a_{p-1} a_p a_{p+1} \dots a_{n-1}) a_n = a_1 a_2 \dots a_{p-1} a_p a_{p+1} \dots a_{n-1} a_n =$$
$$= a_1 a_2 \dots a_{p-1} \cdot a_p a_n \cdot a_{p+1} \dots a_{n-1} = a_1 a_2 \dots a_{p-1} (a_p a_n) a_{p+1} \dots a_{n-1}.$$

X. *Um eine Zahl mit einem Product zu multipliciren, kann man sie nach der Reihe mit den Factoren desselben multipliciren* [oder umgekehrt: *Soll eine Zahl mit mehreren andern Zahlen fortschreitend multiplicirt werden, so kann man sie statt dessen mit dem Product der letzteren auf einmal multipliciren*]:

$$a(bcdef) = abcdef.$$

Beweis. Wirklich ist nach II., I. und VII., wenn $bcdef = P$ gesetzt wird:

$$a(bcdef) =$$
$$= aP = Pa =$$
$$= (bcdef)a = bcdefa = abcdef,$$

desgleichen:

$$a_1(a_2 a_3 \dots a_n) = (a_2 a_3 \dots a_n) a_1 = a_2 a_3 \dots a_n \cdot a_1 = a_1 a_2 a_3 \dots a_n.$$

Hiernach kann auch eine Klammer, die *hinter* dem letzten Factor schliesst, beliebig gesetzt oder ausgelassen werden, was das Gegenstück zu I. ist.

XI. *Ein Product kann mit einem andern Product multiplicirt werden, indem man ein einziges Product aus den Factoren der beiden bildet:*

$$(abc)(defg) = abcdefg.$$

Beweis. Wird $abc = P$ gesetzt, so ist nach X. und I.:

$$(abc)(defg) =$$
$$= P(defg) = Pdefg$$
$$= (abc)defg = abcdefg.$$

Desgleichen ist allgemein:

$$(a_1 a_2 \dots a_p)(a_{p+1} a_{p+2} \dots a_n) = (a_1 a_2 \dots a_p) a_{p+1} a_{p+2} \dots a_n =$$
$$= a_1 a_2 \dots a_p a_{p+1} a_{p+2} \dots a_n,$$

indem sowohl die erste als auch die letzte Klammer weggelassen werden darf. —

V. Die Elevation in independenter Behandlung.

§ 23. Das Potenziren und das Exponensiren.

Von der Multiplication zu der nächst höheren Operation: der *Elevation*, findet ein ganz ähnlicher Fortschritt statt, wie von der Addition zur Multiplication. Man bemerkt nämlich, dass unter den Producten aus mehreren Factoren, welche sich bei verschiedenen Untersuchungen zur Berechnung darbieten, besonders häufig solche auftreten, deren Factoren sämmtlich einander gleich sind. Dergleichen Producte muss man daher abgekürzt bezeichnen, und dies geschieht, indem man den sich wiederholenden Factor nur *ein* mal, und rechts über denselben die Zahl schreibt, welche angibt, wie oft jener Factor gesetzt werden sollte, nämlich:

(31) $$\underbrace{a}_{1} . \underbrace{a}_{2} . \underbrace{a}_{3} \ldots . \underbrace{a}_{b} = a^b$$

sprich: a *hoch* b, oder: a in der b^{ten}, a zur b^{ten} (scilicet: Potenz); auch wohl: b *über* a, b tief a.

Ein derartiges *Product aus lauter gleichen Factoren heisst eine Potenz*; und zwar wird der wiederholt vorkommende Factor a die *Basis* oder *Grundzahl* (auch wohl der Dignand) der Potenz genannt; die andere Zahl b, welche angibt, wie oft die Basis als Factor steht, heisst der *Exponent* (die Hochzahl) der Potenz a^b.

Man sieht, dass die Potenzbasis dem Multiplicanden und der Potenzexponent dem Multiplicator auf der vorhergehenden Stufe entspricht.

Eine Potenz a^b ist demnach wesentlich aus zwei Elementen oder Operationsgliedern zusammengesetzt: nämlich aus Basis und Exponent; sie stellt immer ein Product aus gleichen Factoren vor, und zwar bedeutet a^b das Product $\underbrace{a}_{1} . \underbrace{a}_{2} . \underbrace{a}_{3} \ldots . \underbrace{a}_{b}$ aus b Factoren a, welches durch $(b-1)$ malige successive Multiplication der Zahl a mit sich selbst erhalten wird.

Wenn man die Potenz a^b bildet, so pflegt man von der Grundzahl a zu sagen, dieselbe werde *in die* b^{te} *Potenz erhoben*, oder *mit* b *potenzirt*; von dem Exponenten b hingegen sagt man, derselbe werde zur Grundzahl a *exponenzirt* (als Exponent gesetzt), und man nennt in dieser Hinsicht die Potenz a^b auch eine *Exponentialgrösse* (ein *Exponential*).

Die Unterscheidung dieser beiden Redensarten ist wesentlich, und muss aufrecht erhalten werden, weil die beiden Zahlen in der That auf ganz verschiedene Weise in die Rechnung eingehen. Diese Zahlen haben nicht nur eine ursprünglich verschiedene Bedeutung, sie dürfen auch später nicht in ihrer gegenseitigen Stellung verwechselt werden. Das Potenziren oder Exponenziren ist nämlich eine nicht-commutative Operation, indem die Potenz a^b im allgemeinen von b^a verschieden ist; man hat z. B.: $2^3 = 2 . 2 . 2 = 8$ nnd $3^2 = 3 . 3 = 9$. Die einzige Ausnahme (in ganzen Zahlen, die nicht ohnehin einander gleich wären) findet bei $2^4 = 4^2$ statt, welche beide Potenzen den gleichen Werth 16 besitzen. Ausserdem dürfen aber Basis und Exponent nie miteinander vertauscht werden.

Das Potenziren und das Exponenziren, welche beide Operationen demnach immer gleichzeitig und nur in Hinsicht auf andere Zahlen vollzogen werden, können unter dem gemeinsamen Namen der *Elevation* begriffen werden. —

Die obige Begriffserklärung einer Potenz entbehrt noch eines Sinnes in dem Falle, wo der Exponent gleich 1 angenommen wird; denn zu einem Product aus gleichen Factoren sind deren wenigstens

zwei erforderlich. Indem wir jede für sich stehende Zahl als ein Product aus *einem* Factor ansehen, setzen wir fest, dass:

(32) $$a^1 = a$$

bedeuten solle. *Wenn also der Exponent einer Potenz die Einheit ist, so ist der Werth der Potenz gleich ihrer Grundzahl.* Umgekehrt: *Man kann jeder Zahl, die eines Exponenten entbehrt, die Einheit als Exponent beifügen.* Oder kurz: *Mit* 1 *potenziren ändert nichts.*

Nur bei dieser Festsetzung werden die nachfolgenden Sätze, so namentlich (34) auch noch gültig bleiben, wenn einzelne der allgemeinen Zahlen im Exponenten den Werth 1 erhalten, und *ohne* dieselbe müssten die meisten Sätze, welche jetzt auf diese Weise sich von selbst aus den nachfolgenden ergeben, wie z. B. $a \,.\, (a^b) = (a^b) \,.\, a = a^{b+1}$, apart neben die übrigen gestellt und extra memorirt werden.

Als Gegenstück zu dem Satze (32) hat man zu merken, dass stets:

(33) $$1^a = 1$$

ist, d. h.: *Jede Potenz der Einheit ist ihr selbst gleich.* Die Einheit bleibt beim Potenziren unverändert.

Eine Zahl, die beim Exponenziren jederzeit unverändert bliebe, gibt es auf dem Gebiete der gemeinen Zahlen nicht, indem sich bei genauerer Untersuchung herausstellt, dass daselbst die Gleichung $x^a = a$ durch keinen Werth von x erfüllt werden kann, der von a unabhängig wäre.

Man theilt gewöhnlich die Potenzen nach ihren Exponenten ein in zweite, dritte, vierte und höhere Potenzen. Die zweite Potenz einer Zahl, wie a^2, wird aus später erhellenden Gründen auch das *Quadrat* derselben genannt [man spricht in der Regel: a quadrat]; ebenso heisst a^3 der *Cubus* und a^4 das *Biquadrat* von a.

Potenzen von einerlei Grundzahl, wie a^2, a^3, a^5, werden bisweilen *gleichnamig* genannt und ebenso Potenzen von einerlei Exponenten, wie a^4 und b^4, *gleichartig.* Indessen haben diese Benennungen den Fehler, für das Gedächtniss keinen Anhaltspunkt zu ihrer Unterscheidung zu bieten.

§ 24. Gesetze dieser Operationen. Das Iterationsgesetz.

Vorbemerkung. Um das Anschreiben zahlreicher Klammern entbehrlich zu machen, stipuliren wir folgendes: Wenn die Operation der Elevation mit den beiden vorhergehenden Operationen *ohne* Klammer auf der Zeile verbunden vorkommt, so soll dies immer den Sinn haben, dass bei der Berechnung des Ausdruckes die Elevation *vor* den andern Rechnungsarten ausgeführt zu denken ist. Nach dieser Uebereinkunft haben also die nachstehend einander gleich gesetzten Ausdrücke einerlei Bedeutung:

$$a + b^c = a + (b^c), \quad a^b + c = (a^b) + c, \quad a \,.\, b^c = a \,.\, (b^c), \quad a^b \,.\, c = (a^b) \,.\, c,$$

und in der That unterscheiden sich dieselben hinlänglich von den folgenden:

$$(a + b)^c, \quad a^{b+c} = a^{(b+c)}, \quad (a \,.\, b)^c, \quad a^{b \,.\, c} = a^{(b \,.\, c)};$$

bei deren erstem und drittem nun die Klammer niemals weggelassen werden darf, während sie bei dem zweiten und vierten Ausdruck durch die erhöhte Stellung des Exponenten über der Zeile abermals überflüssig gemacht ist.

Auch über die Elevation lassen sich nun drei Hauptgesetze aufstellen.

Das erste Gesetz bezieht sich auf die Verbindung derselben mit der Multiplication, sowie auch mit der Addition, und kann darum mit den früheren Gesetzen, in denen höchstens zweierlei Operationen vorkamen, kein Analogon haben; es wird in seiner einfachsten Gestalt durch die Formel ausgedrückt:

$$(34) \qquad a^b \,.\, a^c = a^{b+c}$$

und wird aus einem hier ferner liegenden Grunde das *Iterationsgesetz* (auch das *Gesetz der Indices*) genannt; es enthält die beiden Sätze:

Vorwärts gelesen: *Potenzen von gleicher Grundzahl können miteinander multiplicirt werden, indem man ihre Exponenten addirt, und die übereinstimmende Grundzahl auf die Potenz dieser Summe erhebt* [oder anders zu reden: *die Summe als Exponent über die gemeinschaftliche Basis setzt*].

Rückwärts gelesen: *Anstatt eine Zahl auf die Potenz einer Summe zu erheben, kann man diese Zahl auch mit den einzelnen Gliedern der Summe potenziren und die Ergebnisse miteinander multipliciren.* Oder auch: *Eine Summe kann (mit einer Zahl) exponenzirt werden, indem man die Glieder derselben (mit der nämlichen Zahl) exponenzirt und die Resultate multiplicirt.*

Der Beweis der Formel (34) ergibt sich leicht, wenn man sich der Bedeutung einer Potenz erinnert, und das Associationsgesetz der Multiplication anwendet. Man erkennt dann augenblicklich, dass:

$$a^b \,.\, a^c = (\underset{1}{a} \,.\, \underset{2}{a} \,.\, \underset{3}{a} \,.\,.\,.\,.\, \underset{b}{a}) \,.\, (\underset{1}{a} \,.\, \underset{2}{a} \,.\,.\,.\,.\, \underset{c}{a}) =$$
$$= \underset{1}{a} \,.\, \underset{2}{a} \,.\, \underset{3}{a} \,.\,.\,.\,.\, \underset{b}{a} \,.\, \underset{b+1}{a} \,.\, \underset{b+2}{a} \,.\,.\,.\,.\, \underset{b+c}{a} = a^{b+c}$$

ist; ein Product von b Factoren a, vereinigt mit einem Product von c Factoren a, gibt offenbar ein Product von $b + c$ Factoren a [cf Begriff der Addition, § 1.].

Ebenso einfach lässt sich die Ausdehnung des Satzes auf mehr als zwei Potenzfactoren einsehen, wie sie durch die Formel ausgedrückt wird:

$$(35) \qquad a^{b_1} \,.\, a^{b_2} \,.\, a^{b_3} \,.\,.\,.\, a^{b_n} = a^{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n},$$

indem hier wieder nach dem Associationsgesetz der Multiplication die ursprünglich getrennt gezählten Factoren, welche die Potenzen linker Hand zusammensetzen, im Gesammtproduct nicht mehr geschieden z

werden brauchen, sondern als gleichgeltende Factoren des Totalproductes zusammengezählt werden können.

Man könnte den allgemeinen Satz (35) auch wieder recurrirend aus dem besondern Falle (34) ableiten, ähnlich wie dies bei den Distributionsgesetzen in § 17. gezeigt ist. —

§ 25. Zweites Gesetz.

Das zweite Gesetz der Elevation ist in Zeichen:

(36) $$a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b,$$

und in Worten:

Vorwärts gelesen: *Potenzen von gleichem Exponenten können miteinander multiplicirt werden, indem man ihre Grundzahlen miteinander multiplicirt, und das Product auf die Potenz des gemeinsamen Exponenten erhebt;* rückwärts gelesen: *Anstatt ein Product (mit einer Zahl) zu potenziren, kann man auch die Factoren desselben einzeln (mit dieser Zahl) potenziren und die Ergebnisse miteinander multipliciren.*

Der Beweis ergibt sich sehr einfach durch Anwendung des Associationsgesetzes und des Commutationsgesetzes der Multiplication, wie folgt:

$$a^b \cdot c^b = (\underset{\frown \atop 1}{a} \cdot \underset{\frown \atop 2}{a} \cdot \underset{\frown \atop 3}{a} \ldots\ldots \underset{\frown \atop b}{a}) \cdot (\underset{\frown \atop 1}{c} \cdot \underset{\frown \atop 2}{c} \cdot \underset{\frown \atop 3}{c} \ldots\ldots \underset{\frown \atop b}{c}) =$$
$$= (a \underset{\frown \atop 1}{\cdot} c) \cdot (a \underset{\frown \atop 2}{\cdot} c) \cdot (a \underset{\frown \atop 3}{\cdot} c) \ldots\ldots (a \underset{\frown \atop b}{\cdot} c) = (a \cdot c)^b,$$

wobei man nur immer der Bedeutung einer Potenz eingedenk sein muss; hat man b Factoren a mit b Factoren c in ein Product zu vereinigen, so kann man diese so anordnen und gruppiren, dass man ein Product von b Factoren $a \cdot c$ erblickt.

Ebenso lässt sich die Ausdehnung des Satzes auf den Fall, wo mehrere Factoren vorhanden sind:

(37) $$a_1^b \cdot a_2^b \cdot a_3^b \ldots\ldots a_n^b = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots\ldots a_n)^b$$

rechtfertigen. Man erhält nämlich entweder die linke oder die rechte Seite der letzteren Gleichung, je nachdem man in dem Schema:

$$\begin{array}{ccccc} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} & & \underbrace{b} \\ a_1 \,\cdot & a_1 \,\cdot & a_1 & \ldots\ldots & a_1 \,\cdot \\ \cdot\, a_2 \,\cdot & a_2 \,\cdot & a_2 & \ldots\ldots & a_2 \,\cdot \\ \cdot\, a_3 \,\cdot & a_3 \,\cdot & a_3 & \ldots\ldots & a_3 \,\cdot \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \cdot\, a_n \,\cdot & a_n \,\cdot & a_n & \ldots\ldots & a_n \end{array}$$

immer die in einer Zeile oder aber die in einer Colonne stehenden Factoren zuerst zusammenfasst.

Für den gegenwärtigen Satz ist kein Name in Gebrauch. Sagt man in (36) „mal" statt „hoch" und „plus" statt „mal", ersetzt man also jede Operation durch die nächst niedere in der Stufenleiter, so geht die Formel (36) über in:

$$a \cdot b + c \cdot b = (a + c) \cdot b,$$

d. h. in den einen Theil des Distributionsgesetzes. Man könnte das Theorem (36) deshalb bezeichnen als die *höhere* nämlich *zweite Stufe des Distributionsgesetzes*, oder noch genauer: als die *distributive Eigenschaft der Exponenten*, welche letzteren sich, wenn ein Product mit ihnen behaftet ist, auf die Factoren desselben ebenso *vertheilen*, wie ein Coefficient auf die Glieder einer Summe. Das Distributionsgesetz gilt bei der Potenzirung in der ersten Stufe ganz und gar nicht, indem sonst einerseits $a^{b+c} = a^b + a^c$, und andrerseits $(a + b)^c = a^c + b^c$ sein müsste. Es gilt auch in der zweiten Stufe nur *einseitig*, indem der andre Theil des bei der Multiplication bestehenden Distributionsgesetzes $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, wenn jetzt umgekehrt jede Operation durch die nächst höhere ersetzt wird, die Formel liefert: $a^{b \cdot c} = a^b \cdot a^c$, welche sich mit (34), sowie auch mit (38) in Widerspruch befindet.

§ 26. Drittes Gesetz.

Ein drittes Gesetz der Elevation besteht aus zwei Theilen; es wird nämlich durch die Doppelgleichung dargestellt:

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c} = (a^c)^b.$$

Der eine Theil desselben:

$$(38) \qquad (a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

lautet in Worten:

Vorwärts gelesen: *Eine Potenz kann mit einer Zahl potenzirt werden, indem man ihren Exponenten mit dieser Zahl (den Potenzexponenten mit dem Erhebungsexponenten) multiplicirt, und die Grundzahl jener Potenz mit dem Producte potenzirt* [oder anders zu reden: *das Product mit der Grundzahl jener Potenz exponenzirt*].

Rückwärts gelesen: *Anstatt eine Zahl auf die Potenz eines Productes zu erheben, kann man sie auch mit den Factoren des Productes nacheinander potenziren.* Oder: *Ein Product kann mit einer Zahl exponenzirt werden, indem man die Factoren desselben fortschreitend mit ihr exponenzirt*, d. h. zuerst den einen Factor, und mit dem Ergebnisse den zweiten.

Es ist nützlich, den ersten Satz auch noch wie folgt auszusprechen:

Statt eine Zahl mit andern Zahlen fortschreitend zu potenziren, kann man sie auch auf einmal mit dem Producte der letzteren potenziren, oder (cum grano salis!): *Anstatt gegebene Zahlen successive zu exponenziren, kann man auch ihr Product auf einmal exponenziren.*

Dieser (erste) Theil des Gesetzes führt wiederum keinen Namen; er findet auch bei den niederen Operationsstufen kein genaues Analogon, indem ja nicht $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b + c)$ ist.

Der andre Theil:

(39) $$(a^b)^c = (a^c)^b$$

des Gesetzes bezieht sich auf die Operation des Potenzirens allein; er stellt ein *reines* Gesetz der Elevation dar, ähnlich wie die Sätze (1), (3), (4) und (14), (15), (16) reine Gesetze der Addition resp. Multiplication, wogegen alle übrigen Sätze sich auf die Verbindung dieser Operationen unter sich beziehen; er stellt überdies eine *symmetrische* Relation vor, wie dies nur bei den Commutationsgesetzen der Fall war. Der Satz wird deshalb in Worten sowohl vorwärts als rückwärts gelesen gleich lauten, etwa wie folgt:

Wird eine Potenz in eine andere Potenz erhoben, so darf der Potenzexponent mit dem Erhebungsexponenten vertauscht werden. Oder: *Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge man eine Zahl mit andern Zahlen nacheinander potenzirt. Die Ordnung des Potenzirens ist beliebig.*

Dieser (zweite) Theil des Gesetzes dürfte als die *commutative* Eigenschaft der Exponenten bezeichnet werden, indem er dem Satze (15) der Multiplication: $(ab)c = (ac)b$ genau entspricht. —

Was nun den Beweis, zunächst von (38), betrifft, so hat man mit Rücksicht auf den Begriff der Potenz, das Theorem (35) und den Begriff des Productes in der That:

$$(a^b)^c = \underset{\frown}{a^b}_1 \cdot \underset{\frown}{a^b}_2 \cdot \underset{\frown}{a^b}_3 \cdot \ldots \cdot \underset{\frown}{a^b}_c = a^{\overset{1}{\smile}{b}+\overset{2}{\smile}{b}+\overset{3}{\smile}{b}+\cdots+\overset{c}{\smile}{b}} = a^{b \cdot c}.$$

Der andere Theil (39) aber ist nach dem Commutationsgesetze der Multiplication eine unmittelbare Folgerung aus dem ersten (38). Denn da man in (38) rechter Hand die Zahlen b und c verwechseln darf, wird man es auch in dem Ausdrucke linker Hand thun dürfen. Genauer: Vertauscht man die Buchstaben b und c in der Gleichung (38), so ergibt sich als gleichberechtigt: $(a^c)^b = a^{c \cdot b}$, und da wegen $c \cdot b = b \cdot c$ die rechte Seite dieser Gleichung mit der in (38) übereinstimmt, so müssen auch die linken Seiten einander gleich sein.

Man kann diesen zweiten Theil jedoch auch unabhängig von dem ersten beweisen, indem man das Theorem (37) anwendet. Darnach ist nämlich auch:

$$(a^b)^c = \underset{1}{\widehat{a^b}} \cdot \underset{2}{\widehat{a^b}} \cdot \underset{3}{\widehat{a^b}} \cdot \ldots \cdot \underset{c}{\widehat{a^b}} = (\underset{1}{\widehat{a}} \cdot \underset{2}{\widehat{a}} \cdot \underset{3}{\widehat{a}} \cdot \ldots \cdot \underset{c}{\widehat{a}})^b = (a^c)^b.$$

Es versteht sich von selbst, dass man den Beweis, wenngleich etwas weitläufiger, auch unabhängig von *allen* vorausgehenden Theoremen der Elevation führen könnte, analog demjenigen des Theorems (34).

Anzuführen ist noch die Verallgemeinerung des Gesetzes für mehrere Exponenten:

(40) $$\left[\cdots\left\{(a^{b_1})^{b_2}\right\}^{b_3}\cdots\right]^{b_n} = a^{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n},$$

und dürfen auch in diesem Ausdrucke die Exponenten b beliebig miteinander vertauscht werden. —

§ 27. Zusätze über Ungleichungen.

(A) *Eine Potenz ist stets grösser als die Basis derselben, es sei denn, dass die letztere oder aber dass der Exponent gleich* 1 *ist*; in Zeichen:

$$a^b > a, \quad \text{wenn} \quad a > 1 \quad \text{und} \quad b > 1.$$

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf den entsprechenden Satz § 20. (D) der Multiplication, nach welchem ein Product grösser ist als ein Factor desselben, wenn die andern Factoren nicht etwa 1 sind. In der That braucht man, um dies einzusehen, sich nur an die Bedeutung der Potenz:

$$a^b = \underset{1}{a} . \underset{2}{a} . \underset{3}{a} \ldots \underset{b}{a} = a . (\underset{1}{a} . \underset{2}{a} \ldots \underset{b-1}{a})$$

zu erinnern. Desgleichen lässt sich leicht auch der Beweis durch Schluss von b auf $b+1$ führen; denn, wenn $a^b > a$, so muss um so mehr auch sein:

$$a^{b+1} = a^b . a > a . a > a.$$

(B) *Eine Potenz ist auch stets grösser als ihr Exponent, ausgenommen wenn die Basis* $= 1$ *ist:*

$$a^b > b, \quad \text{wenn} \quad a > 1.$$

Beweis durch Schluss von b auf $b+1$.

Wenn $a^b > b$, so ist $a^{b+1} = a^b . a > b . a$; aber:

$$b . a > b + a > b + 1$$

nach § 20. (E), und folglich in der That: $a^{b+1} > b + 1$. Da nun $a^1 > 1$ ist, so muss also auch $a^2 > 2$, desgl. $a^3 > 3$, u. s. w. sein.

(C) *Eine Potenz wächst, wenn die Basis derselben zunimmt,* oder: *grösseres, mit gleichem potenzirt, gibt grösseres:*

$$(a + c)^b > a^b.$$

Diese Ungleichung könnte direct bewiesen werden auf Grund des binomischen Satzes, womit wir indessen vorgreifen würden, da derselbe erst später vorkommt. Einstweilen geht der Beweis am bequemsten durch Schluss von b auf $b+1$ von statten, denn wenn die obige Ungleichung für ein bestimmtes b erfüllt ist — und sie ist es ja offenbar für $b = 1$ — so folgt durch beiderseitige Multiplication mit $a + c$:

$$(a + c)^{b+1} = (a + c)^b . (a + c) > a^b . (a + c) = a^{b+1} + a^b . c > a^{b+1}.$$

(D) *Eine Potenz wächst, wenn der Exponent derselben zunimmt, vorausgesetzt nur, dass die Basis nicht etwa gleich* 1 *ist;* oder: *grösseres, mit gleichem* (*ausser* 1) *exponenzirt, gibt grösseres:*

$$a^{b+c} > a^b, \quad \text{wenn} \quad a > 1.$$

Der Beweis beruht höchst einfach auf dem Iterationsgesetze, wonach:

$$a^{b+c} = a^b \, . \, a^c$$

ist, und auf dem Satze (D) des § 20., dass ein Product grösser ist als ein Factor desselben, das obige also $> a^b$. —

Durch Vereinigung von (C) und (D) folgt:

(E) *Grösseres, mit grösserem potenzirt oder exponenzirt, gibt* (unbedingt) *grösseres.*

Ist $a > b$ und $c > d$, so muss auch $a^c > b^d$ sein. Denn nach (C) folgt aus der ersten Ungleichung: $a^c > b^c$, desgl. nach (D) aus der zweiten Ungleichung: $b^c > b^d$ — den Fall $b = 1$ ausgenommen, woselbst dann $b^c = b^d$ wird. Aus diesen Ergebnissen aber ist allemal leicht auf die behauptete Ungleichung zu schliessen.

(F) *Eine Potenz ist immer grösser als die Summe ihrer Operationsglieder* (Basis und Exponent), *ausgenommen wenn eines derselben gleich* 1 *oder wenn beide gleich* 2 *sind.*

Es ist $a^b \geqq a + b$ (sprich: grösser *oder* gleich), sobald $a > 1$ und $b > 1$, wobei überdies das untere Zeichen, nämlich $=$, nur in dem Falle $a = 2$, $b = 2$ gilt.

Der Beweis kann durch Schluss von b auf $b + 1$ geführt werden. Da nämlich für $a^b \geqq a + b$ auch:

$$a^{b+1} = a^b \, . \, a \geqq (a + b)\, a > (1 + b)\, a$$

sein wird, und da ferner nach § 20. (E) $a\,(b + 1) > a + (b + 1)$, so ist der Satz, woferne er nur für ein bestimmtes b gilt, auch für das nächst höhere b erwiesen.

(G) *Eine Potenz ist immer grösser als das Product ihrer Operationsglieder, ausser, wenn eines derselben* $= 1$ *oder beide* $= 2$ *sind.*

Es ist $a^b \geqq a \, . \, b$, wenn $a > 1$ und $b > 1$, denn wenn diese Behauptung für ein bestimmtes b richtig ist, so folgt aus dieser Annahme weiter: $a^{b+1} = a^b \, . \, a > (a \, . \, b) \, . \, a = a\,(ba)$, und da nun $b \, . \, a > b + a$ und um so mehr auch $> b + 1$ ist, so hat man auch: $a\,(ba) > a\,(b + 1)$ und ist der Satz hiemit durch Schluss von b auf $b + 1$ bewiesen. Daneben besteht im Falle $a = b = 2$ die merkwürdige Identität: $2^2 = 2 \, . \, 2 = 2 + 2$. —

An Stelle des Commutationsgesetzes tritt bei den Potenzen der Satz:

(H) *Wenn* $a > b$, *so ist:* $a^b < b^a$, *mit Ausnahme der Fälle:* $a^1 > 1^a$, $3^2 > 2^3$, $4^2 = 2^4$.

Dem mächtigen Anwachsen des Potenzwerthes mit zunehmender Basis, noch mehr aber mit zunehmendem Exponenten verdankt die Potenz ihren Namen (potentia, potestas = Macht).

VI. Die Elevation in recurrenter Behandlung.

§ 28.

Neben die obige in den Hauptzügen independente stelle ich wieder in Kürze die recurrirende Behandlungsweise der Materie.

Die Gleichung:

$$(41) \qquad a^1 = a$$

definirt jede Potenz für den Exponenten 1, und die Relation:

$$(42) \qquad a^{b+1} = a^b \,.\, a$$

lehrt ferner, eine solche für den Exponenten $b + 1$ zu bilden, wenn sie für den Exponenten b bekannt ist. Indem man in der letzteren Gleichung $b = 1, 2, 3, \ldots$ annimmt, erfährt man also nach der Reihe die Bedeutung von a^2, a^3, a^4, ... und können mithin die beiden Gleichungen (41) und (42) zusammen als recurrirende Definition der Potenz hingestellt werden.

Aus der für ein bestimmtes c gemachten Annahme:

$$(43) \qquad a^{b+c} = a^b \,.\, a^c$$

folgt nun nach (6), (42), (43), (28) und (42):

$$a^{b+(c+1)} = a^{(b+c)+1} = a^{b+c} \,.\, a = (a^b \,.\, a^c) \,.\, a = a^b \,.\, (a^c \,.\, a) = a^b \,.\, a^{c+1},$$

und da die Gleichung (43) für $c = 1$ gilt, so ist sie demnach durch Schluss von c auf $c + 1$ allgemein bewiesen.

Aus der für ein bestimmtes b gemachten Annahme:

$$(44) \qquad (a \,.\, c)^b = a^b \,.\, c^b$$

folgt ferner nach (42), (44), (30) nebst (28) und (42):

$$(a \,.\, c)^{b+1} = (a \,.\, c)^b \,.\, (a \,.\, c) = \left\{a^b \,.\, c^b\right\} \,.\, a \,.\, c = (a^b \,.\, a) \,.\, (c^b \,.\, c) = a^{b+1} \,.\, c^{b+1},$$

womit die Gleichung (44), da sie für $b = 1$ gilt, nun allgemein durch die vollständige Induction hinsichtlich b erwiesen ist.

Aus der für $c = 1$ zulässigen und darum für ein bestimmtes c zu machenden Annahme:

$$(45) \qquad a^{b \,.\, c} = (a^b)^c$$

folgt endlich nach (25), (43), (45), (42):

$$a^{b \,.\, (c+1)} = a^{b \,.\, c + b} = a^{b \,.\, c} \,.\, a^b = (a^b)^c \,.\, a^b = (a^b)^{c+1},$$

womit auch dieser letzte Satz nun recurrent bewiesen ist. —

Alle obigen Gleichungen könnten auch von rechts nach links gelesen und einer jeden entlang rückwärts geschlossen werden. — (Grassmann l. c.)

§ 29. Rückblick. Die Iteration.

Indem wir an einem Ruhepunkte angelangt sind, wo die Aufgaben, welche sich bisher auf unserm Wege fanden, ihre völlige Erledigung gefunden haben, ziemt es sich, das gegenseitige Verhältniss dieser Aufgaben näher ins Auge zu fassen und zu der Quelle zurückzugehen, in welcher sie ihren Ursprung hatten.

Wir sind ausgegangen von der *natürlichen Zahl* als dem Ebenbilde einer Gesammtheit von sich gleichenden Gegenständen, auf deren Natur selbst es zunächst weiter nicht ankam.

Es konnten durch die natürliche Zahl Einheiten verschiedener Art für sich gezählt werden. Für den Fall aber, wo Einheiten von anfangs verschiedener Art *gleichgültig* wurden, d. h. einander gleich gedacht werden sollten, sahen wir uns veranlasst, die Addition einzuführen, welche somit die erste Art der Zahlenverknüpfung, die erste Operation der Algebra, bildete. Sie lieferte uns den Begriff einer *Summe* aus mehreren im allgemeinen verschiedenen Gliedern, wie: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$.

Der Fall, wo diese Glieder einander *gleich* angenommen wurden, gab Veranlassung zur Einführung der Multiplication und zu dem Studium des *Productes*: $\underset{\frown \atop 1}{a} + \underset{\frown \atop 2}{a} + \underset{\frown \atop 3}{a} + \cdots + \underset{\frown \atop n}{a} = a \,.\, n$ — wie eine solche Summe aus gleichen Gliedern genannt worden ist. Das Product aber bestand ursprünglich aus nur zwei Elementen oder Operationsgliedern, und wir hätten in dieser Weise nicht weiterfahren können, wenn uns nicht durch eine merkwürdige Eigenschaft der Multiplication die Aufstellung des Begriffs eines Productes: $a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots . \, a_n$ *beliebig vieler* Factoren ermöglicht worden wäre.

Alsdann gab wiederum der Fall, wo diese Factoren einander *gleich*, etwa sämmtlich $= a$, gesetzt werden, Veranlassung zur Einführung eines neuen Begriffes: desjenigen einer *Potenz* als eines Productes aus gleichen Factoren: $\underset{\frown \atop 1}{a} \,.\, \underset{\frown \atop 2}{a} \,.\, \underset{\frown \atop 3}{a} \ldots . \, \underset{\frown \atop n}{a} = a^n$. Die Potenzirung ist also eine Operation, welche aus der Multiplication noch ebenso hervorgeht, wie diese aus der Addition. Nun aber besteht eine Potenz ebenfalls wesentlich wieder nur aus zwei Elementen, und eine ähnliche Verallgemeinerung ihres Begriffes wie bei dem Producte ist hier nicht zulässig, weil der Potenz die dazu erforderliche Grundeigenschaft (der Associativität) abgeht.

Nach dem bisher angewendeten Princip zur Gewinnung von Operationen ist demnach eine neue Operation immer dann eingeführt worden, wenn die in beliebiger Anzahl vorhandenen Elemente der

vorhergehenden Operation einander gleich gedacht wurden, und stellten wir uns alsdann stets die Aufgabe, die Eigenschaften oder Gesetze dieser neuen Operationen zu erkennen. Nach dem zuletzt gesagten aber ist klar, dass wir genau in der bisherigen Weise das gedachte Princip nun nicht weiter anwenden können.

Soll dieses überhaupt möglich werden, so müssen wir nochmals zurückgehen, und die Addition, sowie die Multiplication als Operationen ansehen, die wesentlich nur *zwei* Zahlen auf einmal als Operationsglieder verknüpfen können, wie dies bei der Multiplication in der That ursprünglich der Fall gewesen ist, und bei der Addition wenigstens in ihrer recurrenten Behandlung. Bei einer solchen Auffassung erscheint dann eine Summe aus gleichen Gliedern als das Ergebniss, nicht mehr einer einzigen Addition, sondern einer Reihe successive ausgeführter Additionen von immer der gleichen Zahl zu dem früheren Ergebnisse; ebenso entsteht ein Product aus gleichen Factoren durch fortgesetzte Multiplication mit immer wieder der nämlichen Zahl, und man kann sagen:

Die Multiplication ist im Grunde nur eine wiederholte Addition — oder wenigstens ein abgekürztes Verfahren, um bequemer zu dem Ergebniss einer solchen zu gelangen. *Die Potenzirung ist eine wiederholte Multiplication.*

Wir wollen jetzt versuchen, allgemein auszusprechen, was unter der Wiederholung (Iteration) einer *einfachen* Operation zu verstehen sei, d. h. einer solchen Operation, welche nur zwei Zahlen auf einmal als Operationsglieder oder Elemente verknüpft, um sodann zuzusehen, auf welche Gebilde uns eine wiederholte Elevation führen wird.

Eine derartige *einfache Operation erscheint*, wie man sagt, (*einmal*) *wiederholt oder iterirt, wenn das eine Element derselben das andre ebenso als ein Operationsglied enthält, wie ausserdem der ganze Ausdruck*; sie erscheint *mehrmals* wiederholt, wenn jenes Element selbst das Ergebniss der ebenso (ein- oder mehrmal) wiederholten Operation ist.

Hieraus geht sogleich hiervor, dass jede solche Operation, die aus zwei Zahlen eine dritte bildet, auf zwei Arten wiederholbar sein wird, je nachdem man stets das erste oder stets das zweite Operationsglied durch die nämliche Operation fortwährend in gleicher Weise zusammengesetzt annimmt. Die Operation (a, b), in welcher das Komma die Stelle irgend eines Rechenzeichens, wie plus, mal, hoch, vertreten soll, kann nämlich entweder bezüglich des ersten Elementes iterirt werden, wie:

$$([\{(a, b), b\}, b], b) \ldots.,$$

oder in Hinsicht auf das zweite Element, wie:

$$\ldots\ldots (a, [a, \{a, (a, b)\}]),$$

und wird die Iteration bewerkstelligt, indem man für das eine Element immer wieder den Ausdruck (a, b) selbst in das letzte Resultat einsetzt, oder was auf dasselbe hinauskommt, indem man das letzte Ergebniss für dasselbe Element fortgesetzt *in* diesen Ausdruck (a, b) substituirt.

Die beiden Arten, auf welche die Addition zweier Zahlen a und b wiederholt werden kann, führen nun aber auf die Ausdrücke:

$$(\cdots[\{(a + \underset{1}{\frown}{b}) + \underset{2}{\frown}{b}\} + \underset{3}{\frown}{b}]\cdots + \underset{n-1}{\frown}{b}) + \underset{n}{\frown}{b} = a + b \,.\, n,$$

und:

$$\underset{1}{\frown}{a} + (\underset{2}{\frown}{a} + [\underset{3}{\frown}{a} + \cdots \{\underset{n-1}{\frown}{a} + (\underset{n}{\frown}{a} + b)\}\cdots]) = a \,.\, n + b,$$

welche beide durch Multiplication (und Addition) in gleicher Weise auszurechnen sind und ineinander übergehen, wenn man a und b vertauscht. Dies rührt daher, dass die beiden Summanden einer Summe nach dem Commutationsgesetze für einander gesetzt werden dürfen, und man also durch Iteration bezüglich des einen Summanden keine andre Art von Ausdrücken erhalten kann, als bezüglich des andern Summanden.

Ebenso führen die beiden Arten, auf welche die Multiplication von a und b wiederholt werden kann, je nachdem man den Multiplicator oder den Multiplicand immer wieder in gleicher Weise zusammengesetzt annimmt:

$$(\ldots[\{(a \,.\, \underset{1}{\frown}{b}) \,.\, \underset{2}{\frown}{b}\} \,.\, \underset{3}{\frown}{b}]\ldots\ldots \underset{n-1}{\frown}{b}) \,.\, \underset{n}{\frown}{b} = a \,.\, b^n,$$

$$\underset{1}{\frown}{a} \,.\, (\underset{2}{\frown}{a} \,.\, [\underset{3}{\frown}{a}\ldots\ldots \{\underset{n-1}{\frown}{a} \,.\, (\underset{n}{\frown}{a} \,.\, b)\}\ldots]) = a^n \,.\, b,$$

übereinstimmend auf Potenzen, weil nach dem Commutationsgesetze das Verhalten des Productes in Bezug auf den einen Factor dasselbe sein muss wie in Bezug auf den andern.

Auf dem Commutationsgesetz also beruht es, dass aus der Wiederholung bei der Addition, sowie auch bei der Multiplication, doch nur je *eine* neue Art von Operationen hervorgeht.

Anders verhält es sich, wenn wir diese Tendenz weiter verfolgen und in dem angegebenen Sinne fortfahren wollen mit der Wiederholung der Elevation. Da diese Operation nicht commutativ ist, so erhalten wir aus der nämlichen Potenz a^b zweierlei ganz verschiedene Ausdrücke, je nachdem wir die Basis immer wieder als ein Exponen-

tial vom nämlichen Exponenten, oder aber den Exponenten immer wieder als eine Potenz mit der nämlichen Basis ansehen.

Die erstere Wiederholungsart — die Iteration hinsichtlich a — bei welcher die vorhergehende Potenz immer wieder mit dem nämlichen Exponenten b potenzirt wird, führt auf ein Gebilde, welches sich nach der Regel von der Potenzirung der Potenzen vereinfachen und in eine Potenz zusammenziehen lässt, deren Exponent nur eine einfache Potenz ist, nämlich auf:

$$(46) \qquad \left(\cdots\left[\left\{\left(a^{\overset{1}{b}}\right)^{\overset{2}{b}}\right\}^{\overset{3}{b}}\right]^{\cdots^{\overset{n-1}{b}}}\right)^{\overset{n}{b}} = a^{(b^n)} = a^{b^n}.$$

Die zweite Art, auf welche die Aufgabe der Elevation wiederholt auftreten könnte — die Iteration hinsichtlich b — wobei man das letzte Exponential jedesmal wieder mit der nämlichen Grundzahl zu exponenziren hätte, führt auf *neue* Gebilde:

$$(47) \qquad \underset{1}{a}^{\left(\underset{2}{a}^{\left\{\underset{3}{a}^{\left[\cdots \underset{n-1}{a}^{\left(\underset{n}{a}^{b}\right)\cdots}\right]}\right\}}\right)} = \underset{1}{a}^{\underset{2}{a}^{\underset{3}{a}^{\cdots^{\underset{n-1}{a}^{\underset{n}{a}^{b}}}}}},$$

welche hinsichtlich ihrer Eigenschaften und Berechnungsmethoden noch nicht untersucht sind. Man hat für diese Gebilde weder eine abgekürzte Bezeichnung eingeführt, noch eine Theorie derselben geschaffen, theils — und wohl hauptsächlich — aus dem Grunde, weil jene Eigenschaften zu complicirt sind und ihrem Studium zu grosse Schwierigkeiten im Wege stehen, theils auch darum, weil dergleichen Gebilde allzu selten auftreten und somit die Untersuchung derselben sich bis jetzt nicht als nothwendig herausgestellt hat. —

Wir sind demnach in der bisher verfolgten Richtung bis an die Grenze der gegenwärtigen Wissenschaft vorgedrungen; wir haben den angegebenen Gesichtspunkt vollständig erschöpft und wären mit der ganzen Mathematik zu Ende, wenn nicht noch andere Gesichtspunkte sich darböten.

Um weiter zu fahren müssen wir uns jetzt nach einer neuen Gattung von Problemen umsehen, und eine solche entspringt aus der erfahrungsmässig oft an uns herantretenden Forderung, die bisherigen directen Aufgaben der Algebra *umzukehren*; hierauf werden wir denn in dem folgenden Kapitel näher eingehen.

Drittes Kapitel.

Die vier inversen Operationen.

§ 30. Einführung derselben; die Inversion.

Bei allen drei bisherigen Operationen, bei der Addition, der Multiplication und der Elevation, bestand in den einfachsten Fällen die Aufgabe darin, *aus zwei bekannten Zahlen eine dritte zu bilden.* Dieser Umstand macht in der That das gemeinsame in dem Charakter der drei genannten Operationen aus. Sind a und b die beiden gegebenen Zahlen und x die gesuchte dritte, so ist bekannt, dass die gedachten Aufgaben in Buchstaben höchst einfach gelöst werden, indem man beziehungsweise schreibt:

$$x = a + b,$$
$$x = a \cdot b,$$
$$x = a^b.$$

Neue Aufgaben ergeben sich nun, wie gesagt, durch *Umkehrung* (*Inversion*) der bisherigen.

Bei der grossen Mannigfaltigkeit der überhaupt denkbaren Aufgaben (Probleme) und der mit diesem grossen Umfange nothwendig verbundenen Unklarheit ihres (Gattungs-) Begriffes will ich es unterlassen, allgemein zu definiren, was es heisse, dieselben „umkehren"; ich will mich darauf beschränken, dieses nur für eine Klasse von solchen Aufgaben zu thun, wie sie hier vorliegen, nämlich für die Aufgaben, bei denen es sich darum handelt, aus (mehreren) gegebenen Zahlen eine Unbekannte zu berechnen.

Unter dem Ausdrucke „eine (derartige Berechnungs-) *Aufgabe umkehren" versteht man: sich eine neue Aufgabe stellen, bei welcher die ursprünglich gesuchte Zahl jetzt als gegeben gedacht und eine von den* (beiden) *vorhin bekannten Zahlen jetzt als Unbekannte gesucht wird.*

Schon der Anfänger im Rechnen macht sehr bald die Erfahrung, dass in der That die Auflösung einer solchen umgekehrten Aufgabe ungemein häufig gefordert wird, dass man z. B. oft die Summe oder das Product zweier Zahlen und die eine derselben kennt, während man die andre zu kennen wünscht. Auf diese Weise sieht man sich also veranlasst, die *umgekehrten* oder *inversen Operationen* der drei directen Operationen zu untersuchen, d. h. eben diejenigen Rechnungsarten, mittelst welcher die letzteren Aufgaben sich lösen lassen werden.

Nach der gegebenen Erklärung muss sich jede der drei directen Operationen auf zwei Arten umkehren lassen, je nachdem man die erste oder die zweite der beiden anfangs bekannten Zahlen als Unbekannte ansieht. Darnach stünden im ganzen $2 \cdot 3 = 6$ inverse Opera-

tionen zu erwarten und hätte die Algebra überhaupt $3 + 6 = 9$ verschiedene Elementaroperationen zu betrachten. Nun müssen aber die beiden Umkehrungen der Additionsaufgabe zusammenfallen in der *Subtraction*, und die beiden Umkehrungen der Multiplication können nur *eine* Rechnungsart, die *Division*, liefern *wegen des Commutationsgesetzes*, welches bei jenen Operationen besteht. Weil nämlich die beiden Summanden einer Summe, sowie auch die beiden Factoren eines Productes miteinander verwechselt werden können, so liegt jedesmal ganz der gleiche Fall vor, ob die erste oder ob die zweite Zahl gesucht ist, indem man ja die erste zur zweiten machen kann. Bei der Elevation hingegen bleiben zwei Umkehrungen: das *Radiciren* und das *Logarithmiren*, je nachdem nämlich die Basis oder der Exponent gesucht sein wird, welche beide bekanntlich nicht miteinander vertauscht werden dürfen. So ergeben sich also nur vier inverse Operationen und hat man in der Algebra überhaupt sieben verschiedene Rechengeschäfte kennen zu lernen.

Anmerkung. Unter dem *Umkehren* einer Aufgabe ist der Anfänger stets geneigt eher etwas anderes zu verstehen, nämlich abweichend von der obigen Erklärung zu glauben, dass dabei das gesuchte einfach zum gegebenen und das gegebene zum gesuchten gemacht werden müsse.

Geht man jedoch auf eine solche Art der Umkehrung nur einigermassen näher ein, so sieht man sogleich, dass in der Regel und so auch im vorliegenden Falle die Aufgabe jeglicher Bestimmtheit ermangeln würde. Da es z. B. sehr viele Summen gibt, welche den gleichen Werth besitzen, ohne dass deshalb in ihren Gliedern Uebereinstimmung stattfände, wie etwa: $10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4 = 5 + 5$, so werden sich, wenn nur der Werth der Summe und weiter nichts gegeben ist, die Glieder derselben nicht bestimmen lassen. Vielmehr kann, wenn nur die Summe 10 gegeben ist, das eine Glied derselben noch — innerhalb gewisser Schranken — ganz beliebig angenommen werden; man kann hier jede Zahl dafür nehmen, die kleiner als 10 ist — ja, bei der späteren Erweiterung des Zahlengebietes wird man die eine der beiden Unbekannten sogar *völlig* willkürlich annehmen und erst, wenn letzteres geschehen ist, das andre Glied als Unbekannte berechnen können. Alsdann ist aber die Aufgabe wieder zurückgeführt auf die oben ausgesprochene, bei welcher *zwei* Zahlen gegeben und nur *eine* gesucht ist. Dieselbe Bemerkung trifft auch zu in Bezug auf Producte; ebenfalls ist bei diesen die Kenntniss ihres Werthes zur Ermittelung ihrer Factoren nicht hinreichend, wie denn z. B. $1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$ ist. Jene Bemerkung gilt endlich auch für die Potenzen, sodass man sich also hinsichtlich der Umkehrung dieser sämmtlichen Aufgaben auf die obige Fassung des Inversionsproblemes hingewiesen sieht.

Man wird nun frühzeitig erkennen, dass die Lehre von den inversen Operationen, welche sich zunächst (mit der auf pag. 51 erwähnten Ausnahme) als *eindeutig* herausstellen, sich sehr verschieden gestalten müsste, wenn dieselben *vieldeutige* wären. Daher erscheint es rathsam, diese beiden Fälle zu trennen, und werde ich demgemäss

in dem ersten Abschnitt dieses Kapitels die inversen Operationen als solche, wie sie vorderhand *sind*, behandeln, und in dem zweiten Abschnitt als solche, wie sie auch *sein könnten* und (theilweise) später wirklich — auf andern Zahlengebieten — *sein werden*.

I. Behandlung des Inversionsproblemes für die eindeutig ausfallenden Operationen.

§ 31. Die Subtraction.

Will man demgemäss die Aufgabe der Addition umkehren, so muss man nach der angegebenen Erklärung die Summe zweier Zahlen als bekannt annehmen — wir wollen sie a nennen; ausserdem muss der eine Summand gegeben sein, welcher b heissen möge und soll endlich die Aufgabe vorliegen, den andern Summand x auszurechnen.

Da nun die Summe der Zahlen b und x auch mit $b + x$ bezeichnet werden kann, so ist hiemit für die Summe a auch noch ein andrer Name gegeben und muss die Gleichung bestehen:

$$b + x \quad \text{oder} \quad x + b = a.$$

Diese Gleichung ist augenscheinlich von anderem Charakter als die meisten Gleichungen des vorigen Kapitels, in welchen literale Zahlen vorkamen; sie gilt nicht mehr für beliebige Werthe von a, b, x oder auch nur von x und ist darum keine Formel oder identische (analytische) Gleichung, sondern eine synthetische Gleichung.

Es ist leicht, sich hievon an Beispielen zu überzeugen. Wenn etwa a und b die bestimmten Werthe 12 und 7 haben, so wird diese Gleichung $7 + x = 12$ falsch, sobald man für x beliebige Werthe wie 1, 2, 3, 4 oder 6, 7, 8, . . . einsetzt, und richtig oder *erfüllt* wird die Gleichung nur, wenn man unter x die ganz bestimmte Zahl $x = 5$ versteht.

Die Aufgabe besteht nun eben darin, jene Gleichung *aufzulösen*, d. h. alle diejenigen bestimmten Zahlen zu finden, welche als Werthe von x eingesetzt der Gleichung genüge leisten — falls es deren überhaupt welche gibt. Allgemein aber wird unter dieser Voraussetzung die Auflösung der obigen Gleichung $b + x$ oder $x + b = a$ bewerkstelligt, indem man schreibt:

$$x = a - b.$$

So lange es noch dahinsteht, ob nicht vielleicht *mehrere* solche Zahlen existiren, welche zu b addirt a geben und von denen x eine vorstellen soll, so lange man also noch den Ausdruck $(a - b)$ als einen möglicherweise *vieldeutigen* (dagegen das uneingeklammerte $a - b$ als noch nicht genügend erklärt) ansehen muss (cf. Einleitung Nr. 19.), sollte man allerdings besser schreiben:

$$x \neq\!\!\!\in (a - b).$$

Die Anwendung des Gleichheitszeichens = anstatt des a priori eigentlich zu

erwartenden Zeichens $\rightleftarrows$ der Unterordnung wird jedoch in § 40. vollkommen gerechtfertigt werden, nachdem vorher nur noch einige auf Benennungen, Auffassung und Ueberblick des ganzen bezügliche Vorfragen erledigt sind. Die gleiche Bemerkung würde auch bei den beiden folgenden Paragraphen am Platze sein, und kann überdies auf den zweiten Abschnitt dieses Kapitels als auf ein Muster hingewiesen werden, wie die Sache bei ganz rigorosen Anforderungen (bezüglich der Strenge) anzugreifen wäre.

Man spricht nun: x gleich a *minus* b, oder a *weniger* b; oder auch, rückwärts gelesen: b *von* a (scilicet: abgezogen) bleibt x, b von a lässt x (sc. übrig).

Da somit das Zeichen — sich rückwärts ganz anders liest als vorwärts, nämlich vorwärts *minus*, rückwärts *von*, so ist dasselbe als ein von beiden Seiten gleich erscheinendes offenbar nicht ganz passend gewählt. Dasselbe erhält seine Bedeutung erst dann unzweideutig, wenn zugleich die Richtung, in der es zu lesen ist, vorgeschrieben wird, als welche Richtung allerdings in der Regel diejenige des Lesens und Schreibens (von links nach rechts) stillschweigend angenommen wird. Dagegen würde ein unsymmetrisches Zeichen, wie etwa der Strich mit einem durch eine Pfeilspitze markirten Endpunkte $\rightarrow$ den Vorzug besitzen, dass es den Rechner von dem Zwang der Zeile entlang zu rechnen, emancipirte, und eine ähnliche Bemerkung wäre auch bei den beiden Divisionszeichen Doppelpunkt und Bruchstrich am Platze, welche vorwärts, resp. abwärts, als *„durch“*, rückwärts, resp. aufwärts als *„in“* zu lesen sein werden.

Der hiemit für die gesuchte Zahl x neu eingeführte Ausdruck $a - b$ wird die *Differenz* (der *Rest* oder der *Unterschied*) von a und b genannt, und zwar heisst a der *Minuend*, b der *Subtrahend* dieser Differenz.

[Man kann auch den Ausdruck $a - b$ ein *arithmetisches Verhältniss* nennen; alsdann heissen a und b die *Glieder* desselben, und zwar a das *Vorderglied* oder der *Antecedent*, b das *Hinterglied* oder der *Consequent.*]

Die Rechnung, durch welche die Differenz $a - b$ aus den Zahlen a und b gebildet wird, heisst *Subtraction*; man sagt dabei, die Zahl b werde *von a abgezogen* oder *subtrahirt*, oder a werde *um b vermindert*.

In Buchstaben wird diese Operation höchst einfach vollzogen (genauer: angedeutet), indem man die Operationsglieder in der richtigen Folge mittelst des Minuszeichens verbindet.

Numerisch, d. h. bei bestimmten dekadischen Zahlen, besteht ihre Ausführung in einem eigenen Rechenverfahren, welches Vorwurf der gemeinen Arithmetik ist. —

Mit Rücksicht auf die Bedeutung einer Zahl als einer Summe von Einern heisst nun also „von einer Zahl a eine andere b subtrahiren“ nichts anderes als: jene Zahl a in eine Summe zerlegen, deren eines Glied b Einheiten enthält, letzteres weglassen, und das andere Glied nehmen, d. h. die Menge der übrig bleibenden Einheiten, zu einer Zahl zusammengefasst, behalten.

§ 32. Die Division.

Will man entsprechend die Aufgabe der Multiplication umkehren, so hat man eine Gleichung aufzulösen von der Form:

$$b \,.\, x \quad \text{oder} \quad x \,.\, b = a,$$

und dies geschieht einfach, indem man andeutungsweise schreibt:

$$x = a : b \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b},$$

sprich: x gleich a (dividirt) *durch* b, oder rückwärts gelesen: b *in* a geht x mal auf. Den Ausdruck $a : b$ nennt man einen *Quotienten* und zwar a den *Dividenden*, b den *Divisor* desselben. Dieser Ausdruck oder der ihm gleichbedeutende $\frac{a}{b}$ kann jedoch auch ein *Bruch* (fractio) genannt werden, und dann heisst a der *Zähler* (numerator) und b der *Nenner* (denominator) des Bruches. Endlich kann man $a : b$ als ein (*geometrisches*) *Verhältniss* (ratio, rapport) auffassen, und wieder a den *Antecedent*, b den *Consequent* dieses Verhältnisses (von a *zu* b) nennen.

Zwischen diesen verschiedenen Namen besteht zwar ein leiser Unterschied hinsichtlich ihrer Bedeutung; sie drücken ursprünglich ganz verschiedene Nüancen ein und desselben Begriffes aus. Die Verschiedenheit dieser Bedeutungen tritt jedoch erst zu Tage, wenn man auf die Benennung der Zahlen Rücksicht nimmt, in welchem Betreff das Kapitel über die benannten Zahlen im zweiten Bande zu vergleichen sein wird. Für die Zwecke der Rechnung ist die Wahl dieser Ausdrucksweisen in der That völlig gleichgültig.

Die Rechnungsart, durch welche die Zahl $x = \frac{a}{b}$ gefunden wird, heisst *Division* (Theilung, Messung), und man sagt, es werde a durch b getheilt, oder man dividire mit b in a. —

Mit Rücksicht auf die Bedeutung des Productes:

$$b \,.\, x = \underset{\frown \atop 1}{b} + \underset{\frown \atop 2}{b} + \cdots + \underset{\frown \atop x}{b},$$

sowie auch des Productes:

$$x \,.\, b = \underset{\frown \atop 1}{x} + \underset{\frown \atop 2}{x} + \underset{\frown \atop 3}{x} + \cdots + \underset{\frown \atop b}{x}$$

erkennt man also, dass „eine Zahl a durch eine andere b dividiren“ heisst: die erstere a in lauter Glieder b zerfällen, und zählen, wie viele es deren gibt (Messung), oder auch, nach Belieben: jene erste Zahl a in b einander gleiche Summanden zerlegen und einen derselben nehmen (Theilung). —

§ 33. Das Radiciren und das Logarithmiren.

Die eine Umkehrung der Aufgabe der Elevation liegt vor, wenn die Basis x einer Potenz gesucht werden soll, während der Exponent b und der Werth a derselben bekannt sind; sie besteht also darin, dass man die Gleichung auflöst:

$$x^b = a,$$

und dies geschieht, indem man schreibt:

$$x = \sqrt[b]{a}.$$

Man spricht: x gleich b^{te} Wurzel aus a, und nennt x eine *Wurzel* (radix, racine, root), und zwar a den *Radicanden* oder die *Wurzelgrösse*, und b den *Wurzelexponenten*. Die Operation, durch welche die Wurzel x ausgerechnet wird, heisst *Wurzelausziehung* oder *Radication* (auch Extraction); man sagt, es werde aus a die b^{te} Wurzel *gezogen*, oder a mit b *radicirt*.

Man theilt die Wurzeln gewöhnlich nach ihrem Exponenten ein in zweite oder *Quadratwurzeln*, dritte oder *Cubicwurzeln*, und höhere Wurzeln. Den Wurzelexponenten 2 pflegt man weder zu schreiben, noch auszusprechen, und umgekehrt, wenn kein Wurzelexponent angegeben ist, so hat man denselben gleich 2 anzunehmen [cf. § 41.]. Unter der Wurzel aus a schlechthin versteht man also die Quadratwurzel aus a, oder es bedeutet:

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}.$$

In allen andern Fällen hat man ausdrücklich den Exponenten in die Oeffnung des Wurzelzeichens zu setzen. Das *Wurzelzeichen* $\sqrt{}$ ist purch Deformation aus dem Anfangsbuchstaben des Wortes radix entstanden.

Hat man die b^{te} Wurzel aus a auszuziehen, so heisst dies also, man solle a in b gleiche Factoren zerlegen, und einen derselben nehmen — wie man sofort erkennt, wenn man der Bedeutung der Potenz: $x^b = \underset{1}{x} \cdot \underset{2}{x} \ldots \underset{b}{x}$ eingedenk ist. —

Bei der andern Umkehrung der Elevationsaufgabe wird der Exponent einer Potenz gesucht, welche, mitsammt der Basis derselben, ihrem Werthe nach bekannt ist. Diese Aufgabe erfordert die Berechnung derjenigen Zahl x, welche die Gleichung erfüllt:

$$b^x = a.$$

Man schreibt nun die Auflösung dieser Gleichung:

$$x = \overset{b}{\log}\, a,$$

und spricht: x gleich von der Basis b Logarithmus (von) a, oder: Logarithmus von a in Bezug auf die Basis b, oder am besten: von a *nach* b. Hier heisst x ein *Logarithmus*, und zwar a der *Numerus* desselben, oder der *Logarithmand*, und b die *Logarithmenbasis*, oder die *Grundzahl des Logarithmensystems*. Die Operation, durch welche man x ausgerechnet erhält, heisst *Logarithmenberechnung* oder *Logarithmiren*, und zwar sagt man, es werde von a der Logarithmus bezüglich b genommen, oder a nach b logarithmirt.

Den Logarithmus von a nach b nehmen, heisst also: a in lauter Factoren b zerlegen, und zählen, wie viele es deren gibt, und braucht man, um dies einzusehen, sich nur an die Bedeutung der Potenz b^x zu erinnern.

Man übersehe nicht, dass bei den zwei letzten Ausdrücken: $\sqrt[b]{a}$ und $\overset{b}{\log}\, a$ das bekannte Operationsglied b *vor* dem bekannten Ergebniss a (der directen Operation) gesprochen und geschrieben wird, während bei den vorhergehenden Ausdrücken $a - b$ und $a : b$ das umgekehrte stattfindet.

Die beiden Umkehrungen der Elevation: das Radiciren und das Logarithmiren werden bisweilen gemeinschaftlich mit dem Namen des Depotenzirens bezeichnet; passender möchte wohl der Ausdruck „Depression" erscheinen.

§ 34. Ueberblick der Operationen, Ausdrücke und Operationsglieder.

Die sieben algebraischen Operationen, welche wir nun vollends eingeführt haben, sind in übersichtlicher Zusammenstellung:

Algebraische Operationen

		Directe	Inverse
1te Stufe:		Addition	Subtraction
2te Stufe:		Multiplication	Division
3te Stufe:	Elevation	Potenziren	Radiciren
		Exponenziren	Logarithmiren

Von einer Operation und ihren Umkehrungen sagt man, dass sie auf derselben *Stufe* stehen, und bestimmen so die drei directen Operationen successive die erste, zweite, dritte Operationsstufe.

Da jede Operation sich auch äusserlich durch eine eigenthümliche Verknüpfungsweise der in ihr verwendeten Zahlen zu erkennen gibt, so werden die Resultate dieser Operationen verschiedenartige *Ausdrücke* vorstellen. *Darnach muss es überhaupt sieben Arten von algebraischen Ausdrücken geben*, als da sind:

Summe, Product, Potenz,
Differenz, Quotient, Wurzel und Logarithmus,

oder, nach den Stufen geordnet:

Summe, Differenz,
Product, Quotient,
Potenz, Wurzel und Logarithmus;

in Zeichen etwa:

$$(48) \quad \begin{cases} x + y, & x - y \\ x \,.\, y, & \frac{x}{y} \\ x^y, & \sqrt[y]{x}, \quad \overset{y}{\log}\, x\,. \end{cases}$$

Ueber die Wahl dieser Benennungen kann wenigstens kein Zweifel obwalten, so lange Zahlen nur durch *eine* Art von Operationen miteinander verknüpft erscheinen. Anders bei zusammengesetzteren Ausdrücken, wo mehrere Operationen in Betracht kommen. Hier hat nun folgende Ueberlegung den Ausschlag zu geben:

Ein beliebiger, wenn auch noch so complicirter Zahlenausdruck wird immer dadurch entstanden sein, dass man verschiedene Zahlen durch irgend welche von jenen Operationen miteinander verknüpft. Oft sind dabei verschiedene Theile des Ausdruckes durch Nebenrechnungen apart auszurechnen, und kann die Reihenfolge dieser Nebenrechnungen theils eine beliebige, theils eine vorgeschriebene sein. Immer aber wird nach der im Ausdruck selbst enthaltenen Vorschrift eine bestimmte Operation die letzte sein müssen, und nach diesem Gesichtspunkt werden wir die Ausdrücke einzutheilen haben. Bei der Charakterisirung eines Ausdruckes ist die zutreffende Bezeichnung gefunden, sobald die Natur derjenigen Rechnungsoperation erkannt ist, durch welche der Zahlenwerth des Ausdruckes *in letzter Instanz* aus den ihn zusammensetzenden Zahlen erhalten wird. (Cf. § 75.)

Eine Zahl kann nun aber nicht nur innerlich, in der Hinsicht betrachtet werden, wie sie sich aus andern Zahlen zusammensetzt, sondern auch äusserlich in Hinsicht auf die Art und Weise, wie sie mit andern Zahlen verknüpft erscheint. *Darnach haben wir ursprünglich* (so lange wenigstens der erste und der zweite Summand als Augend und Increment unterschieden werden) $7 \times 2 = 14$ *Arten von Operationsgliedern zu merken*, indem eine Zahl nur entweder erstes oder zweites Operationsglied (Element) in einer der sieben Elementaroperationen sein wird. Nimmt man aber auf das Commutationsgesetz der Addition Rücksicht, so sind jene beiden Zahlen einfach als Glieder zu bezeichnen und bleiben nur mehr dreizehn Arten; geht man auch

nicht auf die Unterscheidung von Multiplicand und Multiplicator ein, indem man diese schlechtweg als Factoren auffasst, so bleiben nur mehr zwölf Arten von Operationsgliedern übrig.

Auf die Frage, was für ein Operationsglied eine vorliegende Zahl, die als Bestandtheil eines Ausdruckes auftritt, sei, wird daher immer eine von den nachstehenden zwölf Antworten zu geben sein:

Summand,	Factor,	Potenzbasis,	Potenzexponent;
Minuend,	Subtrahend,	Dividend,	Divisor,
Radicand,	Wurzelexponent,	Logarithmand,	Logarithmenbasis.

Die Zahl a tritt z. B. als solches Operationsglied auf in den nachstehenden zwölf Elementarausdrücken:

$$(49)\quad \begin{cases} a+n, & a-n, & n-a, \\ a\,.\,n, & \frac{a}{n}, & \frac{n}{a}, \\ a^n,\ n^a, & \sqrt[n]{a},\ \sqrt[a]{n}, & \overset{n}{\log}\, a,\ \overset{a}{\log}\, n. \end{cases}$$

Für manche Zwecke ist es nützlich, diese Operationsglieder noch in zwei Klassen einzutheilen, nämlich in active und passive — wenn ich die von Liersemann wie mir scheint glücklich gewählten Ausdrücke adoptire.

Gewissermassen als *passive* Zahl, d. h. als solche, *an* welcher gerechnet werden soll, pflegt man anzusehen: das erste Glied (Augend), den ersten Factor (Multiplicand), die Potenzbasis (Dignand), den Minuend, Dividend, Radicand und Logarithmand.

Als *active* Zahl, d. h. als solche, *mit* welcher gerechnet werden soll, gilt: das zweite Glied (Increment), der zweite Factor (Multiplicator), der Potenzexponent, Subtrahend, Divisor, Wurzelexponent und die Logarithmenbasis.

Bezeichnet man die passive Zahl mit p, die active mit a, so wird man aus dem Anblick des Schema's:

$$\begin{matrix} p+a, & p\,.\,a, & p^a, & \\ p-a, & \frac{p}{a}, & \sqrt[a]{p}, & \overset{a}{\log}\, p, \end{matrix}$$

welches die Resultate der sieben Operationen noch einmal zusammenstellt, sofort eine Uebersicht über diese Benennungen erhalten.

Die angegebene Unterscheidung ist zwar selbstverständlich eine willkürliche; dass sie jedoch dem Sprachgebrauche angemessen ist, wird jeder grammatikverständige schon aus der Endigung der namenbildenden Substantiva erkennen. Diese ist bei den Namen passiver Zahlen fast durchweg dem Participium futuri passivi (Gerundivum) entlehnt; bei den activen Zahlen, die der Rechner förmlich personificirt oder mit sich selbst identificirt denkt, ist diese Endung meist dem Participium praesentis entliehen. (Eine wirkliche Ausnahme bildet allein das Wort „Subtrahend“, welches demnach eher durch „Subtractor“ oder „Subtrahent“ zu ersetzen wäre.) —

§ 35. Die Transpositionsregeln.

Die im vorstehenden besprochenen acht Gleichungen sind in übersichtlicher Zusammenstellung:

$$(50)\qquad \begin{cases} x+b=a \quad , & x=a-b, \\ x\,.\,b=a \quad , & x=\frac{a}{b}, \\ x^b=a \quad , & x=\sqrt[b]{a}, \\ b^x=a \quad , & x=\overset{b}{\log}\,a. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen sind immer die zwei nebeneinander stehenden als vollkommen *gleichbedeutend* anzusehen; sie bedingen sich gegenseitig; die eine von ihnen ist gewissermassen eine *Uebersetzung* der andern in eine neue Ausdrucksweise. So oft z. B. $x+b=a$ ist, dürfen wir dafür schreiben: $x=a-b$ und umgekehrt; wenn $x=a-b$ gesetzt wird, so soll dies nichts anderes heissen, als dass $x+b=a$ ist.

Die gedachte Uebersetzung dient jedoch einem vernünftigen Zwecke: man beabsichtigt durch dieselbe, *sich an die Natur des Rechengeschäftes zu erinnern*, durch welches die Unbekannte in jedem vorliegenden Falle gefunden werden kann. Die Gleichung $x+b=a$ zum Beispiel sagt zwar ebenso gut aus, dass x die Zahl ist, die, zu b addirt, a liefert; man findet aber die gedachte Zahl keineswegs durch eine Addition, deren Operationszeichen doch allein in dieser ersteren Gleichung vorkommt, sondern durch eine ganz andere Operation. Man findet sie durch eine Subtraction und gerade um auf letzteres hinzuweisen, dient nun das Minuszeichen, welches man als das Zeichen der Subtraction dem Gedächtnisse einprägt.

Es ist übrigens rathsam, sich für die erwähnte Uebersetzung Regeln zu merken, nach welchen stets aus der einen von beiden Gleichungen die andre mit Sicherheit abzuleiten ist. Diese Regeln können so ausgesprochen werden:

(A) Für den Fall, dass die eine Seite der Gleichung eine Summe oder eine Differenz ist:

Jede Zahl, welche ein Summand von dem Ausdruck auf der einen Seite des Gleichheitszeichens ist, kann als Subtrahend auf die andere Seite des Gleichheitszeichens geschrieben werden. Der auf dieser letzteren Seite schon vorher befindlich gewesene Ausdruck wird hiedurch selbstverständlich zu einem Minuenden gestempelt, gleichwie z. B. derjenige, der einen Untergebenen bekommt, dadurch eo ipso zum Vorgesetzten wird. Umgekehrt auch: *Jeder Subtrahend von der einen Seite einer Gleichung kann als Summand auf die andere Seite gebracht werden.*

(B) Für den Fall, dass die eine Seite der Gleichung ein Product oder ein Quotient ist:

Jeder Factor von der einen Seite einer Gleichung kann als Nenner unter die andre Seite (oder als Divisor hinter dieselbe) *geschrieben werden*, und vice versa:

Jeder Nenner oder Divisor des Ausdruckes auf einer Seite der Gleichung darf als Factor auf die andre Seite derselben gesetzt werden.

(C) Wenn die eine Seite der Gleichung eine Potenz oder eine Wurzel ist, besteht die Erlaubniss:

Jede Zahl, welche als Potenzexponent über der einen Seite einer Gleichung steht, kann als Wurzelexponent über die andre Seite geschrieben werden, und vice versa.

(D) Wenn endlich die eine Seite der Gleichung ein Exponential (d. i. abermals eine Potenz) oder ein Logarithmus ist, so ist die Regel anwendbar:

Jede Zahl, welche Potenzbasis von der einen Seite einer Gleichung ist, kann als Basis eines Logarithmus vor die andre Seite geschrieben werden, wobei indessen der Exponent auf die Zeile herabfallen muss. Und umgekehrt:

Jede Logarithmenbasis kommt hinüber als Potenzbasis, indem sie die andre Seite der Gleichung als einen Exponenten gewissermassen auf die Schulter nimmt.

Selbstverständlich fallen dabei, sobald eine Zahl von der einen auf die andre Seite der Gleichung geschafft wird, auch die Operationszeichen weg, durch welche sie dort mit andern Zahlen verbunden war; hier dagegen müssen zugleich die erforderlichen neuen Zeichen passend angebracht werden. — Aus dem vorstehenden ist zu ersehen, dass die mehrerwähnte Uebersetzung nicht nur eine solche ist im Sinne des Philologen oder Sprachforschers; sie ist auch ein Uebersetzen im Sinne des Fährmanns, der eine Person über einen Strom setzt; dabei wird nämlich über das Gleichheitszeichen eine Zahl hinübergeschafft, welche als ein Operationsglied mit einer andern Zahl verbunden war.

Das Hinüberschaffen eines Operationsgliedes nach einer von diesen Regeln wird auch das *Transponiren* desselben genannt. Nicht selten auch wird dieses Geschäft zugleich mit einem Rückwärtslesen der ganzen Gleichung ausgeführt, sodass eigentlich die transponirte Zahl allein stehen geblieben und alle übrigen Zahlen von diesseits nach jenseits oder umgekehrt gekommen sind.

Die Regeln (A) bis (D) mögen demnach die *Transpositionsregeln* genannt werden.

Weil nach ihnen die Gleichungen (linker Hand) in (50) nach der Unbekannten x aufgelöst werden, nämlich die Unbekannte auf einer Seite der Gleichung

isolirt und durch die gegebenen Zahlen ausgedrückt wird, so könnte man sie auch nicht unpassend als „Auflösungsregeln“ bezeichnen.

Auf Grund der Transpositionsregeln sind nun jedesmal die drei nebeneinander stehenden von den neun folgenden Gleichungen äquivalent:

$$(51)\quad \begin{cases} a = b + c, & b = a - c, & c = a - b, \\ a = b \,.\, c, & b = \dfrac{a}{c}, & c = a : b, \\ a = b^c, & b = \sqrt[c]{a}, & c = \overset{b}{\log}\, a, \end{cases}$$

und zieht also irgend eine derselben je die zwei andern nach sich. Man thut gut, sich in dem Uebergang von der einen Ausdrucksweise zur andern eine grosse Uebung zu erwerben, da diese schon ein gutes Theil der eigentlichen Rechenkunst ausmacht.

Der Uebergang von der zweiten zur dritten Gleichung ist vorerst je durch die erste zu vermitteln.

§ 36. Anwendung zur Auflösung der reinen Gleichungen.

Durch die obigen Regeln ist man nun schon in den Stand gesetzt, sämmtliche Aufgaben zu lösen, welche auf die Auflösung einer Gleichung hinauslaufen, in der die Unbekannte nur ein einziges mal vorkommt.

Eine solche Gleichung wird eine *reine* genannt, und es handelt sich dabei stets darum, die bekannten Zahlen durch geeignetes Transponiren von der Unbekannten x nach und nach zu trennen, bis die letztere auf der einen Seite der Gleichung sich nur noch allein befindet oder isolirt erscheint und auf der andern Seite ein Ausdruck steht, der aus lauter gegebenen Zahlen zusammengesetzt ist und folglich ohne weiteres wird berechnet werden können, soferne man nur im Stande ist, die angedeuteten Operationen numerisch auszuführen.

Dabei muss es indessen auffallen, dass wir bis jetzt nur eine solche Zahl zu transponiren vermögen, welche entweder als Summand oder als Subtrahend, als Factor oder als Divisor, als Potenzexponent oder als Wurzelexponent, endlich als Potenzbasis oder aber Logarithmenbasis mit einer andern Zahl verbunden ist. Es gibt aber ausser den genannten acht noch vier andere Operationsglieder (cf. § 34.), als da sind: Minuend, Dividend, Radicand, Logarithmand, welche nach jenen Regeln mit nichten transponirt werden können.

Es hat deshalb den Anschein, als ob es in Gleichungen von der folgenden Form:

$$(52)\quad a - x = b, \quad \frac{a}{x} = b, \quad \sqrt[x]{a} = b, \quad \overset{x}{\log}\, a = b$$

nicht möglich wäre, die Zahl a von x zu trennen und somit die Auflösung zu bewerkstelligen. Auf einem Umwege jedoch, indem man nämlich auf den Einfall kommt, anstatt des einen Schrittes deren zwei zu machen und zwar statt a zuerst x und dann b zu transponiren, lässt auch dieses sich erreichen. Dadurch entsteht, indem zuerst x transponirt wird, respective:

$$a = b + x, \qquad a = b \,.\, x, \qquad a = b^x, \qquad a = x^b;$$

alsdann, wenn b herübergeschafft und zugleich das Ergebniss rückwärts gelesen wird, erhält man:

$$(53) \qquad x = a - b, \qquad x = \frac{a}{b}, \qquad x = \overset{b}{\log}\, a, \qquad x = \sqrt[b]{a},$$

und dies sind in der That die gewünschten Auflösungen.

Man könnte wohl es für die Zukunft dahin bringen, dass auch diese Ergebnisse sich jedesmal mit *einem* Schlage herstellen lassen, indem man den Uebergang von den Gleichungen (52) direct zu denen (53) unterstützte durch das Memoriren folgender drei Regeln, die sich noch an die obigen vier Transpositionsregeln anreihen:

(E) *Ein Minuend der einen Seite einer Gleichung kommt auf die andre Seite wiederum als Minuend.*

(F) *Ein Dividend wieder als Dividend.*

(G) *Ein Radicand wird transponirt als Logarithmand und ein Logarithmand als Radicand.*

Indessen muss man bei Anwendung dieser Regeln mit einiger Vorsicht darauf bedacht sein, dass keine Verwechselung der Geschäfte entstehe, da wir später lernen werden, einen Minuend auch als Glied, einen Zähler als Factor, endlich einen Radicanden als Potenzbasis zu betrachten, und je in dieser letzteren Eigenschaft auf eine von der vorigen verschiedene Weise zu transponiren.

In der That werden nach Erledigung des dritten Bandes die drei ersten Gleichungen (52) sich auch so auffassen oder schreiben lassen:

$$a + (-x) = b, \qquad a \cdot \frac{1}{x} = b, \qquad a^{\frac{1}{x}} = b,$$

und muss darnach, wenn nun a in dieser neuen Eigenschaft transponirt wird, entstehen:

$$-x = b - a, \qquad \frac{1}{x} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{1}{x} = \overset{a}{\log}\, b.$$

Für die vierte Gleichung (52) aber kann merkwürdiger Weise etwas ähnliches nicht gemacht werden, und liegt dies, wenn man genauer zusieht, daran, dass keine Function f existirt, die für beliebige a und b die Eigenschaft hätte, welche die Gleichung ausspricht: $f\left(\sqrt[b]{a}\right) = \sqrt[a]{b}$, indem ja in dieser Gleichung, wenn a^n für a und $b \,.\, n$ für b gesetzt wird, die eine Seite sich von n unabhängig zeigt, die andre nicht (cf. § 55.).

Kommt in einer gegebenen Gleichung das Zeichen der Unbekannten mehrmals vor, so reichen die obigen Transpositionsregeln nicht mehr aus, dieselbe zu ermitteln. Zu diesem Ziele wird man jedoch in vielen Fällen noch dadurch gelangen können, dass man durch Anwendung der anderweitig bekannten Rechengesetze, namentlich durch *Vereinigung* nach dem Distributionsgesetze, die aufzulösende Gleichung auf eine der bereits erledigten Formen zurückführt.

Obwohl wir auf diese Aufgaben erst später systematisch eingehen können, ist es doch zu empfehlen, dass man sich darin baldmöglichst grosse Uebung verschaffe.

§ 37. Nothwendigkeit der neuen Benennungen.

Die acht Gleichungen (50) enthalten die Begriffserklärung der vier inversen Operationen und damit auch die ihrer Ergebnisse. Sie lehren uns, dass eine *Differenz* nichts anderes ist, als das unbekannte Glied einer Summe, deren Werth und deren anderes Glied gegeben ist; und zwar nimmt der Werth der Summe den Namen Minuend und der bekannte Summand den Namen Subtrahend der Differenz an.

Ebenso zeigen sie uns, dass unter einem *Quotienten* der unbekannte Factor eines Productes zu verstehen ist, dessen Werth und dessen anderer Factor gegeben sind; das Product wurde Dividend, der bekannte Factor wurde Divisor des Quotienten genannt.

In ähnlicher Weise ist eine *Wurzel* ursprünglich die unbekannte Basis, ein *Logarithmus* der gesuchte Exponent einer Potenz, deren Werth und anderes Operationsglied bekannt sind und im ersten Fall die Namen Radicand und Wurzelexponent, im zweiten Numerus und Logarithmenbasis annehmen.

Zunächst wird sich hier die Frage aufdrängen, ob dieser Namenwechsel wirklich Bedürfniss, ob überhaupt eine solche Fülle von Namen empfehlenswerth sei. In der That sieht man leicht, dass die alten Namen nicht wohl ausreichen können, weil sich die Ergebnisse der inversen Operationen gar oft von neuem als Operationsglieder mit andern Zahlen verknüpft darbieten. Es würde nun eine heillose Verwirrung erzeugen, wenn man dergleichen Zahlen einmal als Glieder von Summen (oder Factoren von Producten etc.), die *nicht*-dastehen und zugleich als Glieder von Summen etc., welche in einem vorliegenden Ausdruck angegeben sind, zu bezeichnen hätte. Ein Beispiel macht dies vollkommen deutlich. Ohne die Namen Differenz, Quotient, etc. wäre etwa in dem Ausdrucke:

$$(a-b)+c+\frac{d}{e}\cdot f+\frac{(g-h)-\frac{k}{i}\cdot j}{l-m}\cdot n$$

der Bestandtheil $a - b$ einerseits zu bezeichnen als das (bis zur Ausführung der Subtraction noch unbekannte) Glied einer Summe, deren Werth a und deren anderes Glied b ist, welche Summe sich hier nicht angeschrieben findet; zugleich aber auch als das Glied der vorstehenden viergliedrigen Summe, deren zweites Glied c, deren drittes $\frac{d}{e} \cdot f$ ist etc. Ferner würde $\frac{d}{e}$ einerseits Factor eines nicht angeschriebenen Productes zu nennen sein, dessen anderer Factor e ist, und doch erscheint es zugleich als der eine Factor eines Productes, als dessen andrer Factor sich die Zahl f angegeben findet u. s. w., woraus genugsam zu ersehen ist, welch' eine fruchtbare Quelle von Missverständnissen eine übergrosse Sparsamkeit mit Benennungen solchergestalt bilden würde. Die neuen Benennungen sind somit völlig gerechtfertigt.

§ 38. Concise Definition der inversen Rechnungsergebnisse. Probe der inversen Operationen.

Hinsichtlich der hiemit neu eingeführten Begriffe drängt sich übrigens die Bemerkung auf, dass zur Erklärung eines jeden von ihnen im obigen stets *zwei* Gleichungen benutzt worden sind. Der Begriff einer Differenz, eines Quotienten, einer Wurzel und eines Logarithmus wurde im vorstehenden erklärt durch das Zusammenbestehen oder die Coexistenz von jedesmal zwei Gleichungen: wenn $x + b = a$ war, so wurde $x = a - b$ genannt etc. und man kann sich nun die Frage stellen, ob nicht die Definition jener Ausdrücke, ähnlich wie die von Summe, Product und Potenz, durch eine einzige Gleichung ausgedrückt werden könnte? Dies lässt sich in der That bewerkstelligen, und zwar erhält man eine solche Gleichung, indem man immer aus der zweiten von jenen beiden Gleichungen den Werth von x entnimmt und in die erste derselben einsetzt, indem man mit andern Worten schon in der ersten Gleichung von dem Namen Gebrauch macht, welcher für die Zahl x durch die zweite Gleichung eingeführt ist. Auf diese Weise ergibt sich nun:

$$(54) \qquad \begin{cases} (a - b) + b = a\,, \\ \frac{a}{b} \cdot b = a\,, \\ (\sqrt[b]{a})^b = a\,, \\ b^{\overset{b}{\log} a} = a\,, \end{cases}$$

Diese Gleichungen, als Sätze ausgesprochen, lehren:

Eine Differenz, zu ihrem Subtrahend addirt, gibt den Minuend.

Ein Bruch, mit seinem Nenner multiplicirt, gibt den Zähler.

Eine Wurzel auf die Potenz ihres Exponenten erhoben liefert den Radicanden.

Ein Logarithmus zu seiner eigenen Basis exponenzirt liefert den Numerus.

Und es drücken diese Sätze die Fundamentaleigenschaft der in Rede stehenden Operationsergebnisse aus, welche unmittelbar in der Definition derselben enthalten ist. Sie können auch selber in Form von Begriffserklärungen ausgesprochen werden, nämlich folgendermassen:

Unter der Differenz zweier Zahlen versteht man diejenige Zahl, welche zu der zweiten von ihnen, dem sogenannten Subtrahenden, addirt die erste von ihnen, den sogenannten Minuenden, liefert.

Unter dem Quotienten zweier Zahlen versteht man diejenige Zahl, welche, wenn sie mit der zweiten, dem Divisor, multiplicirt wird, alsdann die erste, das ist den Dividenden, liefert.

Unter der irgendwievielten Wurzel (d. i. mit einem gewissen Exponenten) *aus einer Zahl versteht man diejenige Zahl, welche auf die Potenz des Wurzelexponenten erhoben den* [*erwähnten*] *Radicanden gibt.*

Unter dem Logarithmus einer Zahl (in Bezug auf eine gewisse Grundzahl) versteht man diejenige Zahl, welche, zu dieser Grundzahl exponenzirt, jenen Numerus liefert, oder auch anders zu reden: *Der Logarithmus einer Zahl ist der Exponent derjenigen Potenz seiner Basis, welche gleich dem Logarithmand ist.*

Auf die kürzeste Art wohl kann man diese Begriffe wie folgt erklären:

$a - b$ *bedeutet diejenige Zahl, welche zu* b *addirt* a *gibt.*

$\frac{a}{b}$ *bedeutet diejenige Zahl, welche mit* b *multiplicirt* a *liefert.*

$\sqrt[b]{a}$ *bedeutet eine solche Zahl, die auf die* b^{te} *Potenz erhoben* a *gibt.*

$\overset{b}{\log}\, a$ *bedeutet eine solche Zahl, welche zu* b *exponenzirt* a *liefert* (d. i. den Exponenten derjenigen Potenz von b, welche $= a$ ist).

Indem wir die vorstehenden Definitionen erstmalig aussprechen, drängt sich uns sogleich eine wichtige Frage auf, die schon veranlasst wird durch die grammaticalische Fassung der letzten Sätze. Sind wir berechtigt zu sagen „diejenige Zahl, welche", oder müssen wir sagen „eine solche Zahl, welche"? Wenn das erstere zulässig sein soll, so muss sich nachweisen lassen, dass es nur *eine einzige* Zahl gibt, welche die verlangte Eigenschaft besitzt; dagegen ist das letztere geboten, sobald mehrere derartige Zahlen existiren. Ja, wir müssen noch weiter gehen und erst feststellen, ob es denn *überhaupt eine* Zahl von der geforderten Eigenschaft gibt. Da es leicht ist, Anforderungen zu stellen, welche nicht erfüllbar sind, so könnte in der That gar wohl der Fall eintreten, dass unter den bis jetzt eingeführten die gewünschte Zahl fehlt. Diese Fragen sollen in den beiden nächsten Paragraphen eingehend beantwortet werden.

Reichliche Einübung der vorstehenden Definitionen an Beispielen st unerlässlich. —

Die Gleichungen (54) geben endlich auch noch an, wie die *Probe* einer inversen Operation mittelst einer directen Rechnungsoperation gemacht werden kann, wie z. B. die Richtigkeit eines Subtractionsergebnisses geprüft werden kann durch eine Addition etc., und zwar:

Um die *Probe einer Subtraction* zu machen, kann man den Subtrahenden zu dem Rest addiren; wenn die Rechnung richtig war, so muss alsdann der Minuend herauskommen.

Um die *Probe einer Division* zu machen, multiplicire man den Quotienten mit dem Divisor; alsdann muss der Dividend herauskommen.

Eine *Wurzelausziehung* wird geprüft, indem man die Wurzel mit dem Exponenten potenzirt, wobei man den Radicanden erhalten muss.

Eine *Logarithmenberechnung* wird endlich geprüft, indem man die Basis in die Potenz des Logarithmus erhebt und zusieht, ob wirklich der Numerus entsteht. —

§ 39. Ausführbarkeit der inversen Operationen.

In Bezug auf die im vorigen Paragraphen angeregte Frage besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen den directen und den inversen Operationen. Bei jenen ist das Resultat dadurch charakterisirt, dass ein bestimmter Weg zur Bildung desselben angegeben wird, und zwar ist dieser Weg stets practicabel; die ganz unzweideutige Vorschrift zur Bildung einer Summe, eines Productes, einer Potenz lässt sich immer befolgen, da sie im Grunde nur das Postulat voraussetzt, dass ein Zeichen $(+1)$ wiederholt gesetzt werden könne. M. a. W.: Da die Addition in einem Hinzufügen von Einheiten besteht, und da die Multiplication sowie die Potenzirung eigentlich nichts anderes als fortgesetzte (wiederholte) Additionen sind, so müssen — wie auch schon früher erwähnt wurde — die drei directen Operationen, wenn sie an natürlichen Zahlen vorgenommen werden sollen, stets *ausführbar* sein, und als Resultat immer wieder eine natürliche Zahl liefern, welche überdies jederzeit eine *eindeutig bestimmte* ist.

Ganz anders verhält es sich bei den inversen Operationen. Hier dürfen, falls die Zahl x wirklich existiren soll, die Operationsglieder a und b nicht etwa beliebig gegeben werden; denn die Gleichung $x = a - b$, $x = \frac{a}{b}$, etc. war resp. an die Voraussetzung: $x + b = a$, $x . b = a$, etc. geknüpft, und es muss also, wenn man die Werthe für a und b auf's geradewohl annimmt, erst nachgewiesen werden, ob eine Gleichung von der letzteren Form auch wirklich bestehen kann.

Die Zahl x ist hier keineswegs definirt durch ein zu ihrer Bildung vorgeschriebenes Verfahren, welches wegen seiner von vornherein ersichtlichen Ausführbarkeit uns des Beweises für die Möglichkeit oder das Vorhandensein des Resultates x überhebt. Bei den vorliegenden inversen Operationen ist vielmehr das Resultat charakterisirt durch gewisse an dasselbe gestellte Anforderungen, und muss nun untersucht werden, ob letztere sich überhaupt, und dann, auf wie viel Arten sie sich erfüllen lassen.

Es zeigt sich nun sogleich, dass es in vielen Fällen in der That keine Zahl von den Eigenschaften der gesuchten gibt und also die Ausführung der betreffenden inversen Operationen unmöglich ist.

Die Aufgabe der Subtraction zum Beispiel ist nur auflösbar, und die Differenz $a - b$ stellt nur dann eine wirklich vorhandene oder angebbare natürliche Zahl vor, hat also bis jetzt nur dann einen Sinn, wenn der Minuend eine von den folgenden Zahlen ist:

$$a = b + 1, \quad b + 2, \quad b + 3, \quad b + 4, \ldots$$

Der Quotient $\frac{a}{b}$ hat ebenso nur dann einen Sinn, und „geht die Division auf“, wenn der Dividend:

$$a = b, \quad 2b, \quad 3b, \quad 4b, \ldots$$

ist. Die Wurzel $\sqrt[b]{a}$ hat nur einen Sinn, wenn:

$$a = 1, \quad 2^b, \quad 3^b, \quad 4^b, \ldots$$

ist. Endlich gibt es nur dann eine Zahl, welche $\overset{b}{\log}\, a$ genannt werden darf, wenn:

$$a = b, \quad b^2, \quad b^3, \quad b^4, \ldots$$

ist.

Wenn nämlich x überhaupt eine Zahl sein soll in dem bisher stets festgehaltenen Sinne des Wortes, so muss es entweder $= 1$ oder $= 2, 3, 4, \ldots$ sein. Aus dieser Annahme folgen aber sofort die vorstehenden Behauptungen nach den Transpositionsregeln des § 35.; z. B. für $a - b = 1, 2, \ldots$ hat man nach jenen in der That: $a = b + 1,\ b + 2, \ldots,$ und so weiter. —

Da nun die angegebenen Reihen von Zahlen, wenn b irgend einen bestimmten Werth hat, nicht alle möglichen natürlichen Zahlen enthalten, wovon es genügt, sich nur an einem Beispiel zu überzeugen, so erkennt man sogleich, in welchen Fällen die Aufgabe einer von diesen vier inversen Operationen unmöglich sein wird:

Die Subtraction ist darnach *unmöglich, sobald der Minuend nicht grösser als der Subtrahend ist.*

Die Division ist unmöglich, so oft der Dividend nicht gerade ein Vielfaches (Multiplum) des Divisors ist.

Auch die Radicirung und Logarithmirung sind in weitaus der Mehrzahl der Fälle unausführbar.

Damit die Radicirung ausführbar sei, muss der Radicand ein Exponential des Wurzelexponenten, und damit es die Logarithmirung sei, muss der Numerus eine Potenz der Basis sein.

Bei allen Untersuchungen im ersten Abschnitt des gegenwärtigen und auch des folgenden Kapitels werden wir nun, so oft ein Buchstabenausdruck vorkommt, der unter Beihülfe inverser Operationen gebildet ist, die vorstehenden Bedingungen als erfüllt annehmen. Alle Relationen zwischen allgemeinen Zahlen, bei denen inverse Operationen ins Spiel kommen, werden daher vorerst nur eine *beschränkte Gültigkeit* haben. Die ausdrückliche Anführung ihrer Gültigkeitsbedingungen ist trotzdem hier aus zwei Gründen unnöthig, einerseits nämlich, weil sie nach dem vorangeschickten jederzeit leicht aus dem unmittelbaren Anblick der Ausdrücke selbst entnommen werden kann, und andererseits, weil es später ohnehin gelingen wird, die Sätze (zum Theil allerdings mit gewissen Modificationen) von den ihre Gültigkeit beschränkenden Bedingungen zu befreien. Einstweilen jedoch verlieren die Sätze, sobald diese Bedingungen nicht erfüllt sind, nicht allein ihre Geltung, sondern überhaupt jeglichen Sinn, und umgekehrt sind sie stets gültig, insoferne sie nur einen Sinn besitzen, d. h. insoferne sie über wirklich vorhandene Zahlen etwas aussagen. —

§ 40. Eindeutigkeit derselben.

Wir wenden uns nunmehr zur Untersuchung der zweiten Frage, auf wie viele Arten eine inverse Operation ausgeführt werden könne, falls, wie gesagt, sie überhaupt nur ausführbar ist. Hier gilt der Satz:

Es gibt immer nur eine einzige Zahl, welche mit einer gegebenen Zahl addirt, multiplicirt, potenzirt oder exponenzirt ein bestimmtes Resultat liefert, oder: *die inversen Operationen sind eindeutig*; die Ausdrücke $a - b$, $\frac{a}{b}$, $\sqrt[b]{a}$, $\overset{b}{\log}\, a$ stellen bei gegebenen Werthen von a und b stets eine einzige ganz bestimmte Zahl x vor.

Hierbei ist indessen das schon Einleitung Nr. 29. (pag. 51) erwähnte Symbol $\overset{1}{\log}\, 1$ alleinig auszunehmen.

Der Beweis beruht höchst einfach auf den Sätzen, die in §§ 5., 20. und 27. über Ungleichungen aufgestellt wurden, wonach eine Summe wächst, wenn eines der Glieder, ein Product, wenn einer der Factoren und eine Potenz, wenn Basis oder Exponent zunimmt.

Wenn nämlich zunächst:

$$x + b = a \quad \text{und zugleich auch} \quad x_1 + b = a$$

ist, so muss:

$$x_1 = x$$

sein; denn wäre letzteres nicht der Fall, so müsste nach Nr. 16. der Einleitung entweder

$$x_1 > x \quad \text{oder} \quad x_1 < x$$

sein; in diesem Falle aber würde nach dem angeführten Satze auch:

$$x_1 + b > x + b\,, \quad \text{resp.} \quad x_1 + b < x + b$$

sein müssen, was der Voraussetzung:

$$x_1 + b = x + b = a$$

widerspricht.

Ebenso wird aus den Gleichungen:

$$x \,.\, b = a\,, \quad x_1 \,.\, b = a\,,$$

ferner aus:

$$x^b = a\,, \quad x_1{}^b = a\,,$$

endlich aus:

$$b^x = a\,, \quad b^{x_1} = a$$

leicht der Schluss gezogen, dass

$$x = x_1$$

sein müsse, wobei nur im letzten Falle die Annahme $b = 1$ auszuschliessen ist, weil dieselbe auch in dem betreffenden Satze über Ungleichungen (cf. § 27.) eine Ausnahme bildete. Für $b = 1$ hat man nämlich $1^{x_1} = 1^x = 1$, mag nun $x_1 >, =$ oder $< x$ sein.

Das Ergebniss dieser Untersuchungen ist also in der That, dass die schon erwähnten Symbole $a - b$, $a : b$, $\sqrt[b]{a}$, $\overset{b}{\log}\, a$ (mit Ausnahme von $\overset{1}{\log}\, 1$) stets nur eine einzige Zahl, wenn überhaupt eine solche, bezeichnen, und dass die inversen Operationen im Gebiet der natürlichen Zahlen wirklich eindeutig sind.

Hierauf beruht nun aber ein wichtiges Hülfsmittel, um die Gleichheit von Zahlen nachzuweisen. Die letztere wird für zwei Zahlen x und x_1 bewiesen sein, sobald es gelungen ist, darzuthun, dass entweder $b + x_1$ oder $b \,.\, x_1$ oder x_1^b oder endlich b^{x_1} (letzteres für $b > 1$) denselben Betrag erhält wie $b + x$, resp. $b \,.\, x$, x^b, b^x.

Ein solches Beweisverfahren, wie wir es später meistens anwenden und durch welches also lediglich nachgewiesen wird, dass die beiden fraglichen Zahlen, sobald sie einundderselben directen Operation unterworfen werden, zum gleichen Resultat führen, heisst der *Beweis durch die Probe der inversen Operationen.*

§ 41. Besondre Fälle (Singularitäten).

Wenden wir speciell die obigen Regeln der Transposition auf die Gleichungen (13), (32) und (33):

$$1 \,.\, a = a \,.\, 1 = a\,, \quad a^1 = a\,, \quad 1^a = 1$$

an, so erhalten wir die besonders bemerkenswerthen Resultate:

$$(55) \qquad \begin{cases} a = \frac{a}{1} \quad , & \frac{a}{a} = 1\,, \\ a = \sqrt[1]{a} \quad , & \overset{a}{\log}\, a = 1\,, \\ 1 = \sqrt[a]{1} \quad , & a = \overset{1}{\log}\, 1\,, \end{cases}$$

welche dem Gedächtniss einzuprägen sind, und uns die Sätze liefern:

Jede Zahl kann als ein Bruch mit dem Nenner 1 *geschrieben werden, indem man sie selbst zum Zähler des Bruches macht,* oder: *Mit* 1 *dividiren ändert nichts.* Umgekehrt auch: *Wenn der Nenner eines Bruches die Einheit ist, so ist der Werth des Bruches gleich seinem Zähler.* Der Nenner 1 wird aus diesen Gründen höchst selten in Anwendung kommen, indem, wo derselbe steht, er ja geradezu weggelassen werden darf; immerhin jedoch gewähren diese Bemerkungen den Vortheil, dass sich ganze Zahlen jederzeit auch als Brüche ansehen und damit die von den letzteren Ausdrücken geltenden Sätze auch über erstere ausdehnen lassen.

Wenn Zähler und Nenner eines Bruches einander gleich sind, so hat dieser Bruch den Werth 1, oder: *Das Verhältniss zweier gleichen Zahlen zu einander ist gleich* 1. *Jede Zahl geht in sich selbst einmal auf.*

Mit 1 *radiciren ändert nichts,* und: *Jede Zahl kann als eine Wurzel vom Exponent* 1 *angesehen werden, als deren Radicand sie selbst fungirt.* Das Zeichen $\sqrt[1]{}$ wird deshalb gleichfalls äusserst selten gebraucht, und mit dem Umstand, dass man den Wurzelexponent 1 sogleich mitsammt dem zugehörigen Wurzelzeichen weglassen darf, hängt der Beweggrund zu der in § 33. getroffenen Uebereinkunft bezüglich der Weglassung des Wurzelexponenten 2 zusammen.

Ein Logarithmus, dessen Basis und Numerus einander gleich sind, hat die Einheit zum Werthe. Jede Zahl in Bezug auf sich selbst logarithmirt, gibt 1.

Jede nochsovielte Wurzel aus der Zahl 1 *ist ebenfalls gleich* 1, oder: *Wenn die Einheit radicirt wird, bleibt sie unverändert.*

Jede Zahl kann als Logarithmus von 1 *in Bezug auf die Basis* 1 *angesehen werden,* oder: $\overset{1}{\log}\, 1$ ist eine unbestimmte Zahl; *der Ausdruck* $\overset{1}{\log}\, 1$ *ist ein unendlich vieldeutiger*; und zwar kann ihm jeder

mögliche Werth beigelegt werden, weshalb sich denn auch statt des Gleichheitszeichens hier eigentlich das der Unterordnung empfehlen würde, und ganz genau zu schreiben wäre: $a \preccurlyeq (\overset{1}{\log}\, 1)$. [Vergleiche Einleitung Nr. 19. und 20.]. Wegen dieses exceptionellen Charakters des genannten Ausdrucks soll derselbe nun im folgenden stets ausgeschlossen sein, wie man denn überhaupt nicht in Bezug auf die Basis 1 zu logarithmiren pflegt.

Auch auf eine solche Ausnahme würde man übrigens nicht verfallen sein, wenn nicht durch die Zulassung der Eins zu den Zahlen und die Einführung derselben als Multiplicator, Potenzexponent etc. schon eine Erweiterung des *ursprünglichen* Zahlbegriffes stattgefunden hätte. —

§ 42. Weitere Grundeigenschaften. Probe einer directen Operation durch eine inverse.

Es ist ohne Zweifel ein naheliegender Gedanke, die vier Transpositionsregeln einmal auf die sich von selbst verstehenden (identischen) Gleichungen:

$$a + b = a + b\,,$$
$$a\,.\,b = a\,.\,b\,,$$
$$a^b = a^b,$$
$$b^a = b^a$$

anzuwenden, nämlich die Zahl b nach denselben von der rechten Seite auf die linke zu bringen. Auf diese Weise erhält man die Gleichungen:

$$(56)\quad \begin{cases} (a + b) - b = a\,, \\ \dfrac{a\,.\,b}{b} = a\,, \\ \sqrt[b]{a^b} = a\,, \\ \overset{b}{\log}\,(b^a) = a\,, \end{cases}$$

welche, wie folgt, als Sätze ausgesprochen werden können:

Wenn man von der Summe zweier Zahlen das eine Glied abzieht, so erhält man das andre.

Wenn ein Product zweier Zahlen durch den einen Factor getheilt wird, so ergibt sich der andre Factor.

Wenn man aus einer Potenz die sovielte Wurzel auszieht, als ihr Exponent angibt, so erhält man die Grundzahl.

Wenn man von einer Potenz den Logarithmus nimmt in Bezug auf ihre eigene Grundzahl als Logarithmenbasis, so erhält man den Exponenten.

Der Beweis dieser Sätze kann übrigens — nach der Bemerkung am Schlusse des vor-vorigen Paragraphen — auch a posteriori höchst einfach geführt werden wie folgt:

Der Ausdruck $(a+b)-b$ bedeutet diejenige Zahl, welche zu b addirt $+b$ liefert; eine derartige Zahl ist offenbar a selber, und da es nur *eine* Zahl on dieser Eigenschaft geben kann, so stellt jener Ausdruck gerade diese letztere ahl vor.

Diejenige Zahl, welche mit b multiplicirt $a\,.\,b$ gibt, welche also mit $\frac{a\,.\,b}{b}$ u bezeichnen wäre, ist offenbar a selbst, und so weiter.

Auf die Gleichungen (56) kommt man ferner, wenn man sich die einfache Aufgabe stellt, zu ermitteln, welche Zahl um b vermindert, durch b getheilt, etc. a geben wird. Nennt man x die gesuchte Zahl, so hat man resp.

$$x-b=a, \quad \text{oder} \quad x:b=a, \quad \sqrt[b]{x}=a, \quad \overset{b}{\log}\, x=a \tag{57}$$

und daraus nach den Transpositionsregeln beziehungsweise:

$$x=a+b, \quad x=a\,.\,b, \quad x=a^b, \quad x=b^a, \tag{58}$$

woraus denn durch Einsetzung von x in die vorhergehende Gleichung in der That die Gleichungen (56) erhalten werden.

Mit den Formeln (54) können auch die Formeln (56) nun zusammengefasst werden zu dem Satze:

Entgegengesetzte Operationen, als da sind:

Addition und Subtraction,
Multiplication und Division,
Potenziren und Radiciren,
Exponenziren und Logarithmiren,

mit der nämlichen Zahl in irgend einer Ordnung hintereinander ausgeführt, heben sich auf.

Man wird nämlich in der That sogleich bemerken, dass in den Gleichungen (56) linker Hand die nämlichen Operationen ausgeführt sind, wie in den entsprechenden Gleichungen (54), nur in umgekehrter Folge; z. B. in der ersten Gleichung (54) ist angedeutet, dass die Zahl b erst subtrahirt und alsdann addirt, in der (56) hingegen, dass sie erst addirt und dann wieder subtrahirt werde, etc.

Die Gleichungen (56) lehren endlich noch, auf welche Weise eine directe Operation mittelst einer inversen geprüft werden kann. Es kann darnach die *Probe* einer Addition gemacht werden, indem man den einen Summanden von der Summe abzieht und zusieht, ob wirklich der andre Summand herauskommt, die Probe einer Multiplication, indem man das Product durch den einen Factor dividirt, und so weiter.

Beiläufig gesagt rechtfertigen die Formeln (56) einigermassen auch den Namen „*wegnehmende* Rechnungsarten", mit welchem die inversen Operationen bisweilen bezeichnet werden im Gegensatz zu den „*setzenden*" oder directen Operationen. Sie zeigen nämlich, dass eine Subtraction ausgeführt wird durch Wegnehmen eines Gliedes, eine Multiplication durch Wegnehmen eines Factors. Radiciren ist Wegnahme eines Potenzexponenten, Logarithmiren einer Potenzbasis. Ganz zutreffend erscheint übrigens jene Bezeichnung nicht, indem nach den Gleichungen (54) die Addition auch ihrerseits den Wegfall eines Subtrahenden,

die Multiplication das Wegfallen eines Nenners etc. bewirken kann. Der ganze Unterschied besteht eigentlich nur darin, dass nach den in §§ 5., 20. und 27. über Ungleichheit aufgestellten Sätzen der Werth einer Zahl einen Zuwachs erhält, wenn eine directe Operation an ihr ausgeführt wird, dagegen durch eine inverse Operation verkleinert wird — auch dieses jedoch nur im allgemeinen und so lange man sich auf das Gebiet der natürlichen Zahlen beschränkt.

§ 43. Andere Auffassung des Transpositionsverfahrens.

Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen kann man das Hinüberschaffen oder *Transponiren* eines Gliedes, Factors, Exponenten etc. auch noch durch eine andere Schlussfolgerung bewerkstelligen, ohne der im Grunde doch rein äusserlichen Vorschrift der Transpositionsregeln zu bedürfen. Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, gilt nämlich das Princip, welches in dem Begriff der Gleichheit begründet ist, dass gleiche Rechnungsoperationen, mit gleichen Zahlen vorgenommen, auch gleiche Resultate liefern müssen, wonach also man insbesondere die Sätze hat:

Gleiches zu gleichem addirt gibt gleiches.
Gleiches von gleichem subtrahirt gibt gleiches.
Gleiches mit gleichem multiplicirt gibt gleiches.
Gleiches durch gleiches dividirt gibt gleiches.
Gleiches auf dieselbe Potenz erhoben gibt gleiches.
Gleiches mit gleichem exponenzirt, radicirt, logarithmirt liefert gleiches.

Hat man nun z. B. die Gleichung:

$$x + b = a$$

nach x aufzulösen, will man also das Glied b auf die andre Seite bringen, so kann man dies nun auch erreichen durch beiderseitige Subtraction von b, d. h. indem man die Gleichung:

$$b = b$$

von der vorigen abzieht. Auf diese Weise ergibt sich zunächst:

$$(x + b) - b = a - b,$$

oder weil entgegengesetzte Operationen sich zerstören:

$$x = a - b,$$

wie zu zeigen war. Das Hinüberschaffen eines Gliedes auf die andre Seite des Gleichheitszeichens ist demnach im Grunde einerlei mit einer Subtraction dieses Gliedes von beiden Seiten der Gleichung.

Ebenso ist das Transponiren eines Factors äquivalent mit einer Division der ganzen Gleichung durch diesen Factor; denn aus $x \, . \, b = a$

ergibt sich durch Division mit $b = b$ zuerst: $\frac{x \cdot b}{b} = \frac{a}{b}$, und dann in der That: $x = \frac{a}{b}$.

Das Hinüberschaffen eines Potenzexponenten oder einer Potenzbasis kann ferner durch Radiciren, beziehungsweise Logarithmiren der Gleichung bewerkstelligt werden.

Umgekehrt kann das Transponiren eines Subtrahenden, eines Nenners, eines Wurzelexponenten, einer Logarithmenbasis beziehungsweise durch Addition, Multiplication, Potenziren und Exponenziren der Gleichung mit dieser Zahl bewirkt werden. —

§ 44. Letzte Grundeigenschaft. Probe einer inversen Operation durch eine inverse.

Bringt man noch in den Formeln (54) die Zahlen $(a - b)$, $\frac{a}{b}$, $\sqrt[b]{a}$ und $\overset{b}{\log}\, a$, indem man diese Ausdrücke als einfache Operationsglieder behandelt, nach den Transpositionsregeln auf die rechte Seite, so ergibt sich ein weiteres System von Gleichungen, welche interessante Eigenschaften der inversen Operationen ausdrücken, nämlich:

$$(59)\quad \begin{cases} b = a - (a - b), \\ b = a : \frac{a}{b}, \\ b = \overset{\sqrt[b]{a}}{\log}\, a, \\ b = \sqrt[\overset{b}{\log} a]{a}, \end{cases}$$

Diese können leicht in Worten ausgesprochen werden, z. B.:

Subtrahirt man eine Differenz von ihrem Minuenden, so bleibt der Subtrahend übrig. Dividirt man mit einem Bruch in den Zähler desselben, so ergibt sich der Nenner etc. Man ersieht auch aus diesen Gleichungen, wie eine inverse Rechnungsoperation durch eine ebensolche geprüft werden kann.

Auf Grund derselben kann endlich wieder das Transponiren eines Minuenden, Dividenden, Radicanden und Logarithmanden, welches wir in § 35. besprochen haben, in einer neuen Weise vollzogen werden. Will man nämlich die Gleichungen (52):

$$a - x = b, \quad \frac{a}{x} = b, \quad \sqrt[x]{a} = b, \quad \overset{x}{\log}\, a = b$$

etwa nach x auflösen, mithin das Operationsglied a von x trennen, so genügt es, die erste Gleichung von der $a = a$ zu subtrahiren, die zweite in dieselbe Gleichung $a = a$ zu dividiren etc., kurz, die nach-

folgend angedeuteten Operationen mit den gegebenen Gleichungen vorzunehmen:

$$a - (a - x) = a - b, \quad a : \frac{a}{x} = a : b; \quad \overset{\sqrt[x]{a}}{\log} a = \overset{b}{\log} a, \quad \sqrt[\overset{x}{\log} a]{a} = \sqrt[b]{a}.$$

Nach (59) wird man hiemit sofort die gesuchte Auflösung (53) erhalten, nämlich resp.:

$$x = a - b, \quad x = \frac{a}{b}, \quad x = \overset{b}{\log} a, \quad x = \sqrt[b]{a}.$$

Abermals kann man zu der Entdeckung der Gleichungen (59) dadurch gelangen, dass man sich eine einfache Frage vorlegt, die Frage nämlich, welche Zahl wohl von a subtrahirt, in a dividirt etc. das Resultat b liefern wird. Nennt man x die gesuchte Zahl, so ergeben sich aus den Gleichungen (52), wie in § 36. gezeigt wurde, durch Auflösung die Werthe (53) und die Einsetzung der letzteren in jene ersteren bildet in der That wieder eine ungezwungene Herleitung der Relationen (59). —

§ 45. Anwendung auf das Vereinfachen der Gleichungen.

In einem sehr verbreiteten Falle wird man übrigens die Transposition jetzt sparen können, indem sich zu dem Ergebniss derselben am allerbequemsten ganz direct gelangen lässt. Ich meine den Fall, wo die beiden Seiten einer Gleichung Ausdrücke von derselben Natur, von einerlei Art sind. Alsdann nämlich lässt oft der folgende Satz sich mit Vortheil anwenden:

Uebereinstimmende Operationsglieder von beiden Seiten einer Gleichung heben sich fort; man kann dieselben „streichen".

Wenn in der That z. B. Gleichungen vorliegen, wie diese:

$$a + b = a' + b, \quad a - b = a' - b, \quad b - a = b - a',$$
$$a \times b = a' \times b, \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b}, \quad \frac{b}{a} = \frac{b}{a'},$$

etc., so wird man aus einer jeden von ihnen sofort den Schluss ziehen:

$$a = a',$$

indem man sie nur durch die passende Operation mit der Gleichung $b = b$ verknüpft denkt und dabei des Satzes von der Hebung entgegengesetzter Operationen eingedenk ist. In solchem Falle wird man weder in Wirklichkeit noch auch in Gedanken sich damit plagen, das übereinstimmende Operationsglied b, welches ja auch von höchst complicirtem Ausdrucke sein kann, überhaupt zu transponiren, gewissermassen als einen Ballast mit über das Gleichheitszeichen hinüberzuschleppen.

Die Anwendung des vorstehenden Satzes nennt man das *Vereinfachen* der betreffenden Gleichung, auch wohl ein *Kürzen* derselben und kann man dann das umgekehrte, oder die beiderseitige Einführung

ereinstimmender Operationsglieder dadurch, dass man die beiden iten der Gleichung durch einerlei Rechnungsoperationen mit der mlichen Zahl verknüpft, auch ein *Erweitern* der Gleichung nennen. as letztere ist ebenso gestattet, wenngleich seltener vortheilhaft, und ildet nur eine Anwendung des im § 42. angezogenen Grundsatzes Einleitung Nr. 18.).

Es versteht sich, dass man je nach dem Charakter, welchen man em in Rede stehenden Operationsglied zuschreibt, aus dem obigen llgemeinen Satze zwölf andere, besondere Sätze herauslesen kann. —

II. Behandlung des Inversionsproblems für vieldeutige Operationen.

§ 46. Die nichtcommutative Multiplication als Operationstypus.

Um die Wiederholungen zu vermeiden, welche daraus hervorgehen, dass auf eine jede der vier inversen oder der drei directen Operationen stets die gleichen Betrachtungen anwendbar werden, will ich nur die Multiplication — als Typus irgend einer directen Operation — fortan ins Auge fassen. Es wird dies im Gefolge haben, dass wir von den specifischen Gesetzen dieser Operation, welche den übrigen Operationen nicht auch gemeinsam wären, hier keinen Gebrauch machen dürfen. Namentlich also werden wir uns auch der Anwendung des Commutationsgesetzes (welches ja den Operationen dritter Stufe nicht mehr zukommt) vollständig zu enthalten haben; und am besten wird man sich vor dieser Anwendung hüten und sich das Verbot derselben im Bewusstsein lebendig erhalten, indem man vorderhand annimmt, dass die Multiplication geradezu eine *nicht-commutative* Operation sei.

Ein solcher Fall tritt in der That genau genommen bei der gemeinen Multiplication schon ein, sobald man mit benannten Zahlen rechnet (cf. Bd. 2.). Ganz besonders aber gewinnt die Untersuchung auch noch dadurch an Interesse, dass wir später der Multiplication analoge Operationen an höheren (hypercomplexen) Zahlen kennen lernen werden, welche wohl associativ, nicht aber commutativ sind.

Sobald nun die Multiplication nicht commutativ ist, wird man dieselbe auf zwei verschiedene Arten ausgeführt denken können. Man wird jetzt bei jeder Multiplicationsaufgabe die active Zahl (mit welcher multiplicirt werden soll) entweder vor oder hinter die passive Zahl (welche multiplicirt werden soll) zu setzen haben, ohne dass jedoch zwischen diesen beiden nun durchaus verschiedenen Fällen etwa die Wahl frei stünde. Aehnlich wie bei der Elevation das Potenziren und das Exponenziren oder bei der Subtraction das „um etwas vermindern" und das „von etwas abziehen", wird demgemäss hier das *Vormultipliciren* und das *Nachmultipliciren* zu unterscheiden sein, nämlich:

Bei der Bildung des Productes bc soll gesagt werden, dass b mit c *nach*- und c mit b *vor*-multiplicirt werde.

Desgleichen hat man also — ohne das Commutationsgesetz — den ersten und den zweiten Factor (als Multiplicand und Multiplicator) stets sorgfältig zu unterscheiden.

Endlich wird es zu dieser Operation nun zweierlei inverse Operationen geben, je nachdem der Multiplicand oder der Multiplicator als Unbekannte berechnet werden soll.

Die eine dieser Umkehrungen nennen wir *Theilen*, ihr Ergebniss einen *Bruch* und bedienen uns für dieselbe des Bruchstriches. Für die andre nehmen wir die Namen: *Messung*, *Verhältniss* und das *Doppelpunktzeichen* in Anspruch. Wenngleich daher die beiden Zeichen: Doppelpunkt und Bruchstrich jetzt auch nicht mehr verwechselt werden dürfen, so mögen doch die Wörter: „Division“ und „Quotient“ noch als gemeinsame Namen für beiderlei Operationen und deren Ergebnisse beibehalten werden.

Sind zunächst alle drei Rechnungsarten *eindeutig*, so finden sich demnach diese beiderlei inversen Operationen definirt durch die Festsetzung:

Wenn

$$(60)_\alpha \qquad b \,.\, x = a$$

ist, so werde

$$(60)_\beta \qquad x = a : b$$

geschrieben (gesprochen: a *zu* b) und x, a, b resp. Verhältniss, Antecedent, Consequent genannt.

Wenn

$$x \,.\, c = a$$

ist, so werde

$$x = \frac{a}{c}$$

geschrieben (gesprochen: a *durch* b) und x, a, c resp. Bruch, Zähler, Nenner genannt.

Darnach wird also:

ein Multiplicand transponirt als Consequent,

ein Multiplicator transponirt als Nenner,

und umgekehrt.

Sollen nun die hiemit eingeführten feineren Unterscheidungen auch auf die übrigen Resultate des vorigen Abschnittes übertragen werden, so muss mit der begonnenen Recapitulation noch weiter fortgefahren werden.

Es bestehen jetzt die fundamentalen Gleichungen:

$$(61) \qquad b\,(a : b) = a \qquad\qquad \frac{a}{c}\,c = a.$$

$$(62) \qquad (b\,a) : b = a \qquad\qquad \frac{ac}{c} = a,$$

welche lehren, dass

Messung und Vormultipliciren entgegengesetzte Operationen sind;	*Theilung und Nachmultipliciren* man merke insbesondre:
Ein Verhältniss mit seinem Consequenten vormultiplicirt, gibt den Antecedenten.	Ein Bruch mit seinem Nenner nachmultiplicirt gibt den Zähler.
Messung hebt den ersten Factor.	Theilung hebt den letzten Factor.

Jene Gleichungen zeigen zugleich, wie die Probe inverser Operationen durch directe zu machen. Dagegen zeigen die folgenden Relationen:

(63) $\frac{a}{a:b} = b$ | $a : \frac{a}{c} = c$,

dass ausserdem die Probe einer Messung nur durch Theilung, die Probe einer Theilung nur noch durch Messung gemacht werden kann (nicht aber durch die ihr gleichartige Operation selber).

Die letzteren würden sich auch in dem Ausspruch zusammenfassen lassen: dass die Operationen des *Durchsichmessenlassens* und die des *Durchsichtheilenlassens* (oder Messung und Theilung als an dem activen Operationsglied zu vollziehende aufgefasst) einander „entgegengesetzte" Operationen sind, dass sie mit irgend einer Zahl an einer andern fortschreitend ausgeführt sich gegenseitig aufheben. Obwohl eine solche Zusammenfassung durch die Analogie mit (61) und (62) geboten erscheint, ist ihr doch der Sprachgebrauch — indem er bei der Division das erste Operationsglied stets als ein passives aufgefasst wissen will — eher hinderlich, und war es deshalb auch bei der früheren Zusammenfassung von (54) und (56) in § 42. überflüssig, die derselben zu Grunde gelegene Auffassung der Operationen als mit der gleichen Zahl am passiven Operationsglied hintereinander auszuführende ausdrücklich zu erwähnen.

Wesentlich ist es, hervorzuheben, dass nunmehr die Ausdrücke:

(64) $(a:b)b$, $(ab):b$, $a:(a:b)$ | $\frac{a}{\left(\frac{a}{c}\right)}$, $\frac{ca}{c}$, $c\frac{a}{c}$

einer ähnlichen Reduction wie in dem vorigen Abschnitt (oder wie die Ausdrücke in den vorhergehenden Sätzen) *durchaus nicht* fähig sind.

Die Gleichungen:

$(65)_\alpha$ $x : b = c$ | $\frac{x}{c} = b$

geben nach x aufgelöst alle beide:

$(65)_\beta$ $$x = bc.$$

Um endlich die Gleichungen:

$(66)_\alpha \qquad \frac{a}{x} = b \qquad\Big|\qquad a : x = c$

aufzulösen, schreibt man erst:

$$a = bx\,, \text{ resp. } a = xc\,,$$

und folgert schliesslich:

$(66)_\beta \qquad x = a : b \qquad\Big|\qquad x = \frac{a}{c}\,,$

woraus man entnehmen kann, dass ein Antecedent als Zähler (und umgekehrt) zu transponiren ist. —

Die vorstehenden Sätze und Gleichungen, denen wie gesagt die Voraussetzung der Eindeutigkeit sämmtlicher Operationen und Zahlenausdrücke noch zu Grunde liegt, umfassen in der That die wesentlichen Ergebnisse für alle vier inversen Operationen, zu denen wir im vorigen Abschnitt gelangt sind.

Aus ihnen ergeben sich z. B. die Gesetze der dritten Stufe, wenn man überall die Ausdrücke:

$(67)_\alpha \qquad bc\,, \quad a : b\,, \quad \frac{a}{c}$

resp. ersetzt durch:

$(67)_\beta \qquad b^c\,, \quad \overset{b}{\log} a\,, \quad \sqrt[c]{a}\,,$

desgl. natürlich alle diesen nachgebildeten Ausdrücke in die entsprechenden verwandelt — und die nämliche Veränderung wird auch bei allen noch folgenden Relationen angebracht werden können.

Auch die Gesetze der ersten Stufe lassen aus den hier zu betrachtenden sich abschreiben, indem man *mal* durch *plus* und die beiden Divisionszeichen ohne Unterschied durch *minus* ersetzt. Indessen wird sich keine Veranlassung zu einer derartigen Uebertragung bieten, da man nie besondere Gründe gehabt hat, von der Commutativität der Addition und von der Eindeutigkeit der Operationen erster Stufe abzugehen.

Ich gehe jetzt dazu über, zu untersuchen, welche Modificationen an dem vorangegangenen anzubringen sind, wenn die eine der einander entgegengesetzten Operationen oder wenn alle beide vieldeutig werden, sowie auch, wenn einige der in unsern Relationen vorkommenden Buchstabenausdrücke nicht eindeutig bestimmte Zahlen, sondern selbst vieldeutige Ausdrücke vorstellen.

Zu dem Ende wird es jedoch angemessen sein, die Verknüpfung ein- oder vieldeutiger Ausdrücke (sowie der zwischen solchen zulässigen Propositionen) vermittelst ein- oder vieldeutiger Operationen erst im allgemeinen näher in's Auge zu fassen.

§ 47. Die Operationen mit vieldeutigen Ausdrücken überhaupt.

Unter den *kleinen* Buchstaben $a, b, c, \ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots a_1, b_1, c_1, \ldots \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ des lateinischen oder griechischen Alphabets wollen wir uns wie bisher nur *eindeutig bestimmte* Zahlen (irgend eines Zahlensystems) vorstellen, aus denen erst durch ihre operative Verknüpfung vieldeutige Ausdrücke hervorgehen können.

Dagegen sollen die *grossen* Buchstaben dieser Alphabete von vornherein collective oder vieldeutige Ausdrücke repräsentiren und z. B. die ersten derselben folgende Werthe umfassen:

$$(68)\begin{cases} A = \{a, a_1, a_2, \ldots\},\ B = \{b, b_1, b_2, \ldots\},\ C = \{c, c_1, c_2, \ldots\}, \\ \mathsf{A} = \{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\},\ \mathsf{B} = \{\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots\},\ \Gamma = \{\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots\}, \end{cases}$$

wobei die Anzahl dieser Werthe nach Belieben als begrenzt oder als unbegrenzt angenommen werden mag.

Wenn nun durch das einfache Nebeneinanderstellen zweier Zahlzeichen irgend eine Art von operativer Verknüpfung zwischen denselben ausgedrückt wird, so frägt es sich zunächst, was unter den Ausdrücken verstanden werden solle, die wie Bc, bC, BC, ... durch Verknüpfung eines vieldeutigen Ausdruckes mit einem eindeutigen oder wieder mit einem vieldeutigen Ausdrucke gebildet werden können.

Wird überhaupt mit einem vieldeutigen Ausdruck eine weitere (ein- oder vieldeutige) Operation vorgenommen, so hat man sich — um den das Operationsergebniss vorstellenden Ausdruck richtig zu verstehen — an Stelle jenes ersteren Ausdrucks jeden einzelnen Specialwerth desselben eingesetzt zu denken. Dadurch entsteht eine ganze Reihe von besonderen (eventuell selbst noch vieldeutigen) Ausdrücken, und bedeutet nun der gedachte zusammengesetzte Ausdruck die ganze Gattung der Werthe, welche die besonderen Ausdrücke anzunehmen im Stande sind. Mit andern Worten haben wir die

Definition. Unter dem Ergebniss der operativen Verknüpfung eines vieldeutigen Ausdruckes mit irgend einem andern soll verstanden werden die Gesammtheit der Ausdrücke, welche sich durch Verknüpfung jedes einzelnen Werthes jenes ersteren Ausdruckes mit dem letzteren vermittelst eben dieser Operation ergeben.

Darnach ist z. B.:

$$(69)\qquad Bc = \{bc,\ b_1c,\ b_2c,\ \ldots\},$$

$$(70)\qquad bC = \{bc,\ bc_1,\ bc_2,\ \ldots\},$$

$$(71)\quad \begin{cases} BC = \{bC,\ b_1C,\ b_2C,\ \ldots\} = \\ \quad = \{Bc,\ Bc_1,\ Bc_2,\ \ldots\} = \\ \quad = \begin{Bmatrix} bc, & bc_1, & bc_2, & \ldots \\ b_1c, & b_1c_1, & b_1c_2, & \ldots \\ b_2c, & b_2c_1, & b_2c_2, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Bmatrix} \end{cases},$$

die Bedeutung, welche den Producten eindeutiger und vieldeutiger Ausdrücke beizulegen ist, gleichviel ob die zu verknüpfende Operation (Multiplication) selbst eine eindeutige oder eine vieldeutige ist. Im letzteren Falle, wo jedes der Producte bc, bc_1, ... selbst mehrerer Werthe fähig, also selbst ein vieldeutiger Ausdruck ist, umfasst das Zeichen BC eben sämmtliche Werthe dieses letzteren. Nämlich wenn z. B.

$$bc = \{a_{0,0},\ a'_{0,0},\ a''_{0,0},\ \ldots\}$$

sowie für jedes k oder h:

$$(72)\quad \begin{gathered} b_h c = \{a_{h,0},\ a'_{h,0},\ a''_{h,0},\ \ldots\}, \quad bc_k = \{a_{0,k},\ a'_{0,k},\ a''_{0,k},\ \ldots\}, \\ b_h c_k = \{a_{h,k},\ a'_{h,k},\ a''_{h,k},\ \ldots\} \end{gathered}$$

ist, so wird BC die Werthe umfassen:

$$(73)\quad BC = \begin{Bmatrix} a_{0,0}, & a'_{0,0}, & a''_{0,0}, & \ldots & a_{0,1}, & a'_{0,1}, & a''_{0,1}, & \ldots & a_{0,2}, & a'_{0,2}, & a''_{0,2}, & \ldots \\ a_{1,0}, & a'_{1,0}, & a''_{1,0}, & \ldots & a_{1,1}, & a'_{1,1}, & a''_{1,1}, & \ldots & a_{1,2}, & a'_{1,2}, & a''_{1,2}, & \ldots \\ a_{2,0}, & a'_{2,0}, & a''_{2,0}, & \ldots & a_{2,1}, & a'_{2,1}, & a''_{2,1}, & \ldots & a_{2,2}, & a'_{2,2}, & a''_{2,2}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Bmatrix},$$

wie sich dies in der That durch Einsetzung der Werthgruppen (72) in die Zusammenstellung (71) ergibt. Die Einschliessung jener Werthgruppen mittelst Klammern ist bei derartigen Substitutionen stets unnöthig, da ein vieldeutiger Ausdruck alle Werthe, deren er selbst oder ein ihm untergeordneter Ausdruck fähig ist, *ohne Unterschied* umfasst, da mit andern Worten nach dem in Einleitung No. 20. ausgesprochenen Fundamentalsatze (A), wenn einem vieldeutigen Ausdrucke andere auch noch vieldeutige Ausdrücke als particulare oder „Unterausdrücke“ subordinirt sind, alle Werthe dieser letzteren zugleich auch Werthe jenes ersteren Ausdruckes sein müssen. Dieselbe Bemerkung kommt auch schon in Betracht, wenn man den dritten der für das Product BC angegebenen Ausdrücke (71) aus einem der beiden ersten unter Berücksichtigung des Schema's (69) oder (70) ableiten will.

Es ist überhaupt leicht einzusehen, dass die collective Zusammenfassung einzelner Zahlenwerthe oder Ausdrücke zu einem umfassenderen Ausdrucke [welche wir immer dadurch andeuten, dass wir diese Unterausdrücke durch Kommata getrennt unter- oder nebeneinander

schreiben und sie dann mit einer geschwungenen Klammer umschliessen] für sich allein betrachtet — ihrem Begriffe nach — genau die Eigenschaften der Addition besitzt. Auf die Reihenfolge der zusammenzufassenden Werthe oder Elemente kommt es dabei nicht an, z. B. es ist:

$$(74) \qquad \{a, b\} = \{b, a\}, \quad \{A, B\} = \{B, A\},$$

u. s. w., das ist: die Zusammenfassung ist *commutativ;* sie ist ferner auch associativ, d. h. es ist:

$$(75) \qquad \Big\{ A, \{B, C\} \Big\} = \Big\{ \{A, B\}, C \Big\} = \{A, B, C\},$$

u. s. w. Endlich auch steht sie zu jeder beliebigen Rechnungsoperation in ähnlicher Beziehung, wie die Addition zu der Multiplication, nämlich *jede* gleichviel ob ein- oder vieldeutige Operation an (oder mit) einem vieldeutigen Ausdrucke vertheilt sich dem *Distributionsgesetze* entsprechend auf die sämmtlichen einzelnen Werthe oder Unterausdrücke des letzteren; es ist:

$$(76) \qquad A\{B, C\} = \{AB, AC\} \text{ und } \{A, B\}C = \{AC, BC\}. \text{ —}$$

Nur in einer Hinsicht freilich ist die collective Zusammenfassung auch für sich allein betrachtet wesentlich anders als die Addition geeigenschaftet; zum Unterschied von der letzteren schliesst sie nämlich ein Vereinigen von unter sich gleichen Elementen aus, oder macht sie dasselbe, genauer gesagt, unwirksam. M. a. W.: *Stimmen Werthe oder Unterausdrücke eines vieldeutigen Ausdrucks miteinander überein, so können sie schon durch einen einzigen von ihnen vertreten werden*; es ist z. B. $\{A, B, A, A\} = \{A, B\}$ und geht überhaupt ein $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = n$-deutiger Ausdruck in einen m-deutigen über, sobald beziehungsweise $a_1, a_2, \ldots a_m$ seiner Werthe unter sich gleich werden. Diese Eigenschaft der collectiven Zusammensfassung thut jedoch den vorstehend erwähnten Gesetzen, sowie auch den auf letztere zu bauenden Schlüssen keinen Eintrag.*)

*) Ich darf an dieser Stelle ein Werk nicht unerwähnt lassen, das kurz vordem erschienen, mir zu Gesicht kam, als ich gerade das Manuscript zum gegenwärtigen Druckbogen dem Verleger einzusenden mich anschickte. Wenn ich auch demselben nichts entlehne, so finde ich darin (allerdings in total verschiedener Form und neben vielem andern) doch einen Theil der Ueberzeugungen ausgesprochen, die ich mir selbst gebildet hatte. Ich meine „Die Formenlehre oder Mathematik von Robert Grassmann, Stettin 1872“, ein Werk, das nach des Autors Angabe unter Mitwirkung von dessen Bruder Hermann, dem bekannten Verfasser der „Ausdehnungslehre“ (dessen Lehrbuch der Arithmetik hier schon mehrfach citirt wurde) zu Stande gekommen ist.

Der Verfasser des gedachten Werkes bedient sich in dem die Logik behandelnden Theile desselben für die *collective Zusammenfassung* des + Zeichens und fasst dieselbe geradezu als eine *Addition* auf — man könnte sagen eine „logische“ Addition — die dann ausser den Eigenschaften der gewöhnlichen (numerischen)

Da nun eben diese Grundgesetze im zweiten Kapitel schon nach allen Seiten einer eingehenden Untersuchung unterzogen worden sind, so ist es unnöthig, über ihre Verträglichkeit miteinander, ihre Herleitung aus den einfachsten Grundanschauungen, ihre grösstmögliche Verallgemeinerung u. s. w. hier weitere Worte zu verlieren. Nur den einen Satz (71), der dem vollen distributiven Principe entspricht, will ich noch ausdrücklich in Worten aussprechen: nach demselben *ist unter dem Product zweier vieldeutigen Ausdrücke der Inbegriff aller der Producte zu denken, welche sich durch Multiplication von jedem Werth des einen Ausdrucks mit jedem Werth des andern ergeben.*

Addition auch noch die Grundeigenschaft: $a + a = a$ besitzt. In ähnlicher Weise werden überhaupt vier Arten von Addition in Verbindung mit solchen der Multiplication (nämlich auf den Gebieten der Logik, der Arithmetik, der Combinatorik und der Ausdehnungslehre) unterschieden. — Es bedarf keiner Erläuterung, dass da, wo die Gebiete der Logik und der Arithmetik sich gegenseitig durchdringen (wie in meinem gegenwärtigen Lehrbuch), wo *mit* der ersteren in der letzteren operirt wird, eine dergestalt übereinstimmende Bezeichnung nicht durchführbar sein würde, und dass auch die Anwendung der Ungleichheitszeichen, mittelst welcher R. Grassmann (das Bedürfniss anerkennend) die Subsumtion oder „Einordnung“ ausdrückt, mehr als bedenklich erscheinen müsste.

Immerhin halte ich die bei solch' übereinstimmender Bezeichnung am schärfsten hervortretende Analogie dieser verschiedenen Geistesoperationen für sehr beachtenswerth.

Durch die eingehende Behandlung, welche der Autor den *verneinenden* Urtheilen, deren Conversion u. s. w. und darnach den Syllogismen widmet, findet sich vollständig und im Detail eine Idee durchgeführt, die ich Einleitung pag. 31 kurz angedeutet habe. Nur eines Zeichens, das der Correlation oder einfachen Werthgemeinschaft entspräche, und das, wie aus gegenwärtigem Lehrbuch zu ersehen, doch wohl zum ganzen gehört, bedient sich der Autor nicht; er behilft sich für die in diese Beziehung eintretenden von ihm sogenannten „Schneidebegriffe“ mit einem Factor x.

Besonders interessant und neu war mir, im Gegensatz hiezu, die Rolle, welche auf dem Gebiet der Logik der *Multiplication* vom Autor zugewiesen wird. Während als die *Summe* zweier Begriffe die Gesammtheit der Individuen hingestellt wird, die zu dem einen oder zu dem andern jener Begriffe gehören, gilt als das *Product* derselben ein solcher Begriff, der die Merkmale der beiden in sich vereinigt. Es wird also der dem Umfange nach stattfindenden eigentlich sogenannten Addition die dem Inhalte nach stattfindende oder die *Addition* der Merkmale als eine Multiplication gegenübergestellt. Dieses Verfahren kann in der That nicht befremden, wenn man bedenkt, dass ja die Grundeigenschaften der Addition und die der Multiplication wesentlich dieselben sind, dass beide Operationen nur auf dem Gebiet der gewöhnlichen Arithmetik ein bereits feststehendes Verhältniss zu einander haben und dass man daher auf neuen Gebieten von vornherein zwischen beiderlei Auffassungsweisen die Wahl hat. — Es werden dann auf Grund obiger Definitionen eine Reihe interessanter Sätze über den Zusammenhang von Summen

Nach (73) kann nun die Vervielfältigung der Werthe, welche bei operativer Verknüpfung von Ausdrücken oft eintreten wird, ebensowohl der Vieldeutigkeit der verknüpften Ausdrücke oder Operationsglieder als auch derjenigen der verknüpfenden Operation selbst, oder endlich auch gleichzeitig allen beiden Umständen ihren Ursprung verdanken.

Zu der Annahme (72) ist es nöthig, noch eine Bemerkung hinzuzufügen. Nach dem in der Einleitung No. 19 pag. 27 gesagten müsste, wenn etwa die Theilung eine vieldeutige Operation wäre, z. B. das Zeichen $\frac{a}{c}$ verwendet werden, um nur eine gewisse und zwar irgend wie noch völlig bestimmte von denjenigen Zahlen zu bezeichnen, die mit c nachmultiplicirt a geben; dasselbe müsste mit andern Worten (uneingeklammert wie es ist) dafür reservirt bleiben, um einem unter allen jenen Zahlenwerthen noch zu erwählenden Hauptwerthe als Name zu dienen. Zur Bezeichnung der ganzen Gattung dieser Zahlwerthe wäre dagegen der eingeklammerte Ausdruck $\left(\frac{a}{c}\right)$ zu verwenden.

Um diese Vorschrift, welche sich rechtfertigt durch die ungleich grössere Häufigkeit, in der späterhin Fälle der ersten Art sich darbieten, werde ich jedoch mich vorerst noch nicht kümmern. Da ich vielmehr bei den formalen Untersuchungen des gegenwärtigen Bandes niemals Veranlassung habe, bei einem vieldeutigen Ausdruck einen gewissen Specialwerth vor den übrigen auszuzeichnen, werde ich hier schon jederzeit unter dem uneingeklammerten Ausdrucke die ganze Gattung der laut Definition zulässigen Werthe verstehen. Hievon ist oben bei (72) für den Fall, wo auch die multiplicative Verknüpfung bc zweier Zahlen eine vieldeutige Operation ist, schon stillschweigend Gebrauch gemacht worden, und es wird uns in dergleichen Fällen sogar im Gegentheil manchmal bequem erscheinen, die Specialwerthe eines vieldeutigen Operationsergebnisses durch Einklammerung seines Ausdruckes (und Anhängung von Indices) anzudeuten, z. B. also mit

$$(bc)_0,\ (bc)_1,\ \ldots\ (bc)_m,\ \ldots\ \text{resp.}\ (b_h c_k),\ (b_h c_k)',\ (b_h c_k)'',\ \ldots$$

die Specialwerthe eines Productausdruckes bc resp. $b_h c_k$, sobald derselbe vieldeutig ist, zu bezeichnen.

---

und Producten der Begriffe in Formeln aufgestellt, und manche Fehler der gewöhnlichen Logikbücher aufgedeckt.

Uebrigens macht Herr R. Grassmann den Versuch, die ganze Terminologie der exacten Disciplinen von Grund aus umzugestalten und namentlich alle termini technici zu verdeutschen(?). So ersetzt er — um nur einige von den unschädlichsten Aenderungen zu erwähnen — die Wörter: *Einheit*, Summe, Glieder, Addiren, Minuend, Subtrahend, *Factor*, *Product*, *Multipliciren*, Potenz, Wurzel ... beziehungsweise durch: *Stift*, Gesamt, Stücke, Fügen, Vorrath, Abzug, *Fach*, *Zeug*, *Weben*, Höhe, Tiefe u. s. w. In Anbetracht, dass für das wissenschaftliche Zusammenarbeiten der verschiedenen Culturvölker eine Uebereinstimmung der aus einer todten Sprache zu entnehmenden Kunstausdrücke wesentlich ist, und dass mithin die Annahme der Grassmann'schen Vorschläge einfach die Ignorirung oder gänzliche Verkennung der deutschen Wissenschaft im Auslande nach sich ziehen würde, muss ich eine derartige Tendenz überhaupt missbilligen, namentlich aber deren (l. c.) vorliegende Uebertreibung im Interesse der genialen von den Verfassern in die Welt gesetzten Gedanken lebhaft beklagen. —

§ 18. Discussion der zwischen ihnen möglichen Beziehungen der Werthgemeinschaft.

Fragen wir uns nun zunächst, in wie vielerlei logischen Beziehungen die vieldeutigen Ausdrücke (68) unter einander und zu eindeutigen Zahlzeichen stehen können, so werden wir die eine blosse Negation ausdrückenden Beziehungen der Ungleichheit, Nichtunterordnung u. s. w. zunächst ausser Acht lassen dürfen, weil die daran sich knüpfenden Schlussfolgerungen zu inhaltsarm erscheinen.

Dasselbe gilt in noch höherem Grade von der Beziehung der Coordination, die ja, wie schon angedeutet, an sich betrachtet nichtssagend ist und überhaupt unter den Beziehungen künftig eine ähnliche Rolle spielen wird wie die Null unter den Zahlen, d. h. uns vorzugsweise dazu dienen wird, um den Ausfall oder Mangel einer anderweitigen Beziehung auszudrücken, die Stelle zu markiren, an der sie unter Umständen sich einstellen kann.

Von Belang sind nur die Fälle von Beziehungen, welche das Vorhandensein einer *Werthgemeinschaft* in sich schliessen, nämlich aussagen, dass die beiderseitigen Ausdrücke in einzelnen Werthen mit einander übereinstimmen.

Als Zeichen für alle denkbaren Fälle derartiger Beziehungen sind in der Einleitung No. 20 die folgenden vier eingeführt worden:

$$(77) \qquad (=),\ \succcurlyeq,\ \preccurlyeq,\ =,$$

von welchen nach den ursprünglich für sie gegebenen Definitionen das erste auch in jedes der drei folgenden, sowie die drei ersten in das letzte ausarten oder degeneriren können.

Beiläufig mahnt dieser Umstand (dass einige von den Beziehungszeichen auch in andere übergehen können) beim Operiren mit vieldeutigen Ausdrücken von vornherein zu einer gewissen Vorsicht, damit die Tragweite einer als ein Endergebniss aufgefundenen Beziehung nicht überschätzt werde. Wenn sich durch irgend eine Betrachtung ein Ausdruck A einem andern B als correlativ, übergeordnet, oder untergeordnet herausgestellt, z. B. $A \preccurlyeq B$ erwiesen hat, so wird zwar diese Behauptung $A \preccurlyeq B$ niemals eine „falsche“ genannt werden dürfen. Gleichwohl bleibt noch die Möglichkeit offen, dass sie den Vorwurf der Unvollständigkeit verdient. Die Behauptung kann sehr wohl *noch nicht weit genug gehen*, und häufig gibt in der That eine fernere Ueberlegung kund, dass z. B. zwischen den beiderseitigen Ausdrücken sogar völlige Gleichheit herrscht. Man wird daher bei jeder zwischen (vieldeutigen) Ausdrücken aufgefundenen Proposition, deren Beziehungszeichen — zunächst *provisorisch* — eines der drei ersten:

($=$), $\ni\!=$ oder $=\!\in$ ist, erst nachzusehen haben, ob dieses Beziehungszeichen auch ein endgültiges, *definitives* bleibt.

Mit Rücksichtnahme auf Ein- oder Vieldeutigkeit der durch jene Zeichen (77) zu verknüpfenden Ausdrücke, d. h. also, wenn man den Fall, wo der in eine Beziehung eingehende Ausdruck eindeutig ist, unterscheidet von demjenigen, wo derselbe vieldeutig ist, zeigt sich nun leicht, dass überhaupt nur folgende (sechs) Fälle zulässig sind.

1⁰) Zwei eindeutige Zahlzeichen a und α können nur einander gleich sein; auf die Gleichheit muss jede Art von Werthgemeinschaft zwischen denselben zurückkommen, d. h. es wird nur der Fall:

(78) $$a = \alpha$$

sich zur Betrachtung darbieten.

2⁰) Zwischen einem eindeutigen Ausdruck a und einem vieldeutigen A kann nur Unterordnung in der Weise stattfinden, dass:

(79) $$a =\!\in \mathsf{A}$$

ist; hierauf muss jede Art von Werthübereinstimmung zwischen beiderlei Ausdrücken hinauslaufen. Ein eindeutiger Ausdruck kann aber einem vieldeutigen überhaupt nur untergeordnet sein, indem er einen Werth desselben vorstellt; daher wird a im vorliegenden Falle gleich einem der Werthe α, α_1, α_2, ... sein müssen, und wird man z. B. annehmen können, dass $\alpha = a$ eben diesen Werth bezeichne.

Es kommt nicht selten vor, dass ein Ausdruck nur *pseudo*- oder *scheinvieldeutig* ist, d. h. dass er zwar mehrere verschiedene Namen umfasst, die jedoch von einerlei Bedeutung oder gleichem Werthe sind.

Ist z. B. die Multiplication eindeutig und die Division vieldeutig, so wird der vieldeutige Ausdruck $\frac{a}{c}$, welcher etwa die von einander verschiedenen Werthe umfassen mag:

$$\frac{a}{c} = \left\{ \left(\frac{a}{c}\right)_1, \left(\frac{a}{c}\right)_2, \left(\frac{a}{c}\right)_3, \ldots \right\}$$

mit c nachmultiplicirt solch' einen scheinvieldeutigen Ausdruck zum Product geben; derselbe umfasst zwar die Namen:

$$\frac{a}{c}c = \left\{ \left(\frac{a}{c}\right)_1 c, \left(\frac{a}{c}\right)_2 c, \left(\frac{a}{c}\right)_3 c, \ldots \right\},$$

wobei jedoch (laut Definition von $\frac{a}{c}$): $\left(\frac{a}{c}\right)_1 c = \left(\frac{a}{c}\right)_2 c = \ldots = a$ und also auch $\frac{a}{c}c = a$ sein wird. Ein ähnlicher Fall liegt beispielsweise auch auf der dritten Operationsstufe vor, wenn die n-deutige Wurzel $\sqrt[n]{1}$ auf die n^{te} Potenz erhoben wird, u. s. w.

In solchen Fällen nun — und ausschliesslich in diesen — kann auch eine Beziehung von der Form:

(80) $$a = \mathsf{A}$$

zugelassen werden. Alsdann aber muss selbstverständlich alles was über die Zahl a ausgesagt werden kann, auch gelten von A, d. h. Geltung haben, mit welchem der in dem A vereinigten Namen diese Zahl auch benannt werden mag. Der Ausdruck A wird alsdann vollkommen wie ein *eindeutiger* zu betrachten und zu behandeln sein.

Aus dem soeben gesagten fliesst eine sehr wichtige Folgerung hinsichtlich der Unzulässigkeit gewisser Prämissen. Es geht daraus, wenn etwa die Multiplication eine vieldeutige Operation ist, hervor, dass man sich die Aufgabe, eine Gleichung wie:

$$b \cdot x = a \text{ oder } a = x \cdot c$$

nach x aufzulösen, überhaupt nicht stellen kann, denn da nach unsern Conventionen linkerhand ein vieldeutiger Ausdruck, rechts aber eine eindeutig bestimmte Zahl steht, so kann Gleichheit zwischen beiden von vornherein nicht stattfinden; man kann vielmehr vernünftigerweise die Zahl x nur so zu bestimmen suchen, dass a *einen* der Werthe des vieldeutigen Productes bx oder xc vorstellt. Dann aber sind die obigen Gleichungen, welche die Voraussetzungen oder Daten der Aufgabe ausdrücken sollten, erst wie folgt zu berichtigen:

$$bx \ni a \text{ resp. } a \in xc.$$

Ebenso sind bei Vieldeutigkeit der Divisionen künftig Annahmen wie: $x = a : b$, $x = \frac{a}{c}$ unzulässig, und entweder, woferne x eine eindeutig bestimmbare Zahl vorstellen soll, zu ersetzen durch: $x \in a : b$ resp. $x \in \frac{a}{c}$ [oder, wenn man will, auch: $x = (a : b)_0$, $x = \left(\frac{a}{c}\right)'$, u. dergl.], oder aber, woferne dies nicht gefordert wird, zu ersetzen durch: $X = a : b$, $X = \frac{a}{c}$, wo dann links ebenfalls vieldeutige Ausdrücke stehen werden. —

Was nun endlich die Beziehungen betrifft, die zwischen *zwei* vieldeutigen Ausdrücken A und A bestehen können, so sind es nach Einleitung Nr. 20 folgende vier:

3⁰) Es kann sein:

(81) $$A \; (=) \; \mathsf{A},$$

was der Fall ist, wenn auch nur *ein* Werth von A übereinstimmt mit einem Werthe von A; es kann deshalb für diesen Fall als ungünstigste Annahme stets die zu Grunde gelegt werden, dass beispielsweise nur $a = \alpha$ sei; dergleichen Relationen können auch noch mehrere bestehen, wie $a_1 = \alpha_1$, $a_2 = \alpha_2$, ..., jedoch muss, wenn die Beziehung nicht in eine der folgenden übergehen soll, sowohl A noch Werthe a als auch A noch Werthe α umfassen, die in eine derartige Relation nicht eingehen.

4⁰) kann sein:

$$A \succcurlyeq \mathsf{A}, \tag{82}$$

wenn jedem α ein ihm gleiches a gegenübergestellt werden kann, dagegen einige a noch übrig sind, die sich ohne Beziehung zu den α finden.

Indem bezüglich der a und α das umgekehrte stattfindet, wird

5⁰) sein können:

$$A \preccurlyeq \mathsf{A} \tag{83}$$

und endlich, wenn weder von der Werthenreihe der a noch von der Werthenreihe der α ein Rest von solchen Werthen übrig bleibt, welche keinem Werth der andern Reihe gleich sind, wird man

6⁰) die Beziehung haben:

$$A = \mathsf{A}. \tag{84}$$

Für alle Beweisführungen von Sätzen, welche die Verknüpfung derartiger Urtheile, sowie überhaupt die an solche sich knüpfenden Schlüsse betreffen, ist es von hoher Wichtigkeit, die vorstehenden sechs Fälle unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu bringen.

Lässt man die Eindeutigkeit als einen speciellen Fall der Vieldeutigkeit auch bei den durch grosse Buchstaben vorgestellten Ausdrücken mit zu, so gelingt es in der That, alle diese Fälle unter einer gemeinsamen Form darzustellen wie folgt.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{A}$ die ganze Gruppe der Werthe (oder eventuell den einzigen Werth), welche den Ausdrücken A und A gemeinsam sind, mit A' die übrigen Werthe von A und ebenso mit A' die Gruppe der dem A nicht ebenfalls angehörigen Werthe von A, so kann man die Beziehung (81) der Correlation, d. i. der *theilweisen* (eventuell sogar einfachen) *Werthgemeinschaft* zerlegen in die beiden Gleichungen:

$$A = \{\mathfrak{A},\ A'\}, \qquad \mathsf{A} = \{\mathfrak{A},\ \mathsf{A}'\}, \tag{85}$$

und umgekehrt: wenn zwei derartige Gleichungen zusammen stattfinden, so muss zwischen A und A die Correlation:

$$A\ (=)\ \mathsf{A}$$

bestehen. Die Darstellung (85) umfasst aber auch die übrigen drei Fälle von noch möglichen Beziehungen, sobald man den Vorbehalt macht, dass von den restirenden Ausdrücken A', A' der eine oder der andere, oder dass alle beide auch *fehlen* dürfen. Fehlt nämlich A', so ist offenbar $A \succcurlyeq \mathsf{A}$; fehlt A', so ist $A \preccurlyeq \mathsf{A}$, fehlen alle beide, so ist $A = \mathsf{A}$, und zieht auch umgekehrt die Subsumtion oder *einseitige* Werthübereinstimmung das Fehlen des einen, und die Gleich-

heit oder *durchgängige* Werthgemeinschaft das Fehlen beider Restausdrücke mit Nothwendigkeit nach sich.

Indem also, je nachdem A' oder A' fehlt, auch in allen an die Gleichungen (85) noch fernerhin geknüpften Schlussfolgerungen und namentlich in den Endresultaten jedesmal diejenigen (Unter-)Ausdrücke weggelassen werden, welche von dem einen oder andern jener Restausdrücke herrühren, wird es möglich, alle obigen Fälle von logischen Wechselbeziehungen gleichzeitig abzuhandeln.

Um mich kurz auszudrücken, werde ich Unterausdrücke, die wie A', A' auch fehlend gedacht werden dürfen, künftig als *facultative* von den andern (den *obligatorisch* anzunehmenden) Unterausdrücken, wie $\mathfrak{A}$, unterscheiden. —

§ 49. Verknüpfung aller Arten von Propositionen durch ein- oder vieldeutige Operationen.

Es drängt sich nun die Frage auf, welche Schlüsse sich dadurch ziehen lassen, dass man eine Proposition von irgend einer der sechs im vorigen Paragraphen betrachteten Arten operativ verknüpft mit irgend einer andern derartigen Proposition, mit andern Worten dass man etwa eine der folgenden 6 linker Hand stehenden Propositionen durch eine (selbst ein- oder vieldeutige) Operation verbindet mit einer der 6 rechter Hand daneben geschriebenen Propositionen:

$$(86)\quad \left\{\begin{array}{lc|c} 1^0) & b = \beta & c = \gamma \\ 2^0) & b \eqslantless \mathsf{B} & c \eqslantless \Gamma \\ 3^0) & B (=) \mathsf{B} & C (=) \Gamma \\ 4^0) & B \eqslantgtr \mathsf{B} & C \eqslantgtr \Gamma \\ 5^0) & B \eqslantless \mathsf{B} & C \eqslantless \Gamma \\ 6^0) & B = \mathsf{B} & C = \Gamma. \end{array}\right.$$

Der Vollzug der gedachten ganz beliebigen Operation mag durch einfaches Nebeneinanderstellen der als Operationsglieder fungirenden Buchstaben oder Ausdrücke angedeutet werden. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit kann ferner angenommen werden, dass die Ausdrücke in der ersten Columne stets das erste und die in der zweiten Columne immer das zweite Operationsglied liefern. Man erhält alsdann folgende $6 + \frac{6 \cdot 5}{2} = 21$ verschiedenen Schlussfolgerungen, bei deren Zusammenstellung es sich empfiehlt, die Nummern der Propositionen, welchen die Ausdrücke entstammen, den letzteren als Indices anzuhängen:

$$
87)\left\{\begin{array}{l}
b_1c_1=\beta_1\gamma_1,\\
b_1c_2\eqslantless\beta_1\Gamma_2,\quad b_2c_2\eqslantless\mathsf{B}_2\Gamma_2,\\
b_1C_3(=)\beta_1\Gamma_3,\quad b_2C_3(=)\mathsf{B}_2\Gamma_3,\quad B_3C_3(=)\mathsf{B}_3\Gamma_3,\\
b_1C_4\eqslantgtr\beta_1\Gamma_4,\quad b_2C_4(=)\mathsf{B}_2\Gamma_4,\quad B_3C_4(=)\mathsf{B}_3\Gamma_4,\quad B_4C_4\eqslantgtr\mathsf{B}_4\Gamma_4,\\
b_1C_5\eqslantless\beta_1\Gamma_5,\quad b_2C_5\eqslantless\mathsf{B}_2\Gamma_5,\quad B_3C_5(=)\mathsf{B}_3\Gamma_5,\quad B_4C_5(=)\mathsf{B}_4\Gamma_5,\quad B_5C_5\eqslantless\mathsf{B}_5\Gamma_5,\\
b_1C_6=\beta_1\Gamma_6,\quad b_2C_6\eqslantless\mathsf{B}_2\Gamma_6,\quad B_3C_6(=)\mathsf{B}_3\Gamma_6,\quad B_4C_6\eqslantgtr\mathsf{B}_4\Gamma_6,\quad B_5C_6\eqslantless\mathsf{B}_5\Gamma_6,\quad B_6C_6=\mathsf{B}_6\Gamma_6.
\end{array}\right.
$$

Durch Vertauschung der Buchstaben b, β, B, B mit c, γ, C, Γ, sowie des ersten und des zweiten Operationsgliedes — oder aber, was auf dasselbe hinauskommt, durch Vertauschung beider Indices auf jeder Seite dieser Propositionen — kann die Anzahl derselben leicht noch um $\frac{6\,.\,5}{2}=15$ vermehrt, und dadurch die von dem Tableau eingenommene Fläche eines Dreieckes zu der eines Rechteckes ergänzt werden.

Es könnten nun diese sämmtlichen Schlüsse leicht einzeln gerechtfertigt werden, indem man auf die Bedeutung der Zeichen und die in den Schemata (69) bis (71) gegebene Erklärung der beiderseitigen Ausdrücke zurückginge.

Am besten jedoch wird man diese zahlreichen Fälle unter allgemeine Regeln bringen und die letzteren mit einem Schlage beweisen. In der That kann man denselben mit Leichtigkeit die nachstehenden vier Regeln entnehmen, von welchen man sich unschwer überzeugt, sowohl, dass sie unter sich verträglich sind, als auch, dass sie vollkommen hinreichen, um alle Fälle im Einklang mit jenem Tableau zu erledigen.

I. *Bei der Verknüpfung einer Gleichung und einer Proposition* (vermittelst einer ein- oder vieldeutigen Operation) *bleibt stets das Beziehungszeichen der letzteren* (*der Proposition*) *unverändert und massgebend für die resultirende Proposition;* es geht in ihm das Gleichheitzeichen gewissermassen auf.

II. *Bei* (ein- oder vieldeutiger) *Verknüpfung einer Proposition, die eine Correlation oder einfache Werthgemeinschaft ausdrückt, mit irgend einer (andern) Proposition geht das Beziehungszeichen der letzteren in dem der Correlation auf.*

III. *Propositionen mit übereinstimmenden Beziehungszeichen behalten das gemeinschaftliche Beziehungszeichen auch in ihrer Verknüpfung bei.*

IV. *Propositionen mit den entgegengesetzten Beziehungszeichen* [$\eqslantgtr$ *und* $\eqslantless$] *erhalten bei ihrer Verknüpfung das Beziehungszeichen* ($=$) *der Correlation oder einfachen Werthgemeinschaft.*

Behufs des *Beweises* dieser Regeln machen wir nun von der Bemerkung am Schlusse des vorigen Paragraphen Gebrauch, d. h. wir setzen:

$$
(88)\qquad B=\{\mathfrak{B}, B'\},\qquad \mathsf{B}=\{\mathfrak{B}, \mathsf{B}'\},
$$

$$
(89)\qquad C=\{\mathfrak{C}, C'\},\qquad \Gamma=\{\mathfrak{C}, \Gamma'\}
$$

unter Vorbehalt eventuellen Wegfalles der accentuirten Ausdrücke.

Wenn nun zuerst C' und Γ' ausfallen, d. h. wenn $C = \Gamma$, so liegt der Beweis der *ersten* Regel darin, dass in den Gleichungen:

$$BC = \{\mathfrak{B}C,\ B'C\}, \qquad \mathsf{B}\Gamma = \{\mathfrak{B}\Gamma,\ \mathsf{B}'\Gamma\}$$

worin $\mathfrak{B}C = \mathfrak{B}\Gamma = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist, die Restausdrücke $B'C$ und $\mathsf{B}'\Gamma$ beziehungsweise genau in denselben Fällen wegfallen müssen, wie B' und B' selbst in den Gleichungen (88).

Um die *zweite* Regel zu beweisen, bilde man allgemein die Producte:

$$BC = \{\mathfrak{B}\mathfrak{C},\ \mathfrak{B}C',\ B'\mathfrak{C},\ B'C'\}, \qquad \mathsf{B}\Gamma = \{\mathfrak{B}\mathfrak{C},\ \mathfrak{B}\Gamma',\ \mathsf{B}'\mathfrak{C},\ \mathsf{B}'\Gamma'\};$$

dieselben stimmen jedenfalls überein in dem Theile $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Wenn ferner $B\ (=)\ \mathsf{B}$, also B' und B' (im allgemeinen) *nicht* fehlen, so enthalten diese Producte nothwendig auch die nicht übereinstimmenden Bestandtheile (genauer: Unterausdrücke) $B'\mathfrak{C}$ und $\mathsf{B}'\mathfrak{C}$; mithin kann in der That blos geschlossen werden: $BC\ (=)\ \mathsf{B}\Gamma$.

Die *dritte* Regel ist zunächst unmittelbar evident für den Fall der Gleichheit bei allen beiden Propositionen; hier nämlich fallen alle vier accentuirten Ausdrücke fort, und ist aus:

$$BC = \mathfrak{B}\mathfrak{C} \text{ und } \mathsf{B}\Gamma = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

sofort der Schluss zu ziehen: $BC = \mathsf{B}\Gamma$. Desgleichen ist diese Regel für den Fall der Correlation schon in der vorigen enthalten und somit erledigt. Dagegen bleibt noch der Fall zu betrachten, wo $B \not\succcurlyeq \mathsf{B}$ und $C \not\succcurlyeq \Gamma$, wo also die Ausdrücke B' und Γ' zu unterdrücken sind. Hier aber kann man sogleich schreiben:

$$B = \{\mathsf{B},\ B'\}, \quad C = \{\Gamma,\ C'\},$$

woraus: $BC = \{\mathsf{B}\Gamma,\ \mathsf{B}C',\ B'\Gamma,\ B'C'\}$ folgt, und also zu ersehen ist, dass $\mathsf{B}\Gamma$ ein Unterausdruck von BC oder $BC \not\succcurlyeq \mathsf{B}\Gamma$ ist. Der letzte noch mögliche Fall, wo die Propositionszeichen die entgegengesetzten sind wie eben, erledigt sich von selbst, indem man die Propositionen des eben behandelten Falles rückwärts liest.

Zum Beweise der *vierten* Regel kann endlich etwa: $B \not\succcurlyeq \mathsf{B}$, $C \not\preccurlyeq \Gamma$ angenommen werden, was den Wegfall der Ausdrücke B' und C' oder das Bestehen der Gleichungen: $B = \{\mathsf{B}, B'\}$, $\Gamma = \{C,\ \Gamma'\}$ nach sich zieht. Aus letzteren aber folgt:

$$BC = \{\mathsf{B}C,\ B'C\}, \qquad \mathsf{B}\Gamma = \{\mathsf{B}C,\ \mathsf{B}\Gamma'\},$$

woraus zu ersehen ist, dass die linkerhand stehenden Operationsergebnisse in dem Unterausdrucke $\mathsf{B}C$ übereinstimmen, dagegen sich auch durch die Unterausdrücke $B'C$ und $\mathsf{B}\Gamma'$ unterscheiden, dass also in der That nur $BC\ (=)\ \mathsf{B}\Gamma$ gefolgert werden darf.

Bei allen vier Regeln ist die Beweiskraft der vorstehenden Schlüsse unabhängig davon, ob die verknüpfende Operation als eine eindeutige oder ob sie als eine vieldeutige gilt. In der That werden auch im letzteren Falle die beiderseits in allen Propositionen collectiv zusammengefassten Ausdrücke $bc, \ldots \beta\gamma, \ldots$ genau die nämlichen sein.

Auch bei Vieldeutigkeit der verknüpfenden Operation folgt aus $b = \beta$ und $c = \gamma$ mit Nothwendigkeit: $bc = \beta\gamma$, wenn nur immer die beiderseits entstehenden Operationsergebnisse als in ihrer vollen Vieldeutigkeit aufzufassende genommen werden.

Da nämlich für eine bestimmte Art von operativer Verknüpfung die Beschaffenheit und Anzahl der Werthe eines Operationsergebnisses lediglich von den Werthen der beiden durch sie verknüpften Operationsglieder abhängen kann — nicht aber von der Beschaffenheit der Namen, mit denen diese sich zufällig bezeichnet finden — so muss das in Einleitung Nr. 18 aufgeführte Princip in der angegebenen Auffassung nun auch für vieldeutige Operationen gültig bleiben.

Fasst man dagegen statt der in ihrer vollen Vieldeutigkeit genommenen Operationsergebnisse nur einzelne Specialwerthe derselben in's Auge, so gilt jenes Princip nicht mehr; es ist alsdann kein Schluss in Bezug auf eine einzelne der zwischen ihnen denkbaren Gleichungen zulässig.

Sind z. B. $(bc)_0$, $(bc)_1, \ldots (\beta\gamma)_0$, $(\beta\gamma)_1, \ldots$ bestimmte Specialwerthe von bc resp. $\beta\gamma$, so könnte, wenn $b = \beta$ und $c = \gamma$ ist, ebensogut: $(bc)_0 = (\beta\gamma)_0$, $(bc)_1 = (\beta\gamma)_1, \ldots$ als auch noch, $(bc)_0 = (\beta\gamma)_1$, $(bc)_1 = (\beta\gamma)_0, \ldots$ u. s w. sein.

Anmerkung.

Merkwürdiger Weise behalten die Regeln I bis IV mutatis mutandis (d. i. bei Weglassung der aufrecht gedruckten Einschaltungen) auch unbeschränkte Geltung, wenn man die Ausdrücke auf beiden Seiten der zu Prämissen genommenen Propositionen:

$$B\ (=),\ \ni,\ \in,\ = \mathrm{B} \text{ und } C\ (=),\ \ni,\ \in,\ = \Gamma$$

nicht durch irgend eine Rechnungsoperation, sondern durch den Process der *collectiven Zusammenfassung* selbst verknüpft.

Für diesen Fall jedoch sind die Regeln ungleich leichter zu beweisen.

Aus (88) und (89) nämlich geht durch die logische Addition oder collective Zusammenfassung hervor:

$$\{B,\ C\} = \{\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ B',\ C'\},\quad \{\mathrm{B},\ \Gamma\} = \{\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathrm{B}',\ \Gamma'\};$$

und hieraus folgt zunächst, dass sicherlich:

$$\{B,\ C\}\ (=)\ \{\mathrm{B},\ \Gamma\}$$

sein wird.

Das Zeichen dieser Beziehung oder der damit identischen:

$$\{\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ B',\ C'\}\ (=)\ \{\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathrm{B}',\ [illegible]$$

ist jedoch nur dann ein definitives, wenn in der letzteren weder rechts noch links die accentuirten Ausdrücke beide fortfallen.

Wenn also überhaupt B (=) B ist, wo dann jedenfalls B' und B′ bleiben muss (ebenso, wenn C (=) Γ, wo mindestens C' und Γ′ stehen bleiben), oder aber, wenn links B', rechts Γ′ (oder umgekehrt links C und rechts B′) nicht fehlt, in welchem Falle die beiden Prämissen entgegengesetzte Subsumtionszeichen enthalten, so ist immer jene Correlation eine endgültige.

Dagegen geht das gedachte Correlationszeichen in $\ni\!=$ über, wenn, während links noch mindestens einer der accentuirten Ausdrücke stehen bleibt, rechts B′ nebst Γ′ fortfällt — und dieses trifft zu, wenn in den beiden Prämissen das eine Beziehungszeichen selbst $\ni\!=$, das andere entweder = oder ebenfalls $\ni\!=$ ist. Aehnlich geht in dem zum eben betrachteten entgegengesetzten Falle jenes Correlationszeichen in $=\!\in$ über.

Dasselbe geht endlich in das Zeichen = über, wenn alle accentuirten Ausdrücke gleichzeitig fehlen, d. h. wenn auch in den beiden Prämissen nur Gleichheitszeichen bestehen.

Die Verallgemeinerungen der vorstehenden Sätze auf die gleichzeitige Verknüpfung von mehr als zwei Propositionen sind naheliegend. —

§ 50. Modificationen des im Abschnitt I. vorangegangenen für vieldeutige Operationen.

Jede der drei in § 46. betrachteten Operationen kann ungehindert als eine vieldeutige angenommen werden. Da es in der That vieldeutige Ausdrücke und Operationen gibt, so ist man jedenfalls berechtigt zu einer solchen Annahme, so lange — wie dort stipulirt wurde — die Multiplication nur aufgefasst wird als Repräsentant oder Typus einer ganz beliebigen (übrigens jederzeit zwei Zahlen miteinander verknüpfenden) Operation.

Aber auch für die Multiplication (oder ihre Umkehrungen) *als solche* ist eine derartige Annahme zulässig, so lange die Natur des Zahlengebietes, auf welchem sie ausgeführt zu denken ist, noch dahin steht. Nur auf dem Gebiet der *gemeinen complexen* Zahlen ist mit Nothwendigkeit die Multiplication eine eindeutige Operation, und hört auch die Division blos für die Zahlen 0 und ∞ bisweilen auf eindeutig zu sein.

Aus dem letzteren Umstande könnte aber selbst auf diesem Gebiete ein Motiv geschöpft werden, den Fall einer Vieldeutigkeit dieser Operation näher in's Auge zu fassen.

Von den vielen Fällen, welche nun hienach vorliegen können, jenachdem nämlich von den drei einander entgegengesetzten Operationen gar keine oder aber die eine oder andre, oder irgend zwei, oder sämmtliche drei vieldeutig werden, genügt es völlig, nur folgende drei eingehend betrachtet zu haben:

erstens den bereits erledigten Fall, wo alle drei Operationen eindeutig sind,

zweitens den Fall, wo die directe Operation eindeutig und die inversen Operationen beide vieldeutig sind,

drittens den Fall, wo alle drei Operationen vieldeutig sind.

Wäre z. B. die directe Operation vieldeutig und die inverse eindeutig, so könnte man, da die directe Operation selbst wieder als die Umkehrung ihrer inversen anzusehen ist, diesen Fall auf den zweiten zurückführen, indem man einfach die Benennungen „direct" und „invers" vertauschte. Wenn ferner nur die eine inverse Operation vieldeutig, die andre aber eindeutig wäre, so könnte dieser Fall als ein specieller aus dem zweiten oder dritten abgeleitet werden, in Anbetracht, dass die Eindeutigkeit nur ein besondrer Fall der Vieldeutigkeit ist. In ähnlicher Weise zwar könnte man auch hinsichtlich des zweiten Falles auf den dritten als den umfassenderen verweisen.

Es wird jedoch factisch gerade der zweite Fall für die Multiplication auf andern Zahlengebieten weitaus das meiste Interesse beanspruchen, und scheint es mir überhaupt angemessen, die obengenannten drei Fälle förmlich auf die drei successiven Operationsstufen zu vertheilen.

Betrachten wir nun zunächst den *zweiten* Fall etwas näher, so wird also in diesem jedes Product bc zweier in einer bestimmten Ordnung miteinander multiplicirter bestimmter Zahlen selbst eine eindeutig bestimmte Zahl vorstellen; dagegen sind die Quotientenausdrücke $a:b$ und $\frac{a}{c}$ noch einer näheren Erklärung bedürftig. Diese letzteren werden jetzt die Gesammtheit aller der Werthe vorzustellen haben, welchen eine gewisse Eigenschaft gemeinsam ist, und zwar soll eine Zahl x ausschliesslich und jedesmal dann ein Werth des Ausdruckes $a:b$ genannt werden, wenn sie, mit b vormultiplicirt, a gibt, mithin der Gleichung genügt: $bx = a$; ebenso soll der Ausdruck $\frac{a}{c}$ jetzt alle die Zahlen x umfassen, welche, mit c nachmultiplicirt, a geben, oder die Gleichung erfüllen: $xc = a$.

Die Definition der beiderlei Quotienten liegt m. a. W. in der [Fe]stsetzung, dass die nachstehend untereinander geschriebenen Pro[pos]itionen sich gegenseitig bedingen müssen:

$)_\alpha$	$bx = a,$	$xc = a,$
$(90)_\beta$	$x \mathrel{=\!\!\!\in} a : b.$	$x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{c}.$

Nach diesen Definitionen haben nun die beiden fundamentalen Relationen:

(91) $b \,.\, (a : b) = a$ | $\frac{a}{c} \cdot c = a$

wieder unveränderte Gültigkeit. Die Bedeutung derselben ist aber jetzt eine etwas andere geworden. Die letzte Formel z. B. bleibt richtig, welchen der speciellen Werthe $x, x', x'', \ldots$ des Ausdruckes $\frac{a}{c}$ man auch an die Stelle desselben setzt; sie gilt deshalb nach den Conventionen des § 47. auch dann, wenn man unter $\frac{a}{c}$, wie ausgemacht wurde, die ganze Gattung dieser Werthe $x, x', x'', \ldots$ auf einmal versteht, und demgemäss unter $\frac{a}{c}c$ die ganze Gattung der Productausdrücke $xc, x'c, x''c \ldots$, die sich durch Multiplication jener speciellen Werthe mit c im einzelnen ergeben und demnach zwar verschiedene Namen aber einerlei Werth a besitzen.

Die Productausdrücke linker Hand in den Relationen (91) sind eben diejenigen, welche in § 48. als pseudomultiform (scheinvieldeutig) bezeichnet wurden.

Aus den Propositionen:

$(92)_\alpha$ $x : b \succcurlyeq a$ | $\frac{x}{c} \succcurlyeq a$,

in welchen ja das Beziehungszeichen kein anderes als das angegebene sein kann, folgt durch Auflösung nach x:

$(92)_\beta$ $x = b\,a$ | $x = a\,c$

und wenn dieser Werth nun in $(92)_\alpha$ eingesetzt wird, ergibt sich die auch von selbst schon verständliche Relation:

(93) $(b\,a) : b \succcurlyeq a$ | $\frac{ac}{c} \succcurlyeq a$,

welche hier an Stelle von (62) des § 46. treten muss.

Um endlich die Propositionen:

$(94)_\alpha$ $\frac{a}{x} \succcurlyeq b$ | $a : x \succcurlyeq c$

nach x aufzulösen, folgert man erst nach (92): $a = b\,x$ resp. $a = xc$ und hernach:

$(94)_\beta$ $x \preccurlyeq a : b$ | $x \preccurlyeq \frac{a}{c}$.

Verknüpft man aber die Proposition $(94)_\beta$ mit der Gleichung $a = a$ nach der Regel I des vorigen Paragraphen, so folgt: $\frac{a}{x} \preccurlyeq \frac{a}{a : b}$ resp. $a : x \preccurlyeq a : \frac{a}{c}$, und hieraus in Verbindung mit $(94)_\alpha$ schliesst man rein logisch nach dem Grundsatz (A) in Nr. 20 der Einleitung:

(95) $\frac{a}{a:b} \mathrel{\ni\!=} b$ | $a : \frac{a}{c} \mathrel{\ni\!=} c,$

womit denn in der That die an den Resultaten des ersten Falles anzubringenden Modificationen auch für den zweiten Fall erledigt sind.

Für den *dritten* Fall muss abermals von neuem definirt werden, was unter den Ausdrücken $a:b$, $\frac{a}{c}$ verstanden werden solle. Hier werden die Producte bx, xc selbst jederzeit (oder wenigstens im allgemeinen) vieldeutig sein, und können wir daher nur die Festsetzung treffen, dass x immer dann einen Werth von $a:b$ resp. $\frac{a}{c}$ vorstellen solle, wenn überhaupt nur einer der Werthe von bx resp. xc gleich a wird. Diese Festsetzung schliesst also die Coexistenz der Propositionen in sich:

$(96)_\alpha$ $bx \mathrel{\ni\!=} a$ | $xc \mathrel{\ni\!=} a,$

$(96)_\beta$ $x \mathrel{=\!\in} a:b$ | $x \mathrel{=\!\in} \frac{a}{c};$

und da hieraus nach der Regel I des vorigen Paragraphen: $bx \mathrel{=\!\in} b\,(a:b)$, resp. $xc \mathrel{=\!\in} \frac{a}{c}\,c$ folgt, so wird nach dem Theorem (A) von Nr. 20 der Einleitung an Stelle der Relationen (61) oder (91) jetzt nur die folgende treten:

(97) $b(a:b) \mathrel{\ni\!=} a$ | $\frac{a}{c}\,c \mathrel{\ni\!=} a.$

Um jetzt die Propositionen:

$(98)_\alpha$ $x:b \mathrel{\ni\!=} a$ | $\frac{x}{c} \mathrel{\ni\!=} a$

nach x aufzulösen, schliesst man ähnlich wie von $(96)_\beta$ auf $(96)_\alpha$:

$(98)_\beta$ $x \mathrel{=\!\in} ba$ | $x \mathrel{=\!\in} ac.$

Aus den letzten Propositionen folgt noch: $x:b \mathrel{=\!\in} (ba):b$ resp. $\frac{x}{c} \mathrel{=\!\in} \frac{ac}{c}$ und hieraus in Verbindung mit $(98)_\alpha$ nach dem mehrerwähnten Grundsatze:

(99) $a \mathrel{=\!\in} (ba):b$ | $a \mathrel{=\!\in} \frac{ac}{c},$

was mit (93) des vorigen Falles übereinstimmt.

Um endlich die Propositionen:

$(100)_\alpha$ $\frac{a}{x} \mathrel{\ni\!=} b$ | $a:x \mathrel{\ni\!=} c$

nach x aufzulösen, folgert man erst nach (98): $a \mathrel{=\!\in} bx$ resp. $a \mathrel{=\!\in} xc$ und hierauf (cf. 96) ebenso weiter:

$$(100)_\beta \qquad x \mathrel{=\!\!\!\in} a : b \qquad \Big| \qquad x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{c},$$

was die verlangten Auflösungen sind.

Von da erhält man endlich ebenso wie oben den Lehrsatz:

$$(101) \qquad b \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{a : b} \qquad \Big| \qquad c \mathrel{=\!\!\!\in} a : \frac{a}{c},$$

der sich mit (95) des vorigen Falles abermals in Uebereinstimmung befindet.

Vergleicht man die Ergebnisse, zu welchen wir hier für den zweiten und für den dritten Fall gelangt sind, im Ueberblick mit den früher für den ersten Fall gefundenen, so sieht man, dass alle dort zulässig gewesenen Schlussfolgerungen hier ebenfalls gezogen werden können, wenn man nur eine geringfügige Modification anbringt, nämlich gewisse Gleichheitszeichen passend in Subsumtionszeichen umwandelt.

Nur *ein* Schlussverfahren des vorigen Abschnittes — und zwar dasjenige, welches in § 46. nicht mit recapitulirt und so bisher ausser Betracht geblieben ist — macht in dieser Beziehung eine Ausnahme. Vor der Anwendung desselben soll deshalb hier ausdrücklich gewarnt werden.

Im *zweiten* Falle wird zwar aus Prämissen, wie:

$$(102)_\alpha \quad \begin{cases} a : b \,(=)\, a' : b, & \Big| \quad \frac{a}{c} \,(=)\, \frac{a'}{c}, \\ a : b \mathrel{\ni\!\!=} a' : b, & \Big| \quad \frac{a}{c} \mathrel{\ni\!\!=} \frac{a'}{c}, \\ a : b \mathrel{=\!\!\!\in} a' : b, & \Big| \quad \frac{a}{c} \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a'}{c}, \\ a : b = a' : b & \Big| \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c} \end{cases}$$

stets unfehlbar zu schliessen sein:

$$(102)_\beta \qquad a = a',$$

wie man leicht beweist, indem man den (resp. einen der) beiderseits übereinstimmenden Werthe mit x bezeichnet, dadurch die Prämisse in zwei Propositionen zerlegt, z. B. die erste $a : b \,(=)\, a' : b$ in die beiden: $x \mathrel{=\!\!\!\in} a : b$ und $x \mathrel{=\!\!\!\in} a' : b$, indem man hierauf den Divisor nach (90) transponirt und die resultirenden Gleichungen: $bx = a$ und $bx = a'$ gegeneinanderhält.

Das Kürzen einer Gleichung mit einem Divisor (welches durch Multiplication bewirkt wird), ist also hier auch noch gestattet.

Nicht aber das Kürzen mit einem Factor (durch Division). Aus Gleichungen wie:

$$ba = ba' \text{ oder } ac = a'c$$

kann — abgesehen von der nichtssagenden Beziehung der Coordination — durchaus kein Schluss in Bezug auf a und a' gezogen werden; zwischen diesen Werthen braucht ausser der Relation: $a \ngtrless a'$ durchaus keine Beziehung stattzufinden.

Im *dritten* Falle sind diese Operationen sogar alle beide unzulässig — die Unterdrückung eines Divisors sowohl als die eines Factors, also die Unterdrückung eines (beiderseits übereinstimmenden) Operationsgliedes, oder das „Kürzen" überhaupt. Hier kann auch aus den Prämissen $(102)_\alpha$ ebensowenig wie aus den folgenden:

$$(103)\quad \left\{\begin{array}{l|l} ba(=)ba' & ac(=)a'c \\ ba \ngeq ba' & ac \ngeq a'c \\ ba \nleq ba' & ac \nleq a'c \\ ba = ba' & ac \doteq a'c \end{array}\right.$$

irgend ein Schluss in Bezug auf das gegenseitige Verhalten von a und a' selber gezogen werden, der lehrreich oder von Belang wäre; namentlich aber wird dann nicht etwa $a = a'$ sein müssen.

Es ist also die Anwendung der in § 45. auseinandergesetzten Methoden hier geradezu zu untersagen.

Dagegen ist in allen Fällen das „Erweitern" einer Gleichung oder Proposition, d. i. die beiderseitige Einführung eines nämlichen Operationsgliedes, nach dem Grundsatz I des vorigen Paragraphen stets unbedingt gestattet.

Wenn also z. B.:

$$A\,(=)\,A'$$

ist, so muss auch:

$$bA\,(=)\,bA', \quad Ac\,(=)\,A'c, \quad A:b\,(=)\,A':b,$$
$$\frac{A}{c}\,(=)\,\frac{A'}{c}, \quad b:A\,(=)\,b:A', \quad \frac{c}{A}\,(=)\,\frac{c}{A'}$$

sein, und ebenso für jedes andere Beziehungszeichen der Werthgemeinschaft, welches man noch an Stelle von (=) durchweg setzen mag. —

§ 51. Die Transposition ein- oder vieldeutiger Ausdrücke durch ebensolche Operationen.

Um nicht den Anschein zu erwecken, als ob das (lange Zeit mit Unrecht verpönt gewesene) logisch folgerechte Operiren mit vieldeutigen Ausdrücken einen übergrossen Aufwand von Vorarbeit und Gedächtnissmaterial erfordere, finde ich für gut, hier nachstehendes zu bemerken. Es ist zum Verständniss der im zweiten Abschnitt des nächstfolgenden Kapitels angegebenen Schlussreihen und der eleganten Resultate, zu denen sie führen, keineswegs unumgänglich, die Untersuchungen, welche in den nächsten beiden Paragraphen folgen (sowie auch schon diejenigen des § 49.) eingehend verificirt zu haben. Man wird vielmehr die Herleitung der gedachten Resultate mit den dabei gegebenen Erläuterungen ohne weiteres verständlich finden und sollen demnach die nun anzureihenden Unter-

suchungen nur den Zweck haben, einerseits — wenn man will — als Vorübung zu dienen, und andrerseits, alle bei dergleichen Operationen (auch für die in diesem Bande nicht mehr behandelten Fälle) möglicherweise künftig noch auftauchenden Schwierigkeiten im voraus mit Vollständigkeit zu heben.

Die Vollständigkeit erfordert, dass wir auch die Transposition für die Fälle untersuchen, wo beliebige vieldeutige Ausdrücke, mit einander oder mit eindeutigen, sich auf einer Seite einer Proposition verknüpft finden.

Um nun die grosse Mannigfaltigkeit der hier sich darbietenden Fälle zu verringern, möge durch den *auf*(wärts)strebenden Pfeil irgend eine dieser multiplicativen oder divisiven Operationen angedeutet werden, d. h. es bezeichne $b \uparrow c$ einen der 6 folgenden Ausdrücke:

(104) $$b \cdot c, \quad c \cdot b, \quad b : c, \quad c : b, \quad \frac{b}{c}, \quad \frac{c}{b}.$$

Alsdann lassen nach § 50 (90, 92, 94) und (96, 98, 100) die bisher betrachteten Transpositionen sich in der Festsetzung zusammenfassen, dass die beiden Propositionen:

(105) $$b \uparrow c \succcurlyeq a, \quad b \preccurlyeq a \downarrow c,$$

einander gegenseitig bedingen müssen — woferne nur

erstens der durch den *ab*(wärts)strebenden Pfeil angedeuteten Operation die Bedeutung untergelegt wird, dass unter $a \downarrow c$ *beziehungsweise* einer der folgenden Ausdrücke zu verstehen ist:

(106) $$\frac{a}{c}, \quad a : c, \quad ca, \quad \frac{c}{a}, \quad ac, \quad c : a.$$

und woferne zweitens in einer jeden der beiden Propositionen (105) das Subsumtionszeichen verwandelt wird in ein Gleichheitszeichen, sobald die durch den Pfeil in ihr angedeutete Operation eine eindeutige ist.

Anmerkung. Es wird gut sein, hier daran zu erinnern, dass die Prämisse $b \uparrow c \succcurlyeq a$ von (105) auch in der Form $(b \uparrow c)_m = a$ augeschrieben werden kann, indem man sich mit $(b \uparrow c)_m$ einen bestimmten Specialwerth des vieldeutigen Ausdrucks $b \uparrow c$ bezeichnet denkt. — $\uparrow$ und $\downarrow$ mag „auf“ und „ab“ gelesen werden. —

Geht man von der ersten Proposition (105) zur zweiten über, so sagen wir: es werde das Operationsglied b (links) isolirt und das c „vermittelst der durch den abstrebenden Pfeil markirten Operation“ von der linken Seite jener (ersteren) Proposition nach der rechten hin geschafft oder transponirt.

Dies vorausgesetzt besteht nun unsre Aufgabe darin, wenn bei beliebig ein- oder vieldeutigen Ausdrücken A, B, C zwischen A und dem Operationsergebniss $B \uparrow C$ irgend eine Art von Werthgemeinschaft besteht, zu untersuchen, welche Schlüsse sich in dieser Hinsicht bezüglich der Ausdrücke B (selbst) und $A \downarrow C$ ziehen lassen werden.

Besteht nun wirklich zwischen A und $B \uparrow C$ irgend eine Werthgemeinschaft, so muss wenigstens *ein* Werth von A, zum Beispiel a, übereinstimmen mit einem Werthe eines der gemäss (71) unter $B \uparrow C$ begriffenen Operationsergebnisse, z. B. mit $b \uparrow c$, d. h. es muss eine Proposition wie $b \uparrow c \ni a$ bestehen. Da hieraus aber nach (105) sofort die andre Proposition $b \in a \downarrow c$ folgt und letztere eine Werthgemeinschaft zwischen B und $A \downarrow C$ ausdrückt, so ist als erste Regel das Theorem etablirt:

1°) *Die Transposition eines Operationsgliedes (der einen Seite einer Proposition) ist immer ausführbar.* D. h. bei jeder Art von Werthgemeinschaft, welche die ursprüngliche Proposition ausdrücken mochte, besteht auch wieder zwischen dem stehenbleibenden Operationsgliede und dem auf der andern Seite neugebildeten Ausdruck eine Werthgemeinschaft.

Eine unmittelbare Consequenz dieses Satzes ist nach § 48. 1°) und 2°) die folgende Regel:

2°) *Bleibt auf der einen Seite ein eindeutiger Ausdruck stehen* (oder entsteht dort ein solcher), *so ist derselbe untergeordnet dem auf der andern Seite neu zu bildenden* (resp. noch befindlichen), *und zwar dem letzteren gleich, wenn auch dieser eindeutig wird.*

Abgesehen von den hiemit bereits erledigten Fällen gilt nun weiter die Regel:

3°) *Bei Transposition eines eindeutigen Ausdruckes vermittelst einer eindeutigen Operation bleibt das Beziehungszeichen der Proposition unverändert.* Ist also $\downarrow$ das Zeichen einer eindeutigen Operation und c ein eindeutiges Zahlzeichen, so muss aus:

$$B \uparrow c \,(=),\ \ni,\ \in,\ = A \tag{107}$$

beziehungsweise folgen:

$$B \,(=),\ \ni,\ \in,\ = A \downarrow c. \tag{108}$$

Beweis. Wegen der Eindeutigkeit der Operation $\downarrow$ muss nach dem zweiten sub (105) angeführten Vorbehalt für

$$b \uparrow c \ni a \text{ stets } b = a \downarrow c$$

sein und darf auch wieder von der zweiten dieser Propositionen auf die erste zurückgeschlossen werden. Alsdann muss ferner der Ausdruck

$$(b \uparrow c) \downarrow c = b \tag{109}$$

unbedingt eindeutig sein, da der möglicherweise vieldeutige Ausdruck $b \uparrow c$ doch jedenfalls nur solche Zahlen a in sich begreift, für die $a \downarrow c = b$ ist.

Man kann nun mit der ursprünglich gegebenen Proposition (107) die (eindeutige) Operation vollziehen, welche durch das Nachsetzen

des Zeichens $\downarrow c$ hinter die beiden Seiten derselben ausgedrückt wird, und da dieses Verfahren hinausläuft auf eine operative Verknüpfung jener Proposition (107) mit der *Gleichung* $c = c$, so bleibt hiebei nach § 49., I. das Beziehungszeichen der ersteren unverändert, d. h. es ist beziehungsweise:

(110) $$(B \uparrow c) \downarrow c\ (=),\ \succcurlyeq,\ \preccurlyeq,\ = A \downarrow c.$$

Wegen der vorhin erwähnten aus der Eindeutigkeit von $\downarrow$ geflossenen Eigenschaft (109) muss aber hier die linke Seite:

$$(B \uparrow c) \downarrow c = \{(b \uparrow c) \downarrow c,\ (b_1 \uparrow c) \downarrow c,\ (b_2 \uparrow c) \downarrow c,\ \ldots\}$$
$$= \{b,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\} = B$$

selbst sein, und nach Einsetzung dieses Werthes in (110) ist die Richtigkeit der Behauptung (108) erwiesen, in welcher demnach in der That jeweils *dasselbe* Beziehungszeichen wie in (107) gelten muss.

Im Falle der Vieldeutigkeit der Operation $\downarrow$ ist nur der letztere Schluss oder die Anwendung von (109) unzulässig, obgleich sonst alles andere sich ebenso verhält. Alsdann nämlich folgt aus

$$b \uparrow c \succcurlyeq a \text{ nur } b \preccurlyeq a \downarrow c, \text{ und } (b \uparrow c) \downarrow c \succcurlyeq b,$$

somit auch:

(111) $$(B \uparrow c) \downarrow c \succcurlyeq B.$$

Für das weiter folgende wird es uns nun zu gute kommen, zuzusehen, welche Modificationen diese veränderte Sachlage nach sich ziehen wird. Man findet, dass bezüglich des in (107) vorauszusetzenden Beziehungszeichens nunmehr zwei Fälle unterschieden werden müssen, je nachdem alle Werthe von $B \uparrow c$ unter denen von A enthalten sind, oder nicht.

Zuerst nämlich, wenn ursprünglich:

(112) $$B \uparrow c \preccurlyeq,\ = A,$$

also:

(113) $$(B \uparrow c) \downarrow c \preccurlyeq,\ = A \downarrow c$$

war, kann mit Gewissheit:

(114) $$B \preccurlyeq A \downarrow c$$

geschlossen werden. Denn für das erste Zeichen, $\preccurlyeq$, ergibt sich dieser Schluss aus (111) und (113) nach dem Grundsatz (A) in Nr. 20 der Einleitung, und für das zweite Zeichen, $=$, ergibt er sich, indem man in (111) die linke Seite auf Grund der gemachten Voraussetzung (113) durch das ihr gleiche $A \downarrow c$ ersetzt.

War dagegen ursprünglich:

(115) $$B \uparrow c\,(=),\ \not\succ A,$$

also:

(116) $$(B \uparrow c) \downarrow c\,(=),\ \not\succ A \downarrow c,$$

so wird jetzt nur:

(117) $$B\,(=)\,A \downarrow c$$

zu schliessen sein. Denn jedenfalls ist die linke Seite von (115) jetzt zerfällbar in zwei Gruppen von Collectivausdrücken $(b \uparrow c)^0$, $(b \uparrow c)'$, $(b_1 \uparrow c)^0$, $(b_1 \uparrow c)'$, ... $(b_k \uparrow c)^0$, $(b_k \uparrow c)'$, ... derart, dass $(b_k \uparrow c)^0$ alle diejenigen Specialwerthe des eventuell vieldeutigen Ausdrucks $b_k \uparrow c$ umfasst, die dem A untergeordnet sind (falls es deren gibt) und ebenso $(b_k \uparrow c)'$ diejenigen Werthe von $b_k \uparrow c$, die zu ihm in keiner Beziehung stehen. Fasst man die Gruppe der ersteren in dem Zeichen $(B \uparrow c)^0$, die Gruppe der letzteren mit $(B \uparrow c)'$ zusammen, so lässt sich also die Zerlegung anbringen: $B \uparrow c = \{(B \uparrow c)^0,\ (B \uparrow c)'\}$, wo $(B \uparrow c)^0 \preccurlyeq,\ = A$, dagegen über $(B \uparrow c)'$ nichts ausgesagt werden kann. Es folgt nun für die in $(B \uparrow c)^0$ vertretenen Werthe b, die durch B^0 zusammengefasst werden mögen, wie vorhin: $B^0 \preccurlyeq A \downarrow c$, wogegen $(B \uparrow c)'$ eine Gruppe B' von solchen b enthalten kann, die in $(B \uparrow c)^0$ nicht vorkommen, und deshalb zu A in keiner Beziehung stehen. Da aber $A \downarrow c$ selbst wegen der Vieldeutigkeit von $\downarrow$ auch Werthe unter sich begreifen kann, die zu dem B^0, und somit zu dem B überhaupt, nicht in Beziehung treten, so geht hieraus hervor, dass in der That nur der Schluss $B\,(=)\,A \downarrow c$ allgemein zulässig bleibt. —

In allen durch das frühere noch nicht erledigten Fällen, also namentlich: *bei Transposition eines eindeutigen Ausdruckes mittelst einer vieldeutigen Operation, sowie eines vieldeutigen Ausdruckes mittelst irgend einer Operation,* kommt endlich als letzte Regel die folgende in Betracht.

4⁰) Woferne nur die Beziehungszeichen jederzeit in der Richtung gelesen werden, nach welcher hin die Transposition stattfindet, also von der Seite des stehenbleibenden Operationsgliedes nach derjenigen des neuzubildenden Operationsergebnisses hin, so gelten die vier Vorschriften:

a) *das Zeichen der Ueberordnung ist beim Transponiren in das der Correlation zu verwandeln;*

b) *das Zeichen der Gleichheit verwandelt sich in das der Unterordnung;*

c) *das Zeichen der Correlation erhält sich unverändert;*

d) *desgleichen bleibt das Zeichen der Unterordnung unverändert bestehen.*

Mit andern Worten — falls etwa von links nach rechts transponirt wird:

I. $\not\ni$ *oder* $(=)$ *gibt* $(=)$ [*Transposition gegen den Strich*];
II. $=$ *oder* $\not\in$ *gibt* $\not\in$ [*Transposition nach dem Strich*].

Die in Klammer beigesetzte Unterscheidung der Transposition als einer *gegen* oder *nach* dem Strich stattfindenden — jenachdem die Richtung der Transposition zuwiderläuft oder nicht zuwiderläuft der Richtung, in welcher die beiden Hälften des Bogens auseinanderstreben, der das Zeichen $=$ durchsetzt oder auf einer Seite einklammern hilft — gibt einen bequemen Anhaltspunkt, um die Regeln dem Gedächtnisse einzuprägen; sie gibt auch einen Fingerzeig ab, wie das Beziehungszeichen der resultirenden Proposition auch für die entgegengesetzte Transpositionsrichtung jederzeit richtig beizusetzen wäre.

In Formeln, wenn:

(118) $$B \uparrow C \,(=)\, A \text{ oder aber } B \uparrow C \not\ni A$$

ist, so folgt im allgemeinen:

(119) $$B \,(=)\, A \downarrow C;$$

wenn dagegen:

(120) $$B \uparrow C \not\in A \text{ oder auch } B \uparrow C = A,$$

so folgt sicher:

(121) $$B \not\in A \downarrow C.$$

Für den Fall der Eindeutigkeit des zu transponirenden Ausdrucks $C = c$ ist der Beweis dieser Regeln bereits in dem unmittelbar vorangegangenen geliefert. Es bleibt noch der Fall zu erledigen, wo der Transponend: $C = \{c, C'\}$ vieldeutig ist, und zwar will ich auch hier wieder zuerst die Regel II beweisen, indem ich eine der beiden Propositionen (120) in's Auge fasse.

Der Beweis ist geleistet, wenn gezeigt wird, dass alle Werthe $b, b_1, b_2, \ldots$ von B enthalten sind in dem Ausdrucke:

$$A \downarrow C = \{A \downarrow c,\; A \downarrow C'\},$$

dass aber der letztere noch einige Werthe mehr umfasst, die zu den Werthen von B in keiner nothwendigen (d. i. in der Prämisse mitbedungenen) Beziehung stehen.

Nun ist: $B \uparrow C = \{B \uparrow c,\; B \uparrow C'\}$ — worin wegen der vorausgesetzten Vieldeutigkeit von C der Restausdruck C' mindestens *ein* Element c_1 umfasst — und da alle Werthe dieses Ausdruckes solchen von A gleich sind, kann man eintheilen: $A = \{A^0, A', \mathfrak{A}\}$, wo

(122) $$B \uparrow c = A^0 \text{ und } B \uparrow C' = A'$$

nothwendig vertretene oder obligatorische Unterausdrücke von A sein werden, dagegen der Restausdruck $\mathfrak{A}$ facultativ ist, nämlich fehlen wird, wann die zweite Proposition (120) gilt.

Schon aus der ersten Gleichung (122) folgt aber: $B \neq\!\!\!\!< A^0 \downarrow c$, wie wir bereits unter 3⁰) gesehen haben, und da $A^0 \downarrow c \neq\!\!\!\!< A \downarrow c$, sowie $A \downarrow c \neq\!\!\!\!< A \downarrow C$, so folgt schliesslich auch: $B \neq\!\!\!\!< A \downarrow C$, wie zunächst nachgewiesen werden sollte.

Das Subsumtionszeichen dieses Resultates ist aber nicht etwa nur ein provisorisches; die gefundene Unterordnung ist vielmehr definitiv, und kann im allgemeinen nicht in Gleichheit übergehen, wie sich daraus ergibt, dass nach (122) über die Unterausdrücke $A^0 \downarrow C'$ und $A' \downarrow c$ des vollständigen Operationsergebnisses:

$$A \downarrow C = \{A^0 \downarrow c,\ A^0 \downarrow C',\ A' \downarrow c,\ A' \downarrow C',\ \mathfrak{A} \downarrow C\}$$

sich nichts würde aussagen lassen. Auch der Unterausdruck $A' \downarrow C'$ kann selbst wieder nur theilweise zu B in Beziehung gebracht werden, da sich auf ihn die nämlichen Schlüsse, wie auf $A \downarrow C$, noch weiter anwenden lassen. Abgesehen hievon bleibt auch der Unterausdruck $\mathfrak{A} \downarrow C$ ohne Beziehung — ein Grund, der jedoch im zweiten Falle (120) fortfällt — und endlich dürfte schon auf $B = A^0 \downarrow c$ aus (122) nur dann geschlossen werden, wenn die Operation $\downarrow$ eindeutig ist, was ja nicht nothwendig der Fall zu sein braucht. —

Behufs Beweises der Regel I oder der Behauptung (119) sind die Prämissen (118) zu betrachten.

In dem allgemeinsten Falle, wo die Operation $\uparrow$ vieldeutig ist, wird nach (72) und (73) $B \uparrow C$ eine Reihe von Specialwerthen umfassen, welche (unter dem Vorbehalt, dass die Indices h und k auch fehlen können) sich sämmtlich in der Form $(b_h \uparrow c_k)_m$ dargestellt annehmen lassen. Einzelne von diesen Werthen, z. B. $(b \uparrow c)_0$, $(b \uparrow c)_2$, $(b_1 \uparrow c)_0$, ... müssen nun mit Werthen von A übereinstimmen, andere dagegen, wie $(b \uparrow c)_1$, $(b \uparrow c)_3$, $(b_2 \uparrow c_1)_1$, ... nicht. Die Gesammtheit der ersteren Specialwerthe will ich mit $(B \uparrow C)^0$ bezeichnen, dagegen die der letzteren unter $(B \uparrow C)'$ verstehen. Die Werthe von A, welche den ersteren gleich sind, fasse ich mit dem Zeichen A^0 zusammen, und endlich mit $\mathfrak{A}$ die möglicherweise noch übrigen Werthe von A. Alsdann bestehen die Zerlegungen: $B \uparrow C = \{(B \uparrow C)^0, (B \uparrow C)'\}$, und $A = \{A^0, \mathfrak{A}\}$, wo

$$(B \uparrow C)^0 = A^0 \tag{123}$$

ist und alle Unterausdrücke obligatorisch vorhanden sind mit Ausnahme von $\mathfrak{A}$, welches auch ganz fehlen kann — falls nämlich die zweite Prämisse (118) gilt.

Sei nun B^0 die Gesammtheit derjenigen b, b_h, ... die in $(B \uparrow C)^0$ vertreten sind, und $\mathfrak{B}$ die Gruppe der eventuell noch übrigen b_k, welche dann alle — vielleicht auch zusammen mit Werthen von B^0 — in $(B \uparrow C)'$ vorkommen müssen; sei also $B = \{B^0, \mathfrak{B}\}$; alsdann folgt

aus (123) ähnlich wie vorhin [bei II, mit Rücksicht auf die Anmerkung zu (105)], dass $B^0 \rightarrow\!\!\!\in A^0 \downarrow C$ ist, wo also rechts einige Werthe von $A^0 \downarrow C$ und ebenso eventuell $\mathfrak{A} \downarrow C$, zur linken dagegen $\mathfrak{B}$ ohne Beziehung bleiben. Mithin wird in der That nur: $B\,(=)\,A \downarrow C$ sein müssen.

Was noch die Frage über den definitiven Charakter dieses resultirenden Beziehungszeichens $(=)$ betrifft, so könnte es freilich sein, dass *sämmtliche* Werthe von B in dem Ausdrucke von $(B \uparrow C)^0$ sich wenigstens mit gewissen Specialwerthen: $(b \uparrow c_k)_0$, $(b_1 \uparrow c_i)_0$, $(b_2 \uparrow c_k)_1$, ... $(b \uparrow c_k)_2$, ... vertreten finden, was den Wegfall von $\mathfrak{B}$ und die Gleichheit: $B^0 = B$ zur Folge hätte. In diesem Falle also, der nur vorliegen kann, wenn die Operation $\uparrow$ vieldeutig ist, würde dann $B \rightarrow\!\!\!\in A \downarrow C$ werden. Die Zulässigkeit dieser Annahme findet jedoch in der Prämisse (118) keinen Ausdruck, kann auch nicht in dieselbe hineingelegt sein, und so muss denn im allgemeinen stets die ungünstigste Annahme zu Grunde gelegt werden.

Wenn dagegen die Operation $\uparrow$ eindeutig ist — und nur in diesem Falle — so könnte man von vornherein $B \uparrow C$ geradezu in $B^0 \uparrow C = A^0$ und $B' \uparrow C$ zerlegen, wo dann B' obligatorisch ist und solche Werthe b von B enthalten muss, die in B^0 nicht vorkommen und ihrerseits auch ohne Beziehung zu $A \downarrow C$ bleiben. Dann also wird die Correlation in (119) niemals in Unterordnung übergehen können. —

§ 52. Fortsetzung. Uebersicht der Schlussfolgerungen und Umkehrbarkeit derselben.

Zieht man nach den im vorigen Paragraphen aufgestellten vier Hauptregeln aus irgend einer Proposition, in welche ein Ausdruck eingeht, nun einen Schluss dadurch, dass man ein Operationsglied dieses Ausdruckes transponirt, so wird dieser Schluss sich entweder als *umkehrbar* oder als *nicht umkehrbar* erweisen.

So ist z. B. der Schluss von $BC\,(=)\,A$ auf $C\,(=)\,A:B$ ein umkehrbarer, da den Regeln gemäss aus der letzteren Proposition nothwendig wieder die erstere folgt. Dagegen ist der Schluss von $C \rightarrow\!\!\!\in A:B$ auf $BC\,(=)\,A$ kein umkehrbarer, da aus der letzteren Proposition, wie eben bemerkt, nur $C\,(=)\,A:B$ folgen würde, was mit der angegebenen Prämisse nicht identisch ist, wenngleich deren Zulässigkeit natürlich nicht damit ausgeschlossen wird. [Vergl. die Bemerkung unter (77)].

Es ist hiernach jederzeit leicht, einen Schluss in Bezug auf seine Umkehrbarkeit zu prüfen. Bei alledem wird man übrigens noch auf einen Punkt aufmerksam sein müssen.

Will man nämlich für die Conclusion jedesmal das definitiv rich

tige Beziehungszeichen erhalten (oder wenigstens dasjenige, welches nach den Regeln des vorigen Paragraphen als solches zu gelten hat), so muss man darauf halten, dass die Conclusion aus der Prämisse immer *direct* — mittelst einer einzigen Transposition, sei es auch eines Dividenden (Zählers oder Antecedenten) — abgeleitet werde, nicht aber mittelst zweier successiver Transpositionen.

Will man z. B. in der Proposition

$$B = \frac{A}{C} \text{ oder auch in } B \succcurlyeq \frac{A}{C}$$

den Nenner C isoliren, so könnte man allerdings mit zwei Schritten an's Ziel kommen; man könnte nämlich (durch Transponiren des C) zuerst schliessen:

$$BC \succcurlyeq A,$$

und hieraus (durch Transponiren des B):

$$C\,(=)\,A:B.$$

Dieses Resultat wäre aber nur provisorisch richtig, denn durch directes Transponiren des Zählers A in der ursprünglichen Prämisse erhält man sogleich genauer und definitiv:

$$C \preccurlyeq A:B. —$$

Sowohl bei Ein- als bei Vieldeutigkeit der im vorigen Paragraphen betrachteten Operation $\uparrow$ und der durch sie in Beziehung gebrachten Ausdrücke A, B, C ist es nun leicht, anzugeben, welche Propositionen von der Form $B \uparrow C\,(=), \succcurlyeq; \preccurlyeq, = A$ nach den Kriterien des § 48. zulässig sind. Man kann so für jeden der drei in § 50. aufgestellten Fälle eine Tafel anlegen, welche alle demselben zuständigen Prämissen enthält und daneben je die beiden nach § 51. aus ihnen fliessenden Schlussfolgerungen angibt. Zur Erläuterung will ich wenigstens für den ersten jener drei genannten Fälle, wo sie sich am einfachsten gestaltet, die gedachte Tafel hinsetzen.

Die Vollständigkeit dieser Tafel — in Bezug auf welche ich hoffentlich nichts übersehen habe — zu controliren, überlasse ich dem Leser. Die Richtigkeit der Beziehungszeichen habe ich (auch in Bezug auf Druckfehler) mit aller mir möglichen Sorgfalt geprüft, und kann dieselbe überdies nach den angegebenen Regeln von jedermann leicht verificirt werden.

Es gehören in der Tafel immer drei in einer Zeile befindliche Felder zusammen; das eine derselben enthält die Voraussetzung, die beiden andern die Schlussfolgerungen, welche sich daran knüpfen. Jenes (bei den nicht umkehrbaren Schlüssen immer das erste Feld) ist mit Pr. (Prämisse) überschrieben, die beiden andern mit Cl. (Conclusion). — Bei den umkehrbaren Schlüssen kann die Proposition eines jeden Feldes nach Belieben zur Prämisse erhoben oder auch als Conclusion angesehen werden, was durch dreifache Ueberschriften angedeutet ist, von denen entweder die ersten oder die mittleren oder die letzten durchgängig massgebend sein werden. — Bisweilen ist auch das Schliessen von der Prämisse

auf die eine der beiden Conclusionen umkehrbar und das auf die andre nicht. Diese Fälle habe ich unter der Ueberschrift „theilumkehrbare Schlüsse" zusammengestellt und entsprechend mit doppelten Ueberschriften versehen — wobei also die unter Cl. Cl. befindliche Proposition allein nicht als Prämisse genommen werden darf. Symmetrie halber sind hier in den drei letzten Zeilen die nämlichen Schlüsse zweimal angeschrieben. — Hienach möchte wohl die Einrichtung und der Gebrauch der Tafel keines weiteren Commentars mehr bedürfen.

Tafel für die Transposition bei Eindeutigkeit sämmtlicher Operationen.

1) *Umkehrbare Schlüsse.*

Pr. Cl. Cl.	Cl. Pr. Cl.	Cl. Cl. Pr.
$bc = a$	$b = \frac{a}{c}$	$c = a : b$
$bc ⋹ A$	$b ⋹ \frac{A}{c}$	$c ⋹ A : b$
$BC ⋺ a$	$B (=) \frac{a}{C}$	$C (=) a : B$
$BC (=) A$	$B (=) \frac{A}{C}$	$C (=) A : B$

Pr. Cl. Cl.	Cl. Pr. Cl.	Cl. Cl. Pr.	Pr. Cl. Cl.	Cl. Pr. Cl.	Cl. Cl. Pr.
$Bc ⋺ a$	$B ⋺ \frac{a}{c}$	$c ⋹ a : B$	$bC ⋺ a$	$b ⋹ \frac{a}{C}$	$C ⋺ a : b$
$Bc (=) A$	$B (=) \frac{A}{c}$	$c ⋹ A : B$	$bC (=) A$	$b ⋹ \frac{A}{C}$	$C (=) A : b$

2) *Theilumkehrbare Schlüsse.*

Pr. Cl.	Cl. Pr.	Cl. Cl.	Pr. Cl.	Cl. Pr.	Cl. Cl.
$Bc ⋺ A$	$B ⋺ \frac{A}{c}$	$c ⋹ A : B$	$bC ⋺ A$	$C ⋺ A : b$	$b ⋹ \frac{A}{C}$
$Bc ⋹ A$	$B ⋹ \frac{A}{c}$	„	$bC ⋹ A$	$C ⋹ A : b$	„
$Bc = A$	$B = \frac{A}{c}$	„	$bC = A$	$C = A : b$	„
$B ⋺ \frac{a}{C}$	$C ⋹ a : B$	$BC ⋺ a$	$C ⋺ a : B$	$B ⋹ \frac{a}{C}$	$BC ⋺ a$
$B ⋹ \frac{a}{C}$	$C ⋺ a : B$	„	$C ⋹ a : B$	$B ⋺ \frac{a}{C}$	„
$B = \frac{a}{C}$	$C = a : B$	„	$C = a : B$	$B = \frac{a}{C}$	„

3) *Nicht umkehrbare Schlüsse.*

Pr.	Cl.	Cl.
$BC \succeq A$	$B(=)\frac{A}{C}$	$C(=)A:B$
$BC \preceq A$	$B \preceq \frac{A}{C}$	$C \preceq A:B$
$BC = A$	„	„

Pr.	Cl.	Cl.	Pr.	Cl.	Cl.
$B \preceq \frac{A}{C}$	$BC(=)A$	$C(=)A:B$	$C \preceq A:B$	$B(=)\frac{A}{C}$	$BC(=)A$
$B = \frac{A}{C}$	$BC \succeq A$	$C \preceq A:B$	$C = A:B$	$B \preceq \frac{A}{C}$	$BC \succeq A$
$B \succeq \frac{A}{C}$	„	„	$C \succeq A:B$	„	„

Bei dem zweiten und dritten Falle des § 50. müssten nicht nur die Conclusionen der vorstehenden Tafel an manchen Stellen modificirt werden, sondern es wird hier auch die Mannigfaltigkeit der zulässigen Prämissen eine andere und nicht unbeträchtlich grössere. Die hierüber anzustellende Untersuchung complicirt sich noch dadurch, dass jetzt auch auf eventuelle Scheinvieldeutigkeit der Ausdrücke Rücksicht zu nehmen ist. In der That ist es leicht zu sehen, dass eine solche nur eintreten kann, wenn gewisse Operationen vieldeutig sind. Sollen nämlich Ausdrücke wie bC, Bc, BC scheinvieldeutig sein, während B und C doch wirklich vieldeutige Ausdrücke vorstellen, so muss beziehungsweise die Messung oder muss die Theilung oder müssen beide Operationen nothwendig vieldeutig sein. Denn schon im allereinfachsten Falle:

$$B = \{b, b_1\}, \quad C = \{c, c_1\} \text{ folgt aus}$$

$$bC = a, \text{ resp. } Bc = a \text{ oder } BC = a, \text{ dass}$$

$$bc = bc_1 = a, \quad bc = b_1 c = a, \quad bc = bc_1 = b_1 c = b_1 c_1 = a$$

sein muss, oder dass resp.:

$$\{c, c_1\} \preceq a : b, \quad \frac{a}{c} \succeq \{b, b_1\},$$

$$\begin{cases} a : b \succeq \{c, c_1\} \preceq a : b_1 \\ \frac{a}{c} \succeq \{b, b_1\} \preceq \frac{a}{c_1}, \end{cases}$$

woraus sich die Richtigkeit der obigen Behauptung entnehmen lässt. Aus den angeführten Gründen gehe ich nun, vorzüglich im Hinblick auf die Raumersparniss, auf diese beiden Tafeln nicht näher ein,

§ 53. Die Substitution bei Vieldeutigkeit der Ausdrücke; Ueberschiebung, Functionen und Formeln der letzteren.

In § 50. sind allerdings die Modificationen erledigt worden, welche an den (im § 46. recapitulirten) Resultaten des vorigen Abschnittes anzubringen sind, sobald einzelne Operationen vieldeutig werden, jedoch nur insoferne, als — was dort allein in Betracht kam und auch immer das Fundament zu allem übrigen bilden muss — von Hause aus nur eindeutige Zahlzeichen dabei zur Verknüpfung herangezogen werden.

Die weitergehende Frage nach denjenigen Modificationen, welche ferner bei Heranziehung irgendwie vieldeutiger Ausdrücke sich aufdrängen, wurde (in den beiden nächsten Paragraphen) ebenfalls erledigt für eine sehr wichtige Sorte von Aufgaben — in Bezug auf alles nämlich, was mit der Transposition (und mit der Auflösung reiner Gleichungen durch dieselbe) zusammenhängt.

Dagegen ist noch die Frage offen, wie wohl die für eindeutige Zahlzeichen gefundenen Sätze, als z. B. die Fundamentalgesetze (61), (62) und (63) für vieldeutige Ausdrücke sich gestalten werden? Würden wir etwa, wenn $\frac{a}{c}\,c = a$ gilt, dann auch $\frac{A}{C}\,C = A$ schreiben dürfen? u. s. w.

Es ist überhaupt noch zu untersuchen, inwieferne statt eindeutiger auch vieldeutige Zahlzeichen in eine allgemeine Formel eingeführt werden können, mag diese sich nun mit auf inverse oder auch nur auf directe Operationen allein beziehen.

Zur Beantwortung derartiger Fragen muss nun etwas weiter ausgeholt werden. Es muss z. B. der Begriff einer Function auch für ein vieldeutiges Argument erst vollends klar gestellt werden; ferner haben wir zu untersuchen, inwiefern von Ausdrücken, die in einer Beziehung der Werthgemeinschaft zu einander stehen, überhaupt die einen für die andern gesetzt werden dürfen. —

(A). Wenn irgend zwei eine Werthgemeinschaft ausdrückende Propositionen in dem Zusammenhang stehen, dass, wie bei:

$$A\,(=),\ \succeq,\ \preceq,\ = B \text{ und } B\,(=),\ \succeq,\ \preceq,\ = C,$$

auf der einen Seite ihres Beziehungszeichens in allen beiden der nämliche Ausdruck steht, so ist zunächst folgendes die Uebersicht der Conclusionen, die sich bei allen möglichen Zusammenstellungen der gedachten Prämissen ziehen lassen, indem man in der einen von ihnen für den mittleren Ausdruck B den in der andern Prämisse zu ihm in Beziehung gesetzten Ausdruck substituirt.

(124) Aus $A = B$ und $B = C$ folgt wie bekannt: $A = C$.

Ferner folgt resp.

$$(125)\quad A \preccurlyeq C \text{ aus } \left|\begin{array}{l} A = B,\ B \preccurlyeq C \\ A \preccurlyeq B,\ B \preccurlyeq C \\ A \preccurlyeq B,\ B = C \end{array}\right| \text{ und } A \succcurlyeq C \text{ aus } \left|\begin{array}{l} A \succcurlyeq B,\ B = C \\ A \succcurlyeq B,\ B \succcurlyeq C \\ A = B,\ B \succcurlyeq C \end{array}\right|.$$

Endlich folgt:

$$(126)\quad A(=)C \text{ aus } \left|\begin{array}{l} A = B,\ B(=)C \\ A \succcurlyeq B,\ B(=)C \\ A \succcurlyeq B,\ B \preccurlyeq C \\ A(=)B,\ B \preccurlyeq C \\ A(=)B,\ B = C \end{array}\right|, \text{ wogegen aus } \left|\begin{array}{l} A \preccurlyeq B,\ B(=)C \\ A \preccurlyeq B,\ B \succcurlyeq C \\ A(=)B,\ B \succcurlyeq C \\ A(=)B,\ B(=)C \end{array}\right| \textit{ kein } \text{Schluss}$$

in Bezug auf A und C selbst gezogen werden kann.

Die Richtigkeit dieser Behauptungen, deren wichtigste schon in Einleitung Nr. 20. hervorgehoben und seitdem vielfach angewendet wurden, zu beweisen, unterliegt nach den dort gegebenen Erklärungen nicht der geringsten Schwierigkeit. Auch könnte man, um sie dem Gedächtnisse einzuprägen, und namentlich um die beiden Fälle ad (126) stets rasch zu unterscheiden, dieselben leicht in äusserliche Regeln kleiden; bei Anwendung dieser Regeln wäre etwa darauf zu achten, ob von den zwei Beziehungszeichen sich Bögen ihre hohle (concave) Seite zuwenden oder nicht, u. s. w. Es wird jedoch für diese Anwendungen der Hinweis auf (124) bis (126) schon so wie so genügen.

Die vorstehenden Sätze würden sich noch insofern verallgemeinern lassen, als auf einer Seite der einen Proposition, statt des mittleren Ausdrucks B selber, unter Umständen auch eine beliebige Function der letzterenstehen dürfte, genauer: das Ergebniss der (operativen) Verknüpfung von B mit andern eventuell auch noch vieldeutigen Ausdrücken vermittelst irgend welcher ein- oder vieldeutiger Operationen. Ich will mich für den Augenblick zum Behufe der allgemeinen Bezeichnung eines derartigen Ergebnisses auch des Functionszeichens f bedienen, dasselbe also hier mit $f(B)$ bezeichnen und einen *vieldeutigen Functionsausdruck* nennen.

Ueber die einem solchen Ausdruck beizulegende Bedeutung kann nicht der mindeste Zweifel herrschen, wenn derselbe das Argument A nur *ein* mal (als Element oder Operationsglied) enthält — wie dies etwa für $f(A) = A^2$ oder für $f(A) = A + B$ der Fall ist. Im letzteren Falle z. B. wird nämlich für $A = \{a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\}$ sein: $f(A) = \{a + B,\ a_1 + B,\ a_2 + B, \ldots\}$, desgleichen allgemein: $f(A) =$

$$(127)\qquad f(\{a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\}) = \{f(a),\ f(a_1),\ f(a_2),\ \ldots\}.$$

Ich möchte für derartige Functionsausdrücke die Bezeichnung als *einfächerige* gebrauchen, so dass wir den Satz hätten:

(B) *Ein hinsichtlich eines Argumentes einfächeriger Functionsausdruck stellt bei Vieldeutigkeit dieses Argumentes die Gesammtheit der*

Werthe vor, welche sich ergeben, indem man die Specialwerthe des letzteren einzeln in den Functionsausdruck substituirt.

Im Gegensatz dazu will ich unter einem (bezüglich eines Argumentes A) *mehrfächerigen* Functionsausdruck einen solchen verstehen, der wie $A + A$, wie $A \,.\, A$ oder $AB + AC$ dies Argument A mehr als einmal enthält.

Bei diesem Vorschlag ziehe ich in Betracht, dass die Bezeichnungen als „einfache" und „vielfache" Functionen bereits anderweitige Erklärung gefunden haben, dagegen die sonst sehr passenden Benennungen als „einfaltige" und „mehrfaltige" Functionsausdrücke eines fatalen Anklanges wegen bedenklich erscheinen könnten (was allerdings in meinen Augen nicht der Fall ist). Als „nullfaltig" oder *nullfächerig* wäre hinsichtlich eines bestimmten Argumentes ein Functionsausdruck zu bezeichnen, in welchem dieses Argument gar nicht vorkäme, der sich also hinsichtlich desselben wie eine Constante verhielte.

Bei den „mehrfaltigen" Functionsausdrücken könnten nun, ohne vorhergegangene Verständigung über die ihnen beizumessende Bedeutung, verschiedene Auffassungsweisen berechtigt erscheinen, und will ich in diesem Betreff, um nicht abstrus zu erscheinen, mich zunächst an ein Beispiel halten.

Nach der für alle operativen Verknüpfungen vieldeutiger Ausdrücke in § 47. *bereits gegebenen* Erklärung ist unter $A + B$, wenn etwa $A = \{a, a_1, a_2, \ldots\}$, $B = \{b, b_1, b_2, \ldots\}$ bedeutet, zu verstehen die Gesammtheit der Werthe:

$$A + B = \begin{Bmatrix} a + b, & a + b_1, & a + b_2, & \ldots \\ a_1 + b, & a_1 + b_1, & a_1 + b_2, & \ldots \\ a_2 + b, & a_2 + b_1, & a_2 + b_2, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix},$$

und demgemäss steht auch die Bedeutung von $A + A$ bereits fest. Die letztere ergibt sich, wenn man im vorigen Ergebniss $B = A$, z. B. also $b = a$, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2, \ldots$ (unter Voraussetzung der Gleichvieldeutigkeit von B und A) werden lässt. D. h. es ist:

$$A + A = \begin{Bmatrix} a + a, & a + a_1, & a + a_2, & \ldots \\ a_1 + a, & a_1 + a_1, & a_1 + a_2, & \ldots \\ a_2 + a, & a_2 + a_1, & a_2 + a_2, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix}$$

die dem zweifächerigen Functionsausdruck $X + X$ für das Argument $X = A$ beizulegende Bedeutung.

Offenbar ist dies ein Ausdruck, der nicht verwechselt werden darf mit dem weniger umfassenden $\{a + a, a_1 + a_1, a_2 + a_2, \ldots\}$, welcher sich durch Zusammenfassung derjenigen Werthe ergeben würde, die aus $x + x$ hervorgehen, indem man für x die Werthe $a, a_1, a_2, \ldots$ von A einzeln durchgängig einsetzt.

Falls übrigens die Addition — wie gewöhnlich — commutativ ist, so können auch in den für $A + B$ sowie für $A + A$ angegebenen Ausdrücken die Werthe weggelassen werden, welche auf einer Seite, z. B. unterhalb der (von links oben nach rechts unten gehenden) Diagonalreihe stehen, da sie den ihnen (über diese Diagonale) symmetrisch gegenüberstehenden gleich werden; es kann alsdann noch etwas einfacher geschrieben werden:

$$A + A = \begin{Bmatrix} a + a, & a + a_1, & a + a_2, \ldots \\ & a_1 + a_1, & a_1 + a_2, \ldots \\ & & a_2 + a_2, \ldots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2a, & a + a_1, & a + a_2, \ldots \\ & 2a_1, & a_1 + a_2, \ldots \\ & & 2a_2, \quad \ldots \end{Bmatrix}.$$

Vergleicht man aber diese Ausdrücke mit dem laut Definition geltenden Producte:

$$2A = 2\{a, a_1, a_2, \ldots\} = \{2a, 2a_1, 2a_2, \ldots\},$$

so leuchtet ein, dass durchaus nicht etwa: $A + A = 2A$, sondern nur:

$$A + A \mathrel{\not\ni}= 2A$$

gesetzt werden darf.

Aehnlich ist auch nur: $A + A + A \mathrel{\not\ni}= 3A$, u. s. w. und lässt sich sogar leicht beweisen, dass das Stattfinden der Gleichheit zwischen diesen beiderseitigen Ausdrücken nothwendig solche Relationen zwischen den Werthen von A selber nach sich ziehen würde, aus denen sich die Gleichheit dieser Werthe und somit die Eindeutigkeit von A ergäbe.

Mit Rücksicht auf das vorstehende ist klar, dass bei einem hinsichtlich eines Argumentes mehrfächerigen Functionsausdruck, wenn dieses Argument selbst vieldeutig ist, zweierlei wohl zu unterscheiden sein wird. Die Bedeutung des Functionsausdrucks selbst geht aus den in § 47. über die operative Verknüpfung vieldeutiger Ausdrücke überhaupt getroffenen Festsetzungen schon von selbst hervor, und ist derselbe ja nicht zu verwechseln mit der Gesammtheit der einzeln den Specialwerthen seines Argumentes entsprechenden Werthe dieses Ausdruckes. D. h. für $A = \{a, a_1, a_2, \ldots\}$ ist $f(A)$ sehr verschieden von der collectiven Zusammenfassung der Werthe $f(a), f(a_1), f(a_2), \ldots$ Die letztere will ich — aus leicht erhellenden Gründen und so lange nicht ein passenderer Name vorgeschlagen ist — die *Ueberschiebung* des Functionsausdrucks $f(x)$ hinsichtlich des Argumentes x, erstreckt über die Werthe von A, nennen, und zum Unterschied von $f(A)$ selbst etwa mit

(128) $$\{f(a), f(a_1), f(a_2), \ldots\} = \{f(x)_{x = a, a_1, a_2, \ldots}\},$$

oder kürzer, wenngleich etwas weniger genau, mit $\{f(x)_{x=A}\}$ bezeichnen. [Lies: „Ueberschiebung von $f(x)$ nach x über A"].

Es wird alsdann das Theorem (B) sich in kürzester Weise durch die Formel darstellen lassen:

(129) $$f(A) = \{f(x)_{x=A}\}, \text{ wenn } f(x) \text{ einfächerig.}$$

Dagegen tritt für den andern Fall nun der Satz ein:

(C) *Einem hinsichtlich eines Argumentes mehrfächerigen Functionsausdruck ist bei Vieldeutigkeit dieses Argumentes stets die über die Werthe des letzteren erstreckte Ueberschiebung desselben untergeordnet.* Der erstere umfasst die letztere wie ein Rechteck seine Diagonale. D. h. es ist:

(130) $$f(\{a, a_1, a_2, \ldots\}) \mathrel{\ni\!\!=} \{f(a), f(a_1), f(a_2), \ldots\},$$

oder in noch conciserer Schreibweise:

$$f(A) \mathrel{\ni\!\!=} \{f(x)_{x=A}\} \text{ falls } f(x) \text{ mehrfächerig.}$$

Die Verschiedenheit dieser Ausdrücke entspringt daraus, dass beiderseits zwar die nämlichen beiden Geistesprocesse successive, jedoch in der entgegengesetzten Ordnung, vorgeschrieben sind:

links erst die collective Zusammenfassung von Argumentwerthen $a, a_1, a_2, \ldots$ und hierauf die Einsetzung (sozusagen Functionalisirung) des Ergebnisses A jener Zusammenfassung.

rechts erst die Einsetzung (Functionalisirung) der Argumentwerthe und dann die Zusammenfassung der als Substitutionsergebniss auftretenden Functionswerthe.

Um obigen Satz allgemein zu beweisen, muss man für den Augenblick auch in dem symbolischen Ausdruck der zu betrachtenden Function $f(x)$ das Argument x ebensooft sichtbar anschreiben, als wie oft es in deren Ausdrucke als Operationsglied vorkommt. Man könnte sich zu dem Ende etwa einer eckigen Klammer bedienen, mithin $f(x) = [x, x, \ldots]$ setzen. Am besten aber wird man die Operationsglieder x, welche in dem Ausdruck von $f(x)$ vorkommen, sich sämmtlich der Reihe nach numerirt denken. Hängt man die gedachten Nummern dann in Gestalt von Indices $1, 2, \ldots n$ an jene x an, so dass also an jeder Stelle, wo x als Operationsglied vorkam, dasselbe nun einen andern Index besitzt, so wird dadurch zwischen den ursprünglich gleichen Operationsgliedern eine Verschiedenheit hergestellt sein, zufolge welcher der bezüglich x mehrfächerige Functionsausdruck $f(x)$ nun als eine Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ von $x_1, x_2, \ldots x_n$ erscheint, deren Ausdruck einfächerig ist hinsichtlich eines jeden dieser Argumente. Alsdann ist in der That:

$$\{f(x)_{x=A}\} = \{\varphi(a, a, \ldots), \ \varphi(a_1, a_1, \ldots), \ \varphi(a_2, a_2, \ldots), \ \ldots\},$$

wogegen:

$$f(A) = \left\{\begin{array}{llll} \varphi(a, a, \ldots), & \varphi(a, a_1, \ldots), & \varphi(a, a_2, \ldots), & \ldots \\ \varphi(a_1, a, \ldots), & \varphi(a_1, a_1, \ldots), & \varphi(a_1, a_2, \ldots), & \ldots \\ \varphi(a_2, a, \ldots), & \varphi(a_2, a_1, \ldots), & \varphi(a_2, a_2, \ldots), & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\}$$

bedeutet, und sieht man, dass unter den letzteren Werthen $\varphi(\ldots)$ die ersteren sämmtlich vorkommen, und zwar hier bei systematischer Schreibweise die Diagonalreihe einnehmen (so wenigstens bei zweifächerigen Functionen). Durch Schluss von einem n-fächerigen auf einen $(n+1)$-fächerigen Functionsausdruck, sowie von einem m-werthigen Argumentausdruck A auf einen $(m+1)$-werthigen könnte dieser Beweis noch vollkommen strenge gemacht werden.

Um noch ein Beispiel anzuführen, so wird für $f(x) = xb + xc$ der Functionsausdruck:

$$Ab + Ac = \{a, a_1, a_2, \ldots\} b + \{a, a_1, a_2, \ldots\} c =$$
$$= \{ab, a_1b, a_2b, \ldots\} + \{ac, a_1c, a_2c, \ldots\} =$$
$$= \left\{\begin{matrix} ab+ac, & ab+a_1c, & ab+a_2c, & \ldots \\ a_1b+ac, & a_1b+a_1c, & a_1b+a_2c, & \ldots \\ a_2b+ac, & a_2b+a_1c, & a_2b+a_2c, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right\}$$

ein, dagegen die Ueberschiebung nur:

$$\{(xb + xc)_{x=A}\} = \{ab + ac,\ a_1b + a_1c,\ a_2b + a_2c,\ \ldots\},$$

mithin $\{(xb + xc)_{x=A}\} \in Ab + Ac$.

Alles dies vorausgesetzt gilt nun weiter der (nahezu selbstverständliche) Satz:

(D) *Besteht zwischen* („mehrfächerigen"), *Functionsausdrücken die eine allgemeine Zahl x beliebig oft als Argument enthalten, irgend eine, eine Werthgemeinschaft ausdrückende Formel, so muss auch zwischen den nach x über eine beliebige Werthenmenge A ausgedehnten Ueberschiebungen dieser Functionsausdrücke die nämliche Art von Werthgemeinschaft bestehen.*

In der That wird aus $f(x)\,(=)\,\varphi(x)$, wenn x eine allgemeine Zahl vorstellt, folgen, dass auch $f(a)\,(=)\,\varphi(a)$, $f(a_1)\,(=)\,\varphi(a_1)$, $f(a_2)\,(=)\,\varphi(a_2)$, ..., und hieraus durch collective Zusammenfassung (nach § 49., III., Anmerkung):

$$\{f(a),\ f(a_1),\ f(a_2),\ \ldots\}\ (=)\ \{\varphi(a),\ \varphi(a_1),\ \varphi(a_2),\ \ldots\},$$

das heisst:

$$\{f(x)_{x=A}\}\ (=)\ \{\varphi(x)_{x=A}\},$$

wie zu zeigen war. Und auch für jedes andere Beziehungszeichen, welches statt $(=)$ angenommen werden mag, ist der Beweis ganz ebenso zu führen.

Nach den Theoremen (A) bis (D) lassen nun alle eingangs aufgeworfenen Fragen sich bequem erledigen.

Zunächst folgt aus (B) und (D) unmittelbar das Theorem:

(E) *In jeder eine Werthgemeinschaft ausdrückenden Formel ist es gestattet, ein allgemeines Zahlzeichen, das eine eindeutig aufzufassende Zahl vorstellt, zu ersetzen durch irgend einen (innerhalb des Gültigkeitsbereiches) vieldeutigen Ausdruck, woferne nur jenes Zahlzeichen beiderseits nicht mehr als ein mal in der Formel vorkommt,* d. h. also, wofern jede Seite der Formel entweder einfächerig oder nullfächerig in Bezug auf das genannte Argument ist.

Wenn sich z. B. für eindeutig bestimmte Zahlen a, b, ... herausgestellt hat, dass allgemein $\frac{a}{b}b = a$ ist, so muss noch allgemeiner auch $\frac{A}{b}b = A$ sein, und es kann ein derartiger Schluss auch auf mehrere Argumente, wenn solche vorhanden, [successive, und somit, da dies auf dasselbe hinausläuft, auch gleichzeitig] angewendet werden. Wenn z. B. für eindeutige Zahlen die Formel gefunden wäre: $a\frac{b}{c} \in \frac{ab}{c}$, so müsste auch für vieldeutige Ausdrücke A, B, C der Satz gelten: $A\frac{B}{C} \in \frac{AB}{C}$, und dergleichen mehr.

Seiner Wichtigkeit halber will ich dieses Theorem auch unabhängig von den gebrauchten Kunstausdrücken und Hülfsbetrachtungen für ein Exempel direct beweisen, und wähle dazu das Associationsgesetz. Es wird alsdann zu zeigen sein, dass wenn die Formel $a(bc) = (ab)c$ als erwiesen gilt, man berechtigt ist, dieselbe unbedenklich auch auf vieldeutige Ausdrücke: $A = \{a, a_1, a_2, \ldots\}$, $B = \{b, b_1, b_2, \ldots\}$, $C = \{c, c_1, c_2, \ldots\}$ anzuwenden, und zu schreiben: $A(BC) = (AB)C$.

In der That wird nach dem zur Voraussetzung dienenden Schema: $a(bc) = = (ab)c$ auch für eine bestimmte Zahl a sein, und weiter folgt aus demselben: $a_1(bc) = (a_1 b)c$, $a_2(bc) = (a_2 b)c, \ldots$ Hieraus aber folgt allgemein:

$$A(bc) = (Ab)c,$$

da die linke Seite dieser Gleichung gerade die linkseitigen Ausdrücke in den vorangegangenen Gleichungen umfasst und ebenso die rechte Seite derselben den Inbegriff ihrer rechtseitigen Ausdrücke vorstellt.

In derselben Weise aber kann man von da weiter schliessen: $A(b_1 c) = = (Ab_1)c$, $A(b_2 c) = (Ab_2)c, \ldots$, und somit:

$$A(Bc) = (AB)c,$$

sodann endlich auch: $A(Bc_1) = (AB)c_1$, $A(Bc_2) = (AB)c_2, \ldots$, und hieraus:

$$A(BC) = (AB)C,$$

wie zu zeigen war.

Ebenso würde — um auch ein Exempel mit nullfaltigem Ausdruck (auf einer Seite der Formel) anzuführen — aus $a^0 = 1$ nothwendig auch $A^0 = = \{a^0, a_1^0, a_2^0, \ldots\} = \{1, 1, 1, \ldots\} = 1$ folgen, und liesse überhaupt durch die an den vorstehenden Beispielen auseinandergesetzte Methode sich auch leicht die allgemeine Gültigkeit des Satzes (E) direct nachweisen. —

Wenn dagegen auf der einen oder auf beiden Seiten einer die allgemeine Zahl x enthaltenden Formel mehrfächerige Functionsausdrücke in Hinsicht dieser Zahl stehen, so haben an Stelle von (E) andere Theoreme einzutreten, deren Aufstellung ich um die gegenwärtigen Untersuchungen nicht allzuweit auszudehnen zu einem Theile dem Leser überlassen will. Mir genügt hier schon die Angabe und der Beweis des Satzes:

(F) *Wenn eine Proposition, die den Charakter einer allgemeinen Formel trägt, links einen mehrfächerigen, rechts einen höchstens einfächerigen Functionsausdruck in Hinsicht von a enthält, so ist es gestattet, dies Argument a durch einen beliebig vieldeutigen Ausdruck A in der Formel zu ersetzen, woferne nur das Beziehungszeichen der letzteren eventuell nach folgender Vorschrift abgeändert wird:*

Die resultirende Formel hat das Zeichen $\mathrel{\ni\!\!=}$ zu erhalten, wenn das Beziehungszeichen der ursprünglichen selbst $\mathrel{\ni\!\!=}$ oder $=$ war, dagegen gebührt ihr das Zeichen $(=)$, wenn jenes selbst $(=)$ oder $\mathrel{=\!\!\in}$ war.

Ist also $f(a)$ mehr- und $\varphi(a)$ höchstens einfächerig, und gilt entweder $f(a) = \varphi(a)$ oder $f(a) \mathrel{\ni\!\!=} \varphi(a)$, so folgt: $f(A) \mathrel{\ni\!\!=} \varphi(A)$. Gilt dagegen $f(a) \mathrel{=\!\!\in} \varphi(a)$ oder aber $f(a) (=) \varphi(a)$, so folgt nur: $f(A) (=) \varphi(A)$.

Beweis. Es ist jedenfalls, wenn:

(131) $f(a) =, \succcurlyeq \varphi(a)$, auch resp. $\left\{f(x)_{x=A}\right\} =, \succcurlyeq \left\{\varphi(x)_{x=A}\right\}$,

und ebenso, wenn:

(132) $f(a) \preccurlyeq, (=) \varphi(a)$, auch resp. $\left\{f(x)_{x=A}\right\} \preccurlyeq, (=) \left\{\varphi(x)_{x=A}\right\}$,

da beim Schlusse von Functionen eindeutiger Argumente auf deren Ueberschiebungen über ein vieldeutiges Argument die Beziehungszeichen aller Formeln sich nach (D) stets unverändert erhalten. Ferner ist nach (C) und nach (B):

(133) $\left\{f(x)_{x=A}\right\} \preccurlyeq f(A)$, sowie $\left\{\varphi(x)_{x=A}\right\} = \varphi(A)$

und hieraus lässt sich nach den Theoremen (A) in Verbindung mit (131) in der That $f(A) \succcurlyeq \varphi(A)$, in Verbindung mit (132) offenbar nur $f(A)\ (=)\ \varphi(A)$ schliessen, q. e. d.

Um dieses noch direct durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, so sei etwa die Formel bekannt: $\frac{a}{n}(nb) = ab$. Alsdann würde der Satz $\frac{a}{N}(Nb) = ab$ im allgemeinen falsch sein. Denn schon, wenn N auch nur die beiden Werthe n, n_1 besitzt, so haben wir:

$$\frac{a}{N}(Nb) = \left\{\frac{a}{n}, \frac{a}{n_1}\right\} \cdot \left\{nb, n_1 b\right\} = \left\{\frac{a}{n}(nb), \frac{a}{n}(n_1 b), \frac{a}{n_1}(nb), \frac{a}{n_1}(n_1 b)\right\},$$

worin nun blos der erste und der letzte Ausdruck sich nothwendig zu ab reduciren muss; wir erhalten demnach:

$$\frac{a}{N}(Nb) = \left\{ab, \frac{a}{n}(n_1 b), \frac{a}{n_1}(nb)\right\}, \text{ oder } \frac{a}{N}(Nb) \succcurlyeq ab,$$

in Uebereinstimmung mit obigem Theoreme.

Durch Anwendung der vorstehenden Grundsätze, namentlich von (E) und (F) ergibt sich nun, dass sowohl im „ersten“ als auch im „zweiten“ und im „dritten“ Falle des § 50. die Theoreme bestehen:

(134) $B(A:B) \succcurlyeq A$, $\frac{A}{A:B} \succcurlyeq B$, $A:\frac{A}{C} \succcurlyeq C$, $\frac{A}{C}C \succcurlyeq A$.

Da mithin diese Gesetze für alle drei Fälle identisch sind, so erscheint es — im Hinblick auf den verschiedenartigen Charakter der Beziehungszeichen, welche sich für ebendiese Fälle bei den Transpositionsregeln ergeben — wahrscheinlich, dass es hier nicht möglich sein dürfte, ein dem § 43. des vorigen Abschnittes entsprechendes Verfahren durchzuführen, nämlich die Herleitung der allgemeinen Transpositionsregeln auf die Theoreme (134) zu gründen. —

Viertes Kapitel.

Gesetze der Verbindung sämmtlicher Operationen miteinander.

§ 54. Orientirung.

Nachdem wir in den beiden vorigen Kapiteln nach ihrem Begriffe sowohl als nach ihren Grundeigenschaften diejenigen Operationen kennen gelernt haben, zu welchen man, von der Addition ausgehend,

durch fortgesetzte Iteration (Wiederholung) und Inversion (Umkehrung) gelangt, bleibt uns nunmehr noch der Gesichtspunkt der *Combination* (Verknüpfung) zu erschöpfen, d. h. wir haben die *Gesetze der algebraischen Operationen in ihrer gegenseitigen Verbindung* aufzusuchen.

Es sind diese Gesetze die logischen Consequenzen der erwähnten in jenen beiden Kapiteln gegebenen Begriffsbestimmungen; denselben werden diese Begriffsbestimmungen nebst den bereits daraus abgeleiteten Grundeigenschaften zur *Voraussetzung*, zu Prämissen, dienen. Die gedachten Prämissen sind aber ein Mannigfaltiges; man kann sie, wie es in der That im übernächsten Abschnitt geschehen wird, aufzählen, und im Hinblick darauf werden sich nun *zwei* Wege zur Behandlung der in Rede stehenden Gesetze darbieten — Wege, die hier in der That nacheinander eingeschlagen werden sollen.

Bei der ersten Behandlungsweise wird es uns nur darum zu thun sein, die gedachten Gesetze so, wie sie sich in Wirklichkeit für die gemeinen Zahlen gestalten, kennen zu lernen, und werden wir zu dem Ende alles frühere ohne Unterschied benutzen, wir werden die bis jetzt gewonnenen Prämissen *vereint* — in ihrem gegenseitigen Zusammenhange genommen — als Grundlage für die weiteren Schlussfolgerungen annehmen. Die Resultate, zu welchen man auf diese Weise gelangt, bilden zwar für das weitere Eindringen in das Gebiet der gemeinen Algebra eine hinlänglich genügende Vorschule; doch zeigt in dem Ueberblick dieser Resultate sich vielfältig ein Mangel an Symmetrie, eine Unebenmässigkeit, welche den genauer zusehenden unbefriedigt lässt und auffordert, sich Rechenschaft von derselben zu geben. Die Aufschlüsse aber, welche in dieser letzteren sowie noch in mancher andern Hinsicht zu wünschen sind, ergeben sich nun durch die Betretung des zweiten Weges.

Bei dieser andern Behandlungsweise kommt es uns darauf an, die Art zu erkennen, wie sich die Resultate nach den Voraussetzungen gruppiren, aus denen sie als Consequenzen hervorgegangen sind; wir werden hier die Voraussetzungen *separiren*, um ihre Consequenzen gesondert zur Anschauung zu bringen. Nicht nur lässt auf diese Weise die vorhin erwähnte Unsymmetrie sich auflösen, nicht nur treten so die wahren Analogieen zwischen den verschiedenen Operationsstufen vollkommen deutlich zu Tage, und wird gewissermassen die innere Einheit dieser Operationsstufen erkennbar, sondern es wird zugleich damit auch denjenigen Untersuchungen vorgebaut, die sich auf noch andere mögliche Zahlengebiete (ausser dem der gemeinen complexen Zahlen) beziehen und wird überhaupt der Grund zur eigentlichen „formalen“ oder *absoluten* Algebra gelegt.

Im Gegensatz zu dieser zweiten zunächst *formalen* Behandlungsweise will ich nun die erstere als die *reale* oder materiale bezeichnen.

I. Die Operationenverknüpfung in realer Hinsicht behandelt.

Kommen überhaupt mehrere Operationen miteinander verbunden vor, so werden dieselben theils nebeneinander, theils hintereinander auszuführen sein; aber man erkennt leicht, dass der einfachste Fall und zugleich das Element der ganzen allgemeineren Untersuchung in der Aufgabe besteht, die Verknüpfung von *drei* Zahlen durch *zwei* (successive) Operationen zu bewerkstelligen. Wir haben also zunächst durch eine (erste) Operation zwei beliebige Zahlen a und b miteinander und dieses Ergebniss durch eine zweite Operation mit einer dritten Zahl c verknüpft zu denken, wobei die letztere c entweder schlechthin gegeben oder ebenfalls als ein Operationsergebniss bestimmt sein kann. Es werden sodann die Fälle aufzustellen sein, in welchen anstatt dieser Operationsverbindung auch andere einfache Operationenfolgen ausgeführt werden könnten, welche der vorigen äquivalent sind, d. h. zum nämlichen Resultate führen.

Die Relationen, welche etwa für die Verknüpfung von nur *zwei* Zahlen mittelst einer oder zweier Operationen verlangt werden könnten, sind in Gestalt der beiden Commutationsgesetze (1) und (14), sowie der Formeln (54), (56) und (59) des vorigen Kapitels bereits vollständig erledigt.

Wir schreiten daher sofort zu der

Verbindung von drei Zahlen durch zwei Operationen.

Den Uebergang bilden diejenigen Formeln, bei welchen auf der einen Seite des Gleichheitszeichens drei, auf der andern nur zwei Zahlen vorkommen, indem die dritte Zahl sich heraushebt. Diese werden wir deshalb in dem nächsten Paragraphen voranstellen.

§ 55. Die Umformungsregeln für algebraische Ausdrücke. Resolviren und Reduciren.

Die algebraischen Ausdrücke: *Differenz*, *Quotient*, *Wurzel* und *Logarithmus*, welche die Ergebnisse der vier inversen Operationen vorstellen, lassen sich mit Hülfe einer beliebigen Zahl so *umformen*, dass sie dabei ihren Charakter und ihren Werth unverändert beibehalten.

Die Regeln, nach welchen dies geschehen kann, werden durch die Formeln ausgedrückt:

$$(135)\quad\begin{cases} a - b = (a + n) - (b + n), \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot n}{b \cdot n}, \\ \sqrt[b]{a} = \sqrt[b \cdot n]{a^n}, \\ \overset{b}{\log} a = \overset{b^n}{\log} (a^n), \end{cases}$$

und mögen etwa wie folgt in Worte gefasst werden:

Der Werth einer Differenz bleibt ungeändert, wenn man Minuend und Subtrahend derselben um eine beliebige aber die gleiche Zahl vermehrt (oder vermindert).

Der Werth eines Bruches bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner desselben mit einer beliebigen aber der gleichen Zahl multiplicirt (oder dividirt).

Der Werth einer Wurzel ändert sich nicht, wenn man den Wurzelexponenten mit einer beliebigen Zahl multiplicirt und zugleich den Radicanden auf die Potenz dieser nämlichen Zahl erhebt (desgleichen auch, wenn man die entgegengesetzten Operationen ausführt, nämlich den Wurzelexponenten durch eine Zahl theilt und mit derselben Zahl die Wurzelgrösse radicirt).

Der Werth eines Logarithmus ändert sich nicht, wenn man dessen Basis und Numerus mit irgend einer Zahl potenzirt (oder auch radicirt).

Im Gegensatz zum *Werthe* aber ändert sich die *Form* der genannten Ausdrücke bei Anwendung der obigen Sätze.

Findet diese Anwendung im Sinne von *vorwärts* statt, geht man also von der linken Seite der Gleichungen (135) zur rechten über, so sagt man, der ursprüngliche (links stehende) Ausdruck werde *erweitert* oder *resolvirt.* Hingegen wenn man diese Sätze *rückwärts* anwendet (wie es die in Parenthese beigefügten Regeln besagen), wenn also ein gegebener Ausdruck, welcher einem der in (135) rechterhand stehenden nachgebildet erscheint, auf die Form des linkerhand stehenden gebracht und so in einen einfacheren verwandelt wird, so heisst diese Operation das *Kürzen* oder *Reduciren* des gegebenen (rechts dargestellten) Ausdruckes.

Ueber die Verwandtschaft des Sinnes, in welchem sonach diese Benennungen bei den Ausdrücken und bei den Gleichungen angewendet werden, vergl. § 45.

So ist beispielsweise die Differenz $12 - 7$ *mit* 3 erweitert $= (12 + 3) - (7 + 3) = 15 - 10$, und mit 3 gekürzt $= (9 + 3) - (4 + 3) = 9 - 4$. Desgleichen kann der Quotient $56 : 14$ mit 2 resolvirt werden zu $(2 \cdot 56) : (2 \cdot 14) = 112 : 28$ und mit 7 reducirt zu $(7 \cdot 8) : (7 \cdot 2) = 8 : 2$. Das Erweitern kann, wie man sieht, auf unzählig viele Arten geschehen, hingegen ist das Kürzen überhaupt nicht

immer möglich, weil dabei inverse Operationen gefordert werden, und die Anzahl der Arten, auf welche es geschehen kann, ist in jedem Falle eine begrenzte. In der That kann man ohne Ende fort erweitern:

$$5-3=6-4=7-5=8-6=9-7=10-8=\cdots,$$

$$12:6=24:12=36:18=48:24=96:48=\cdots,$$

dagegen nur wie folgt kürzen:

$$5-3=4-2=3-1,$$

$$\frac{12}{6}=\frac{6}{3}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}.$$

Ein mehreres hierüber ist in der Lehre von den Brüchen im dritten Bande nachzusehen.

Wir schreiten nun zu dem *Beweis* der Formeln (135).

Der Beweis einer Formel, in welcher inverse Operationen vorkommen, wird am einfachsten geführt, indem man die sogenannte *Probe* macht, d. h. nachweist, dass auf der einen Seite der Gleichung eben diejenige Zahl steht, welche durch den Ausdruck auf der andern Seite der Gleichung vorgestellt wird.

Um z. B. die erste Formel (135) zu beweisen, bedenke man, dass die rechte Seite der Gleichung diejenige Zahl vorstellt, welche zu $b+n$ addirt $a+n$ liefert; man braucht also, da es nach § 40. nur *eine* solche Zahl geben kann, blos zu zeigen, dass auch die linke Seite der Gleichung eine solche Zahl ist, welche zu $b+n$ addirt, $a+n$ gibt. Zu diesem Zwecke nehme man die linke Seite der Gleichung, addire sie zu $b+n$, oder was dasselbe ist, addire $b+n$ zu derselben, und suche durch Anwendung schon bekannter Sätze darzuthun, dass $a+n$ herauskommt.

In der That ist nun: $(a-b)+(b+n)=\{(a-b)+b\}+n$, da nach dem Associationsgesetze eine Summe auch addirt werden kann, indem man ihre Glieder nacheinander addirt, und dieses ist $=a+n$, weil entgegengesetzte Operationen nach § 42. sich zerstören.

Der ganze Beweis der ersten Formel (135) kann also durch die eine Zeile ausgedrückt werden:

$$(a-b)+(b+n)=\{(a-b)+b\}+n=a+n.$$

Ganz ebenso ist der Beweis der zweiten und der folgenden Formeln (135) in nachstehenden Zeilen geleistet:

$$\frac{a}{b}\cdot(b\cdot n)=\left(\frac{a}{b}\cdot b\right)\cdot n=a\cdot n,$$

$$\left(\sqrt[b]{a}\right)^{b\cdot n}=\left\{\left(\sqrt[b]{a}\right)^{b}\right\}^{n}=a^{n},$$

$$(b^{n})^{\overset{b}{\log} a}=\left(b^{\overset{b}{\log} a}\right)^{n}=a^{n},$$

und man sieht leicht, welche Sätze beim Uebergang über ein jedes Gleichheitszeichen zur Anwendung kommen.

Es mag beiläufig auf den eigenthümlichen Umstand aufmerksam gemacht werden, dass die dritte der obigen Formeln (135) mit den drei andern nicht zu harmoniren scheint. Denn während bei der Umformung die Operationsglieder der drei andern Ausdrücke: $a - b$, $\frac{a}{b}$ und $\overset{b}{\log}\, a$ durch die *nämliche* Rechnungsart mit der willkürlichen Zahl n verknüpft werden, geschieht das bei den Operationsgliedern des Ausdruckes $\sqrt[b]{a}$ durch verschiedene Rechenoperationen. An Stelle des dritten Satzes möchte man — nach der Analogie mit den übrigen zu schliessen — vielmehr den Satz erwarten:

Eine Wurzel bleibt ihrem Werthe nach ungeändert, wenn man Radicand und Wurzelexponent mit irgend einer Zahl exponenzirt (oder logarithmirt), wie es etwa die Formel aussprechen würde:

$$\sqrt[b]{a} = \sqrt[n^b]{n^a}\,.$$

Diese Vermuthung erweist sich jedoch als eine *unrichtige*, und der Grund dieser auffallenden Abweichung tritt klar hervor, sobald man sich von den Sätzen Rechenschaft gibt, auf welchen der Beweis der sämmtlichen Formeln beruht.

Der Beweis der beiden ersten Formeln erscheint ganz nach Belieben entweder auf das Associations- oder auf das Commutationsgesetz gestützt, soferne dasselbe sich auf die Addition resp. Multiplication von drei Operationsgliedern bezieht [cf. (3) und (4), sowie (15) und (16)]. Welches von beiden Gesetzen angezogen wird, hängt lediglich davon ab, welches der beiden commutativen Operationsglieder man als das erste zu schreiben beliebt. So z. B. könnte man für die zweite Formel (135) den Beweis auch statt der obigen durch die folgende Zeile leisten:

$$(b \cdot n) \cdot \frac{a}{b} = \left(b \cdot \frac{a}{b}\right) \cdot n = a \cdot n\,,$$

in welcher statt der associativen Eigenschaft der Multiplication: $a(bc) = (ab)c$ die erwähnte commutative $(ab)c = (ac)b$ zur Anwendung kommt.

Der Beweis der vierten Formel I beruht ähnlich — indessen ausschliesslich — auf der commutativen Eigenschaft der Potenzirung: $\left(a^b\right)^c = \left(a^c\right)^b$, und dass für die Wurzelausziehung die oben vermuthete Formel nicht gilt, liegt — wie leicht zu sehen — einfach daran, dass der Potenzirung die analoge associative Eigenschaft: $\left(a^b\right)^c = a^{\left(b^c\right)}$ mangelt. Der Beweis der dritten Formel (135) musste deshalb auch auf einem Satze von ganz andrer Natur beruhen. —

§ 56. Fortsetzung. Transformation von Logarithmen in verschiedenen Systemen.

Zur Uebung kann man auch noch folgende Formeln, unter welchen ich die Formeln (135) der Uebersicht halber noch einmal mit angeführt habe, als Sätze aussprechen und beweisen:

$$\left\{\begin{array}{l}
a-b=(a+n)-(b+n)=(a-n)-(b-n)=(n-b)-(n-a)=(a-n)+(n-b),\\
a+b=(a+n)+(b-n)=(a-n)+(b+n)=(a+n)-(n-b)=(b+n)-(n-a),\\
\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}=\frac{a}{n}:\frac{b}{n}=\frac{n}{b}:\frac{n}{a}=\frac{a}{n}\cdot\frac{n}{b}=\overset{n^b}{\log}(n^a)=\overset{\sqrt[a]{n}}{\log}\sqrt[b]{n},\\
a\cdot b=(an)\cdot\frac{b}{n}=\frac{a}{n}\cdot(bn)=(an):\frac{n}{b}=(bn):\frac{n}{a}=\overset{\sqrt[b]{n}}{\log}(n^a)=\overset{\sqrt[a]{n}}{\log}(n^b),\\
\sqrt[b]{a}=\sqrt[bn]{a^n}=\sqrt[\frac{b}{n}]{\sqrt[n]{a}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{\frac{n}{b}}=\sqrt[\log n]{\sqrt[b]{n}}=\left(\sqrt[b]{n}\right)^{\overset{n}{\log} a},\\
\overset{b}{\log} a=\overset{b^n}{\log}(a^n)=\overset{\sqrt[n]{b}}{\log}\sqrt[n]{a}=\left(\overset{b}{\log} n\right)\cdot\overset{n}{\log} a=\frac{\overset{n}{\log} a}{\overset{n}{\log} b}=\frac{\overset{b}{\log} n}{\overset{a}{\log} n},\\
a^b=(a^n)^{\frac{b}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{bn}=\sqrt[\frac{n}{b}]{a^n}=(n^b)^{\overset{n}{\log} a}=\sqrt[\overset{a}{\log} n]{n^b}.
\end{array}\right.$$

Alle 35 die willkürliche Zahl n enthaltenden Ausdrücke sind hier einzeln, dem linkerhand stehenden von n befreiten Ausdruck gleichgesetzt zu denken; unter sich dagegen können die ersteren Ausdrücke nicht immer verglichen werden, weil sie nicht immer gleichzeitig einen Sinn besitzen, sondern manchmal die Bedingungen, unter welchen die im einen und die im andern Ausdruck angedeuteten inversen Operationen ausführbar sind, einander gegenseitig ausschliessen. So dürfen beispielsweise die beiden Ausdrücke $(a - n) - (b - n)$ und $(n - b) - (n - a)$ deshalb nicht einander gleichgesetzt werden, weil die Subtractionen $n - b$ und $n - a$ immer dann unmöglich sind, wenn die $a - n$ und $b - n$ sich ausführen lassen, und vice versa.

Die obigen (in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Bd. 2, pag. 410) zuerst vollständig von mir zusammengestellten Formeln (136) zeigen nicht nur in analoger Weise zu (135), wie auch die Resultate der drei directen Operationen: *Summe*, *Product* und *Potenz* als solche umgeformt werden können. Sie lehren überhaupt erschöpfend, auf welcherlei Arten es möglich ist, die Operationsglieder eines der 7 algebraischen Elementarausdrücke mit einundderselben beliebigen Zahl n je durch eine der 7 Elementaroperationen so zu verknüpfen, dass ein gewisser aus diesen beiden Ergebnissen zusammengesetzter Elementarausdruck den nämlichen Werth erhält, wie der ursprüngliche von n unabhängige Elementarausdruck.

Diese Formeln, m. a. W., geben die Beantwortung der Frage, auf welche Weise zwei beliebige Zahlen a, b mit einer dritten n, und die beiden Ergebnisse miteinander, so durch Elementaroperationen sich

verknüpfen lassen, dass die willkürliche Zahl n sich weghebt und ein davon unabhängiger Elementarausdruck herauskommt.

Hervorzuheben sind unter jenen Formeln (136) namentlich folgende:

$$\overset{b}{\log}\, a = \left(\overset{b}{\log}\, n\right) \cdot \overset{n}{\log}\, a = \frac{\overset{n}{\log}\, a}{\overset{n}{\log}\, b} = \frac{\overset{b}{\log}\, n}{\overset{a}{\log}\, n}, \tag{137}$$

weil sie lehren, irgend einen Logarithmus auszudrücken durch lauter Logarithmen von beliebig gegebener Basis, oder aber durch solche von einem gegebenem Numerus. Das erstere Geschäft wird auch der *Uebergang aus einem Logarithmensystem in ein anderes* genannt, indem alle Logarithmen von übereinstimmender Basis zu einem *Logarithmensystem* gerechnet werden, und die ebendies leistende Gleichung: $\overset{b}{\log}\, a = \frac{\overset{n}{\log}\, a}{\overset{n}{\log}\, b}$ kann als Satz in folgender Fassung auswendig gelernt werden:

Der Logarithmus einer Zahl in einem bestimmten Systeme ist gleich dem Logarithmus seines Numerus getheilt durch den Logarithmus seiner Basis in irgend einem andern Systeme.

Man kann jedoch die sämmtlichen Formeln (137) auch leicht dadurch mnemonisch machen, dass man die Analogie derselben mit den unter (136) mit enthaltenen:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{n} \cdot \frac{n}{b} = \frac{a}{n} : \frac{b}{n} = \frac{n}{b} : \frac{n}{a} \tag{138}$$

bemerkt. Diese gehen nämlich aus jenen dadurch hervor, dass man den Numerus durchweg als Zähler und die Basis des Logarithmus als Nenner eines Bruches schreibt (oder auch umgekehrt). Darnach können denn auch — rückwärts schliessend — aus den Identitäten (138), welche aus der Lehre von den Brüchen jedermann geläufig sind, leicht die für die Logarithmenrechnung wichtigen Formeln (137) abgeleitet werden, *indem man den Zähler jedes Bruches durchweg als Numerus, den Nenner als Basis eines Logarithmus schreibt* (oder umgekehrt), und das mittlere Multiplications- oder Divisionszeichen unverändert stehen lässt.

Die gedachte Analogie der Logarithmen mit den Brüchen erklärt sich leicht daraus, dass nach anderen von den Formeln (136) jeder Bruch direct in Form eines Logarithmus, und umgekehrt geschrieben werden kann.

Der Beweis der Formeln (137) soll — ihrer späteren Wichtigkeit halber — noch beispielsweise angeführt werden: Erinnert man sich an die Bedeutung der linken Seite, so ergibt sich für die erste Gleichung (137) der Beweis:

$$b^{(\overset{b}{\log} n) \cdot \overset{n}{\log} a} = \left(b^{\overset{b}{\log} n}\right)^{\overset{n}{\log} a} = n^{\overset{n}{\log} a} = a,$$

bei welchem nur von dem dritten Gesetze der Potenzirung (§ 26.) und von der Definition (54) des Logarithmus Gebrauch gemacht ist.

Aus der ersten Gleichung aber folgt die zweite und dritte, indem man entweder b mit n, oder a mit n vertauscht, und den einen Factor von der rechten auf die linke Seite bringt.

§ 57. Gesetze für die Verbindung der Operationen erster Stufe unter sich. Ueberblick derselben.

Sollen drei Zahlen durch zwei Operationen erster Stufe fortschreitend verbunden werden, so müssen diese Operationen entweder beide Additionen sein, oder sie müssen in einer Verknüpfung einer Addition mit einer Subtraction in irgend einer Folge bestehen, oder endlich in einer Verknüpfung zweier Subtractionen miteinander.

Wenn man nun auf diese drei genannten Arten alle möglichen Verbindungen der drei Zahlen a, b, c wirklich herstellt, und zusieht, welche von den resultirenden Ausdrücken sich allgemein — so oft sie nur einen Sinn besitzen und die vorkommenden inversen Operationen ausführbar sind — einander gleich herausstellen, so erhält man die nachstehenden drei Gruppen von bezüglich 12, 8 und 4 unter dem angegebenen Vorbehalt einander äquivalenten Ausdrücken:

$$(139)\quad \begin{cases} a + (b + c) = b + (c + a) = c + (a + b) = \\ = a + (c + b) = b + (a + c) = c + (b + a) = \\ = (c + b) + a = (a + c) + b = (b + a) + c = \\ = (b + c) + a = (c + a) + b = (a + b) + c. \end{cases}$$

$$(140)\begin{cases} (a+b)-c = a+(b-c) = (a-c)+b = a-(c-b) = b-(c-a) = \\ = (b+a)-c = (b-c)+a = b+(a-c). \end{cases}$$

$$(141)\quad \begin{cases} a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b = \\ = a - (c + b). \end{cases}$$

Eigentlich wären der zweiten Gruppe noch zwei Gruppen von ebensoviel Gleichungen anzureihen, welche jedoch aus jener auch hervorgehen, indem man die Buchstaben a, b, c cyklisch (cf. § 13.) oder aber einmal a mit c und einmal b mit c vertauscht. Das gleiche gilt für die dritte Gruppe bezüglich der Vertauschung von a mit b sowie mit c. —

Bei jeder von diesen Gruppen habe ich diejenigen Ausdrücke unter einander geschrieben, welche durch blosse Anwendung des Commutationsgesetzes zweigliedriger Summen aus einander abgeleitet wer-

den können; es dürfen folglich die auf die erste jedesmal folgenden Zeilen, welche 9, 3 und 1 Ausdrücke enthalten, fortan unberücksichtigt bleiben.

Von den übrig bleibenden Gleichungen ferner zwischen 3, 5 und 3 Ausdrücken haben allein die beiden folgenden:

$$(142)\quad a + (b - c) = a - (c - b) \quad \text{und} \quad (a - c) + b = b - (c - a)$$

niemals einen Sinn, weil entweder die Subtraction linkerhand oder die im innern der Klammer rechterhand unausführbar ist. Gültigkeit können dieselben erst später — bei der Einführung der negativen Zahlen — erhalten, und einstweilen sind eben die betreffenden Ausdrücke nicht einander, sondern nur den übrigen, etwa alle dem ersten Ausdruck einer jeden Gruppe gleichgesetzt zu denken. —

Wenn wir nun zunächst über die Anzahl der unser Kenntnissbereich erweiternden und zu den früheren als wesentlich neu hinzutretenden Sätze in's klare kommen wollen, so liegen auf den ersten Blick im ganzen $2 + 4 + 2 = 8$ von einander unabhängige Gleichungen vor uns. Diese sind jedoch keinesweges als Ausfluss von ebensoviel selbstständigen und neuen Theoremen zu betrachten.

Vielmehr liefert uns oft ein einziges Theorem auf einmal zwei von diesen Gleichungen dadurch, dass man eine Operation, welche das Theorem für ein Glied der zweigliedrigen Summe vorschreibt, sowohl mit dem einen als auch mit dem andern Gliede gesondert vornimmt, dass man m. a. W. den Satz nicht nur auf das eine, sondern, wozu man ebensogut berechtigt ist, auch auf das andre Glied der zweigliedrigen Summe anwendet. Die eine der beiden aus dem Theorem so hervorgehenden Gleichungen kann alsdann aus der andern abgeleitet werden, indem man einfach die Namen der einzelnen Zahlen verändert d. h. ein paar Buchstaben miteinander vertauscht.

Dies ist zunächst der Fall mit den beiden Gleichungen der ersten Gruppe (139), von welchen wir wissen, dass sie (nächst dem Commutationsgesetze für zweigliedrige Summen) aus dem einzigen *Associationsgesetze* der Addition entspringen. Da überdies diese Gleichungen längst bekannt sind, so können wir die erste Formelgruppe als bereits erledigt betrachten.

Bei der zweiten Gruppe von 4 Gleichungen (140) geht ebenfalls die zweite Gleichung aus der ersten und die vierte aus der dritten auf die genannte Weise hervor und bildet mit ihr zusammen jedesmal nur *ein* neues Theorem, und das nämliche ist endlich auch der Fall bei den 2 Gleichungen der dritten Gruppe (141).

In der That folgt aus der ersten Gleichung (140):

$$(a + b) - c = a + (b - c)$$

durch Vertauschung der Buchstaben a und b (vergleiche Einleitung, pag. 43):

$$(b + a) - c = b + (a - c),$$

oder durch beiderseitige Anwendung des Commutationsgesetzes:

$$(a + b) - c = (a - c) + b.$$

Da nun in der ersten und letzten Gleichung die linken Seiten übereinstimmen, so müssen auch die rechten einander gleich sein, oder:

$$a + (b - c) = (a - c) + b, \tag{143}$$

was die zweite Gleichung (140) ist, die aus der ersten abgeleitet werden sollte.

Ebenso hat man, wenn die dritte Gleichung (140):

$$(a + b) - c = a - (c - b)$$

besteht, mit demselben Rechte auch:

$$(b + a) - c = b - (c - a),$$

woraus die vierte Gleichung (140) folgt:

$$a - (c - b) = b - (c - a). \tag{144}$$

Und endlich muss die erste Gleichung (141):

$$a - (b + c) = (a - b) - c,$$

wenn nun b die Zahl genannt wird, die bisher c hiess und umgekehrt, die folgende Gleichung nach sich ziehen:

$$a - (c + b) = (a - c) - b,$$

welche ebenfalls für ganz beliebige Zahlen b und c, also auch für die ursprünglichen Werthe derselben, gültig ist. Durch Vergleichung mit der vorigen ergibt sich dann wieder die zweite Gleichung der Gruppe (141):

$$(a - b) - c = (a - c) - b \tag{145}$$

als Folgerung aus der ersten.

Damit ist nun erkannt, dass wir in der That nur mehr drei neue selbständige Sätze zu beweisen haben werden, als deren Repräsentanten man die Formeln ansehen kann:

$$(a + b) - c = a + (b - c), \tag{146}$$

$$(a + b) - c = a - (c - b), \tag{147}$$

$$a - (b + c) = (a - b) - c. \tag{148}$$

Mit Inbegriff des Associationsgesetzes werden also die in der Ueberschrift dieses Paragraphen angeführten Gesetze — abgesehen von dem Commutationsgesetz für zweigliedrige Summen — durch *vier* selbständige Sätze ausgesprochen, deren jeder einer doppelten Anwendung fähig ist.

Ich schreite nun dazu, diese Sätze zu beweisen und aus der Zeichensprache in die Wortsprache zu übersetzen.

§ 58. Beweis und Formulirung der Sätze im einzelnen.

Um die erste (146) jener Formeln:

$$(a+b)-c=a+(b-c),$$

welche von associativem Charakter ist, zu beweisen, braucht man nur zu zeigen, dass die rechte Seite der Gleichung diejenige Zahl ist, welche zu c addirt $a+b$ gibt, da ja die linke Seite der Gleichung gerade diese Zahl vorstellt. Zu diesem Zwecke nehmen wir die rechte Seite der Gleichung, addiren sie zu c, oder (was auf dasselbe hinausläuft) c zu derselben, und sehen zu, ob wirklich $a+b$ herauskommt. Dieses erkennt man aber leicht durch Anwendung zuerst des Associationsgesetzes und dann des Satzes von der Vernichtung (Aufhebung) entgegengesetzter Operationen in folgender Weise:

$$\{a+(b-c)\}+c=a+\{(b-c)+c\}=a+b,$$

q. e. d. In Worte gefasst lautet die nun bewiesene Formel, vorwärts gelesen:

(A) *Anstatt eine Zahl von einer Summe zu subtrahiren, kann man diese Zahl auch von einem Gliede der Summe abziehen und das Ergebniss* (den Rest) *zum andern Gliede addiren*;

rückwärts gelesen:

(B) *Anstatt eine Differenz zu einer Zahl zu addiren, kann man auch den Minuenden dieser Differenz zu der Zahl addiren und von dem Ergebnisse* (von der Summe) *den Subtrahenden abziehen.*

Die Gleichheit des ersten und dritten Ausdruckes (140) oder die Formel:

$$(a+b)-c=(a-c)+b$$

ist nunmehr auch schon erwiesen, und dient dieselbe, vorwärts gelesen, lediglich dazu, das Theorem (A) complet zu machen, rückwärts besagt dieselbe:

(C) *Anstatt eine Zahl zu einer Differenz zu addiren, kann man diese Zahl auch zu dem Minuenden addiren und vom Ergebniss den Subtrahenden abziehen.*

Im Grunde ist diese letztere Fassung (C) wegen des Commutationsgesetzes einerlei mit der vorigen (B) und sie könnte auch mit ihr verschmolzen werden (ähnlich wie wir dies in § 16. I bei den beiden Distributionsgesetzen gethan haben), indem man die zu ausdrucksvolle Redensart: „b *zu* a addiren" ersetzte durch die unbestimmtere: „b und a addiren (oder summiren)".

Die letzterwähnte Gleichung lehrt auch noch:

(D) *dass die Reihenfolge, in welcher die Addition einer Zahl und die Subtraction einer andern Zahl fortschreitend vorgenommen werden, gleichgültig ist.*

Die nächstfolgende und letzte der bis jetzt schon etablirten Formeln:

$$a + (b - c) = (a - c) + b,$$

welche sich, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, unmittelbar ergibt, indem man den in der Formel (146) enthaltenen Satz (A) auf beide Arten anwendet, nämlich die von der Summe $a + b$ abzuziehende Zahl c einmal vom letzten Glied b, das andre mal vom ersten a subtrahirt, und die Ergebnisse gleich setzt, gibt vorwärts oder rückwärts gelesen den Satz:

(E) *Anstatt eine Differenz und eine Zahl zu addiren, kann man auch den Subtrahenden der Differenz von der Zahl abziehen und zu dem Ergebniss den Minuenden addiren.*

Bei Beachtung des Commutationsgesetzes erscheint die Relation als eine symmetrische, nämlich:

$$a + (b - c) = b + (a - c) \quad \text{oder} \quad (a - c) + b = (b - c) + a,$$

und kann man auch sagen:

(F) *Soll eine Zahl und eine Differenz addirt werden, so darf der Minuend der letzteren mit der Zahl vertauscht werden.* —

Um die zweite (147) unsrer drei Hauptformeln zu beweisen:

$$(a + b) - c = a - (c - b),$$

braucht man nur zu zeigen, dass die linke Seite der Gleichung, zu $c - b$ addirt, a liefert. In der That ist nach der bereits bewiesenen Regel (B) und dem Satz von der Hebung entgegengesetzter Operationen:

$$\{(a + b) - c\} + (c - b) = [\{(a + b) - c\} + c] - b = (a + b) - b = a,$$

q. e. d. Hier bietet sich indessen auch noch ein zweiter Weg des Beweises, indem es ebensoleicht auch gelingt, darzuthun, dass die rechte Seite der Gleichung eben diejenige Zahl ist, welche zu c addirt $a + b$ liefert. Unter Anwendung des Satzes (E) und weiter des ersten Satzes (59) hat man nämlich:

$$\{a - (c - b)\} + c = a + [c - (c - b)] = a + b,$$

wie behauptet worden.

In Worten heisst nun unsre Formel

vorwärts gelesen:

(G) *Anstatt eine Zahl von einer Summe zu subtrahiren, kann man auch ein Glied der Summe von dieser Zahl, und den Rest vom andern Gliede subtrahiren,* und

rückwärts gelesen:

(H) *Anstatt eine Differenz von einer Zahl zu subtrahiren, kann man auch den Subtrahenden der Differenz zu dieser Zahl addiren und von dem Ergebnisse den Minuenden abziehen.*

Von den übrigen Formeln der Gruppe (140), welche nunmehr sämmtlich gerechtfertigt sind, heisst die folgende:

$$(a - c) + b = a - (c - b)$$

vorwärts gelesen:

(J) *Anstatt eine Zahl und eine Differenz zu addiren, kann man auch die Zahl von dem Subtrahenden der Differenz und das Ergebniss von dem Minuenden abziehen;* rückwärts:

(K) *Anstatt eine Differenz von einer Zahl zu subtrahiren, kann man auch den Minuenden der Differenz von dieser Zahl abziehen, und zum Ergebniss den Subtrahenden addiren.*

Die nächste Formel endlich:

$$a - (c - b) = b - (c - a),$$

welche wieder eine symmetrische ist, führt vorwärts oder rückwärts gelesen zu demselben Satze:

(L) *Anstatt eine Differenz von einer Zahl zu subtrahiren, kann man auch diese Zahl von dem Minuenden der Differenz und das Ergebniss von dem Subtrahenden abziehen,* oder:

Wenn eine Differenz von einer Zahl subtrahirt werden soll, so kann man den Subtrahenden der ersteren mit der Zahl vertauschen.

Diese Formel ist die letzte ihrer Gruppe, zu welcher man, um sie in Worte zu fassen, eines neuen Textes bedarf.

§ 59. **Fortsetzung.**

Um die dritte Hauptformel, (148):

$$a - (b + c) = (a - b) - c$$

zu beweisen, braucht man nur zu zeigen, dass auch die rechte Seite der Gleichung diejenige Zahl vorstellt, welche zu $b + c$ addirt, a gibt. In der That ist nach dem Commutations- und dem Associationsgesetze, sowie immerfort im Hinblick auf die Hebung entgegengesetzter Operationen:

$$\{(a - b) - c\} + (b + c) = \{(a - b) - c\} + (c + b)$$
$$= [\{(a - b) - c\} + c] + b = (a - b) + b = a,$$

q. e. d. Man kann hier bemerken, dass dieser Satz sich wesentlich mit auf das Commutationsgesetz der Addition stützt; dagegen würde der ebenso zu führende Beweis der andern Formel: $a - (b + c) = (a - c) - b$ lediglich die Gültigkeit des Associationsgesetzes vorauszusetzen haben.

Auch hier lässt sich der Beweis auf eine zweite Art durchführen, wobei man sich indessen auf einen Satz der früheren Gruppe (140) berufen muss. Man kann nämlich auch zeigen, dass die linke Seite

der Gleichung die Zahl ist, welche zu c addirt $a - b$ liefert, mithin die der rechten Seite zur Definition dienende Eigenschaft theilt. Nach dem Satze (J) hat man in der That:

$$\{a - (b + c)\} + c = a - [(b + c) - c] = a - b.$$

Unsre Formel (148) heisst nun, vorwärts gelesen:

(M) *Anstatt eine Summe* von einer Zahl *zu subtrahiren, kann man auch die Glieder dieser Summe fortschreitend* von dieser Zahl *subtrahiren,* und rückwärts gelesen:

(N) ***Anstatt eine Zahl von einer Differenz zu subtrahiren, kann man auch diese Zahl zum Subtrahenden addiren, und das Ergebniss vom Minuenden abziehen,***

oder auch:

(O) ***Statt mehrere Zahlen hintereinander zu subtrahiren, kann man die Summe derselben auf einmal subtrahiren*** — ein Satz, der zunächst allerdings nur für *zwei* zu subtrahirende Zahlen nachgewiesen ist.

Die letzte Formel der Gruppe (141):

$$(a - b) - c = (a - c) - b,$$

welche wiederum eine symmetrische ist, liefert, in beiderlei Sinn gelesen, den Satz:

(P) ***Anstatt eine Zahl von einer Differenz zu subtrahiren, kann man diese Zahl auch von dem Minuenden der Differenz und von dem Ergebnisse den Subtrahenden abziehen,***

mit andern Worten:

(Q) ***Wenn eine Zahl von einer Differenz subtrahirt werden soll, so ist es erlaubt, diese Zahl mit dem Subtrahenden der Differenz zu vertauschen,***

oder auch:

Es ist einerlei, in welcher Ordnung zwei oder ***mehrere Zahlen hintereinander*** von einer andern ***subtrahirt werden.***

Anmerkung über die Parenthesen. In Anbetracht, dass einer der vorstehenden Sätze einen associativen Charakter hat, und lehrt, dass es in dem Ausdruck $a + b - c$ einerlei ist, auf welche Weise die eigentlich hinzuzudenkende Klammer angebracht werden mag, dass mithin diese Klammer in beiden Fällen auch ganz unterdrückt werden darf, in Anbetracht ferner, dass auch bei den übrigen Ausdrücken die Klammer wenigstens in einem von den beiden Fällen erspart werden kann, zu deren Unterscheidung sie dienen soll — pflegt man die fundamentalen Gleichungen (140) bis (141) nun einfacher wie folgt zu schreiben:

$$a + b - c = a + (b - c) = a - c + b = a - (c - b) = b - (c - a),$$
$$a - (b + c) = a - b - c = a - c - b,$$

und man kann sich demnach bis zur allgemeinen Erledigung aller Vorschriften über die Klammern in § 71. sqq. einstweilen merken, dass eine am Anfang eines Ausdruckes oder hinter einem Pluszeichen beginnende und vor einem Plus- oder Minuszeichen oder am Ende des Ausdruckes endigende Klammer, welche (mithin als einen Summanden oder Minuenden) eine Summe oder Differenz umschliesst, nach Belieben gesetzt oder weggelassen werden kann. Nur eine *hinter einem Minus-*

zeichen beginnende Klammer um einen derartigen Ausdruck herum darf nicht willkürlich eingeführt, oder wo sie steht, nicht ohne weiteres fortgelassen werden. Im letzteren Falle kann eine derartige Klammer nur, wie man sagt, „*aufgelöst*" werden, indem man den Ausdruck nach den vorstehenden Sätzen selbst ersetzt durch einen der ihm gleichgesetzten und äquivalenten, welcher keine Klammer mehr in sich fasst. Zum Beispiel: Auflösung der Klammer bei $a - (c - b)$ gibt $a - c + b$, und der Ausdruck $a - (b + c)$ verwandelt sich ebendadurch in: $a - b - c$.

Man sieht, dass zum Auflösen der hinter einem Minuszeichen stehenden lammer (die einen Ausd ruck der ersten Stufe als einen Subtrahenden umgibt) erforderlich ist, dass man das „Vorzeichen" des zweiten Operationsgliedes in das entgegengesetzte ($-$ in $+$ und $+$ in $-$) verwandle, nachdem man das erste Operationsglied mit dem vor der Klammer gewesenen Minuszeichen verbunden hat.

Soll umgekehrt eine Klammer hinter einem Minuszeichen angebracht, nämlich zwei Operationsglieder der ersten Stufe in dieselbe eingeschaltet werden, m. a. W. soll jenes Minuszeichen bei diesen Operationsgliedern „ausgeschieden" oder „vorgezogen" werden, so hat man jedesmal das zwischen den gedachten Gliedern befindliche Operationszeichen umzukehren.

§ 60. Varianten des Beweisverfahrens.

Will man die vorstehenden Sätze nicht durch die sogenannte Probe der inversen Operationen beweisen, sondern vielmehr die eine Seite der Gleichung (dadurch dass man Schritt vor Schritt die schon von früher bekannten Sätze anwendet) *direct* in die andere überführen, so lässt sich dieses leicht in folgender Weise bewerkstelligen (Grassmann l. c.).

Als die zu beweisenden Hauptgleichungen nehme ich die drei folgenden an:

$$(149)\qquad \begin{cases} a + (b - c) = (a + b) - c, \\ (a - b) - c = a - (b + c), \\ a - (c - b) = (a - c) + b, \end{cases}$$

indem ich für die zweite der in § 57. angegebenen Gleichungen (146) bis (148) hier als dritte eine solche Modification derselben schreibe, bei welcher die Ordnung der Buchstaben links und rechts die nämliche ist, entsprechend dem Charakter der beiden andern Gleichungen.

Ich wende nun auf den Ausdruck linker Hand den Satz von der Hebung entgegengesetzter Operationen an — wonach eine Zahl unverändert bleibt, wenn man irgend eine andere Zahl fortschreitend addirt und subtrahirt, in beliebiger Folge.

Alsdann ergibt sich unter steter Rücksicht auf die beiden Gesetze der Addition für die erste Gleichung (149) der Beweis:

$$a + (b - c) = [\{a + (b - c)\} + c] - c =$$
$$= [a + \{(b - c) + c\}] - c = [a + b] - c.$$

Desgleichen erhält man als Beweis der zweiten Gleichung (149) für den Ausdruck auf der linken Seite die nachstehende Kette von Umformungen:

$$(a-b)-c=[\{(a-b)-c\}+(b+c)]-(b+c)=$$
$$=[\{(a-b)-c\}+(c+b)]-(b+c)=$$
$$=[(\{(a-b)-c\}+c)+b]-(b+c)=$$
$$=[(a-b)+b]-(b+c)=a-(b+c).$$

Beträchtlich bequemer schreiben sich diese Gleichungen, wenn man von der vorausgehenden Anmerkung über die Klammern Gebrauch macht, oder, noch besser, von der Regel I des § 72. Alsdann ist nämlich der Beweis der ersten Gleichung (149):

$$a+(b-c)=a+(b-c)+c-c=a+(b-c+c)-c=a+b-c$$

und der Beweis der zweiten Gleichung (149):

$$a-b-c=a-b-c+(b+c)-(b+c)=a-b-c+(c+b)-(b+c)=$$
$$=a-b-c+c+b-(b+c)=a-b+b-(b+c)=a-(b+c).$$

Wird dieser letzte Satz nun selbst (beim zweiten Schritte) angewendet, so ergibt sich endlich für die dritte Gleichung (149) der Beweis:

$$a-(c-b)=[\{a-(c-b)\}-b]+b=[a-\{(c-b)+b\}]+b=$$
$$=[a-c]+b,$$

oder in vereinfachter Darstellung:

$$a-(c-b)=a-(c-b)-b+b=a-(c-b+b)+b=a-c+b,$$

q. e. d. Anstatt bei diesem Beweise dergestalt in Formeln vorzugehen, könnte man den Satz auch — ziemlich heuristisch — durch folgende Ueberlegung herleiten.

Es sei $(c-b)$ von a zu subtrahiren. Subtrahirt man c von a, so hat man — wegen $c=(c-b)+b$ — um b zu viel weggenommen; man muss daher b wieder hinzufügen, und findet $a-(c-b)=(a-c)+b$. —

So bestechend auch dergleichen Raisonnements für den Anfänger sind, so haben sie jedoch den Fehler, dass dabei die im Beweise zur Anwendung kommenden Sätze nicht alle deutlich genug zum Bewusstsein gebracht werden. —

Alle diese Schlussreihen lassen sich auch in der entgegengesetzten Ordnung (rückwärts) ausführen, und sind hiemit sämmtliche Sätze, die einen einigermassen *associativen* Charakter haben, von neuem bewiesen; ich will dieselben nochmals mit dem Associationsgesetz der Addition selbst zusammenstellen:

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$
$$a+(b-c)=(a+b)-c,$$
$$a-(b+c)=(a-b)-c,$$
$$a-(c-b)=(a-c)+b. -$$

Sind jetzt noch die beiden Sätze, welche aussagen, dass die

Reihenfolge, in der Zahlen addirt und subtrahirt werden, beliebig ist, direct durch die Schlussreihen bewiesen:

$$(a+b)-c=(b+a)-c=b+(a-c)=(a-c)+b,$$
$$(a-b)-c=a-(b+c)=a-(c+b)=(a-c)-b,$$

so haben wir jetzt auch die Sätze von einfach *commutativem* Charakter, in deren Zusammenstellung:

$$(a+b)+c=(a+c)+b,$$
$$(a+b)-c=(a-c)+b,$$
$$(a-b)-c=(a-c)-b,$$

der mittlere (allein unsymmetrische) sowohl vor- als rückwärts zu lesen ist, wiederum etablirt, und ich will dem bisherigen auch noch den neuen Wortausdruck eines grossen Theiles dieser Sätze hinzufügen:

Um ebensoviel als man ein Glied vermehrt, wächst auch die Summe.

Wird ein Summand vermindert, so nimmt die Summe um ebensoviel ab.

Um wieviel man den Minuenden vergrössert, um soviel nimmt die Differenz zu.

Um wieviel man den Minuenden verkleinert, um soviel nimmt die Differenz ab.

Vergrösserung eines Subtrahenden bewirkt ein Abnehmen der Differenz um den gleichen Betrag, dagegen:

Um wieviel man den Subtrahenden verkleinert, um soviel wächst die Differenz.

Es kann nun endlich die Regel (135) für die *Umformung* einer Differenz, von welcher bis jetzt noch niemals Gebrauch gemacht worden ist, nachträglich in ähnlicher Art direct bewiesen werden, wie folgt:

$$(a+n)-(b+n)=(a+n)-(n+b)=\{(a+n)-n\}-b=a-b.$$

Auch kann man in Worten den Beweis nunmehr durch nachstehende elementare Ueberlegung führen: Vermehrt man den Minuenden einer Differenz um eine Zahl, so wird dadurch — wie schon erwiesen — die Differenz selbst um eben diese Zahl vermehrt; vermehrt man dagegen den Subtrahenden allein um die nämliche Zahl, so wird die Differenz um ebensoviel vermindert. Thut man also beides zugleich, so wird die Differenz um die genannte Zahl einerseits vermehrt, andererseits vermindert, was sich aufhebt; der Werth der Differenz bleibt daher in Wirklichkeit ungeändert.

Ebenso auch würde sich beweisen lassen, dass eine Summe sich nicht ändert, wenn man das eine Glied vergrössert und das andre um ebensoviel verkleinert, u. s. w.

Umgekehrt hätten die Sätze dieses Paragraphen sich als eine unmittelbare Consequenz der in den beiden ersten Zeilen des Tableau's (136) enthaltenen gewinnen lassen, so, wie z. B. die zweite Gleichung (149) leicht aus der ersten (136) abzuleiten ist. —

§ 61. Zusammenfassung der vorhergehenden Sätze.

Die in den Paragraphen 57. bis 60. dargelegten Sätze, welche, namentlich in Worten ausgedrückt, ungemein zahlreich erscheinen, brauchen keineswegs alle so wie sie ausgesprochen worden dem Gedächtnisse eingeprägt zu werden. Man muss jedoch die ermüdende Reihe derselben einmal durchgegangen haben, um die Manipulationen oder Kunstgriffe begreifen und würdigen zu können, welche später in der Absicht ersonnen werden und in der That nothwendig ausgeführt werden müssen, um diese grosse Menge von Sätzen entbehrlich zu machen, sie zusammenzuziehen und zu verallgemeinern, um überhaupt die Zahl derjenigen Sätze und Formeln, welche schliesslich der Rechner jederzeit zur Hand haben muss, auf ein Minimum zu reduciren.

Wenn schon dieses Ziel dadurch noch keineswegs *vollkommen* erreicht wird, ist es doch sehr nützlich, die wichtigsten der gedachten Sätze, noch in Verbindung mit dem zu ihnen gehörenden Associationsgesetze, sich auf eine Weise mnemonisch zu machen, wie ich es jetzt auseinandersetzen will.

Zu dem Ende braucht man sich nur der in § 34. eingeführten Benennungen zu erinnern, und erhält für die gross gedruckten Sätze der §§ 58. und 59. folgende Zusammenfassung.

Versteht man unter dem Wort „Rechnung" für den Augenblick entweder eine Addition oder eine Subtraction, kurzum nur eine Rechnung *erster* Stufe, so ist dem Resultate nach:

Rechnung an einer Summe äquivalent derselben Rechnung an einem der Glieder;

Rechnung an einer Differenz ist dieselbe Rechnung am Minuenden oder die entgegengesetzte am Subtrahenden;

Rechnung mit einer Summe ist dieselbe Rechnung mit den Gliedern nacheinander — in irgend einer Folge;

Rechnung mit einer Differenz ist dieselbe Rechnung mit dem Minuenden und die entgegengesetzte mit dem Subtrahenden — in irgend einer Folge.

Uebersetzt man die vorstehenden Sätze wieder in Formeln, indem man die passiven Zahlen, *an* welchen gerechnet wird (oder die Operationsglieder des als solche fungirenden Ausdruckes), mit p, q, die activen aber, *mit* welchen gerechnet wird, durch a, b bezeichnet, so ergibt sich folgende Zusammenstellung:

$$10)\left\{\begin{array}{l|l}
(p+q)+a=(p+a)+q=p+(q+a), & p+(a+b)=(p+a)+b=(p+b)+a, \\
(p+q)-a=(p-a)+q=p+(q-a), & p-(a+b)=(p-a)-b=(p-b)-a, \\
(p-q)+a=(p+a)-q=p-(q-a), & p+(a-b)=(p+a)-b=(p-b)+a, \\
(p-q)-a=(p-a)-q=p-(q+a), & p-(a-b)=(p-a)+b=(p+b)-a.
\end{array}\right.$$

Diese Formeln finden sich — abgesehen von dem Buchstabenwechsel in der Bezeichnung der Zahlen — sämmtlich unter den bisher behandelten vor, und man wird leicht zu einer jeden derselben die entsprechende des § 57. angeben können, welcher sie nachgebildet ist. Darin liegt denn auch der Beweis der vorstehenden vier Regeln.

Umgekehrt jedoch sind nicht alle Sätze der früheren Paragraphen von (A) bis (Q) in den genannten vier Regeln enthalten. Vielmehr fehlen, wie schon oben angedeutet wurde, alle diejenigen, welche dort durch kleineren Druck gekennzeichnet sind.

§ 62. Gesetze für die Verbindung der Operationen zweiter Stufe unter sich.

Der Beweis aller bisherigen in § 57. bis incl. 61. angegebenen Formeln beruhte wesentlich auf dem Commutations- und dem Associationsgesetze nebst dem Satze von der wechselseitigen Zerstörung („Hebung“) entgegengesetzter Operationen [cf. § 79. und 80.].

Da nun diese Gesetze ganz ebenso für die zweite wie für die erste Operationsstufe gelten, so wird es ohne weiteres gestattet sein, darin alle $+$ und $-$ Zeichen durch $\times$ und : zu ersetzen und wird man ebenso den Text sämmtlicher Sätze noch weiter aufrecht erhalten können, nachdem darin alle vorkommenden Benennungen für Rechnungsarten, Operationsglieder und Resultate um eine Stufe erhöht sind.

Ich werde dieses leichte Geschäft nicht ganz ausführen, und unterlasse auch die umständliche Angabe eines grossen Theiles der Sätze, zu welchen man auf diese Weise Schritt vor Schritt dem früheren entsprechend gelangen kann. Auf den Beweis der Formeln kann überhaupt hier um so eher verzichtet werden, als man zum Ueberfluss aus dem folgenden Abschnitt noch die mannigfaltigsten — wo nicht alle möglichen — Varianten ihrer Herleitung wird entnehmen können. Da jedoch einige von jenen Sätzen immerhin zu wichtig sind, als dass man sie gänzlich mit Stillschweigen übergehen dürfte, so gebe ich im nächsten Paragraphen wenigstens eine übersichtliche Zusammenstellung dieser letzteren.

Auch muss ich, um mich kurz darauf zurückbeziehen zu können, die den Formeln (139) bis (141) entsprechenden Formelgruppen noch einmal hersetzen. Diese letzteren stellen sich nun dem gesagten entsprechend wie folgt dar:

$$(151)\quad \left\{\begin{aligned} a(bc) &= b(ca) = c(ab) = \\ = a(cb) &= b(ac) = c(ba) = \\ = (cb)a &= (ac)b = (ba)c = \\ = (bc)a &= (ca)b = (ab)c. \end{aligned}\right.$$

$$(152)\quad \begin{cases} \frac{ab}{c} = a\frac{b}{c} = \frac{a}{c}b = a : \frac{c}{b} = b : \frac{c}{a} = \\ = \frac{ba}{c} = \frac{b}{c}a = b\frac{a}{c}. \end{cases}$$

$$(153)\quad \begin{cases} \frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b = \\ = \frac{a}{cb}. - \end{cases}$$

§ 63. Zusammenfassung der Sätze.

Um die Gesetze für die Verbindung von Zahlen durch die Operationen zweiter Stufe mnemonisch zu machen, merke man wieder folgendes.

Wenn unter dem Worte „*Rechnung*" für den Augenblick nur eine Multiplication oder eine Division, also eine Rechnung *zweiter Stufe* verstanden wird, so gelten in Bezug auf den Werth des Resultates, nicht aber in Bezug auf die Natur der zu demselben hinführenden Arbeit, nachstehende vier Sätze:

Rechnung an einem Product ist dieselbe Rechnung an einem der Factoren;

Rechnung an einem Quotienten (Bruche) ist dieselbe Rechnung am Dividenden (Zähler) oder die entgegengesetzte am Divisor (Nenner);

Rechnung mit einem Product ist dieselbe Rechnung mit den Factoren nacheinander — in irgend einer Ordnung;

Rechnung mit einem Quotienten (Bruche) ist dieselbe Rechnung mit dem Dividenden (Zähler) und die entgegengesetzte mit dem Divisor (Nenner) — in beliebiger Folge.

Diese Sätze haben nämlich die Gleichungen zur Folge:

$$(154)\quad \begin{cases} (pq)a = (pa)q = p(qa), & p(ab) = (pa)b = (pb)a, \\ \frac{pq}{a} = \frac{p}{a}\cdot q = p\cdot\frac{q}{a}, & \frac{p}{ab} = \frac{p}{a} : b = \frac{p}{b} : a, \\ \frac{p}{q}\cdot a = \frac{pa}{q} = \frac{p}{q:a}, & p\cdot\frac{a}{b} = \frac{pa}{b} = \frac{p}{b}\cdot a, \\ \frac{p}{q} : a = \frac{p:a}{q} = \frac{p}{aq}, & p : \frac{a}{b} = \frac{p}{a}\cdot b = \frac{pb}{a}, \end{cases}$$

welche man sämmtlich leicht verificiren wird.

In ausführlicherer Fassung sind hierunter namentlich die Regeln (der Bruchrechnung) enthalten:

Um ein Product durch eine Zahl zu dividiren, genügt es, einen Factor des Productes durch dieselbe zu theilen.

Ein Bruch kann mit einer Zahl multiplicirt werden, indem man den Zähler desselben mit ihr multiplicirt, oder, wenn es angeht, den Nenner durch sie dividirt.

Ein Bruch kann durch eine Zahl dividirt werden, indem man den Nenner desselben mit der Zahl multiplicirt, oder, wenn es angeht, den Zähler durch sie dividirt.

Anstatt durch ein Product zu dividiren, kann man durch die Factoren desselben nacheinander dividiren; und

Statt eine Zahl durch mehrere andere fortschreitend zu dividiren, kann man sie auch auf einmal durch das Product der letzteren theilen.

Statt mit einem Bruche zu multipliciren, kann man auch fortschreitend mit dem Zähler multipliciren und durch den Nenner theilen, und:

Anstatt durch einen Bruch zu dividiren, kann man fortschreitend durch den Zähler theilen und mit dem Nenner multipliciren.

Die Ordnung, in welcher eine Zahl mit mehreren andern fortschreitend bald multiplicirt bald dividirt wird, ist beliebig, desgleichen die Ordnung, in welcher sie durch die andern fortschreitend blos dividirt wird.

§ 64. Gesetze für die Verknüpfung der Operationen erster und zweiter Stufe miteinander.

Die wichtigsten dieser Sätze sind sämmtlich von *distributivem* Charakter und werden durch folgende 4 Formeln ausgedrückt:

$$(155)\begin{cases} 1)\ (a+b)\cdot c = ac + bc \text{ oder auch: } & c\,.\,(a+b) = ca + cb \\ 2)\ (a-b)\cdot c = ac - bc & c\cdot(a-b) = ca - cb \\ 3)\ \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} & \left[(a+b):c = a:c + b:c\right. \\ 4)\ \dfrac{a-b}{c} = \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} & \left.(a-b):c = a:c - b:c\right]. \end{cases}$$

Dieselben zeigen, dass ein Factor auf die Operationsglieder einer Differenz sich ebenso *vertheilt*, wie auf diejenigen einer Summe, und dass ein Divisor in dieser Beziehung sich ebenso verhält wie ein Factor.

Die erste der obigen Formeln ist das bekannte Distributionsgesetz selbst, mithin bereits ausgesprochen und bewiesen. Die drei andern Formeln werden leicht durch die *Probe* unter Anwendung der vorhergehenden bewiesen, etwa für die zweite Gleichung folgendermassen:

$$(a-b)\cdot c + bc = \{(a-b)+b\}c = ac;$$

zum Ueberfluss könnte man für diese Gleichung den Beweis auch ohne Berufung auf das Distributionsgesetz ähnlich wie bei diesem direct führen, indem man der Bedeutung des Productes $(a-b)\cdot c$ eingedenk wäre und von den Sätzen über Addition von Differenzen Gebrauch machte.

Für die dritte Gleichung lautet der Beweis:

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\cdot c=\frac{a}{c}\cdot c+\frac{b}{c}\cdot c=a+b,$$

und für die vierte entweder mit Rücksicht auf die zweite:

$$\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right)\cdot c=\frac{a}{c}\cdot c-\frac{b}{c}\cdot c=a-b,$$

oder auch unter Benutzung der dritten:

$$\frac{a-b}{c}+\frac{b}{c}=\frac{(a-b)+b}{c}=\frac{a}{c}. -$$

Uebrigens kann der Beweis obiger Gleichungen anstatt durch die Probe auch wieder durch directe Umformung ihrer einen in ihre andere Seite geführt werden, nämlich gestützt auf den Satz vom Sichaufheben entgegengesetzter Operationen, in der folgenden leicht verständlichen Weise:

$$(a-b)c=\left\{(a-b)c+bc\right\}-bc=\left\{(a-b)+b\right\}c-bc=ac-bc,$$

desgleichen:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\frac{a}{c}\cdot c+\frac{b}{c}\cdot c}{c}=\frac{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\cdot c}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c},$$

und endlich:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\frac{a}{c}\cdot c-\frac{b}{c}\cdot c}{c}=\frac{\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right)\cdot c}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c},$$

oder auch:

$$\frac{a-b}{c}=\left\{\frac{a-b}{c}+\frac{b}{c}\right\}-\frac{b}{c}=\frac{(a-b)+b}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}. -$$

Noch etwas heuristischer würde die Ableitung der inversen Gesetze 2), 3), 4) aus dem directen 1) (155) erscheinen, wenn man sie durchweg nach folgendem Vorbild ausführte.

Setzen wir in der letztgenannten Gleichung $(a+b)c=ac+bc$ einfach die Summe $a+b=s$, mithin $a=s-b$, d. h. also, lassen wir im Grunde nur den in § 37. besprochenen Namenwechsel eintreten, so geht jene Gleichung über in: $s\cdot c=(s-b)\cdot c+b\cdot c$, woraus durch Transposition entsteht:

$$(s-b)\cdot c=s\cdot c-b\cdot c,$$

und hiemit ist, wenn der Buchstabe s nun durch a ersetzt wird, in der That die nächstfolgende Gleichung (155) 2) entdeckt.

Wird $ac=\alpha$, $bc=\beta$, also $a=\frac{\alpha}{c}$, $b=\frac{\beta}{c}$ gesetzt, so folgt 3) u. s. f.

In ähnlicher Weise hätten auch schon viele von den früheren Sätzen aufgefunden und damit zugleich bewiesen werden können. —

Die zweite Formel heisst in Worten:

Anstatt eine Differenz mit einer Zahl zu multipliciren, kann man auch Minuend und Subtrahend derselben mit dieser Zahl multipliciren und das letztere Product von dem ersteren abziehen.

Umgekehrt: *Wenn Minuend und Subtrahend einer Differenz einen übereinstimmenden Factor enthalten, so kann man denselben ausscheiden,*

d. h. ihn neben eine Klammer setzen, in welche die Differenz der übrigen Factoren geschrieben wird. (Regel für die *Subtraction gleichnamiger Monome,* cf. § 17. Anm.).

Die dritte Gleichung heisst vorwärts gelesen:

Um eine Summe durch eine Zahl zu dividiren, kann man auch die Glieder der Summe durch diese Zahl dividiren und die Quotienten addiren, und rückwärts: *Gleichnamige Brüche können addirt werden, indem man ihre Zähler addirt, und die Summe durch den gemeinsamen Nenner theilt.*

Man pflegt nämlich Brüche *gleichnamig* zu nennen, wenn sie den gleichen Nenner besitzen.

Ebenso gibt nun die vierte Gleichung die beiden Sätze:

Um eine Differenz durch eine Zahl zu dividiren, kann man auch Minuend und Subtrahend derselben durch diese Zahl dividiren und das letztere Ergebniss von dem ersteren abziehen, und:

Ein Bruch kann von einem gleichnamigen Bruche subtrahirt werden, indem man seinen Zähler von dem des letzteren abzieht und den Rest durch den gemeinschaftlichen Nenner theilt.

Die Anwendung der Sätze 3) und 4) vorwärts heisst: „*Ausdividiren*“, da sie dem „Ausmultipliciren“ entspricht; rückwärts heisst sie „*Vereinigen*“ der Brüche.

Eine wenn auch rein äusserliche Zusammenfassung der vorstehenden 4 Sätze (155) besteht in folgendem:

Anstatt eine Rechnung zweiter Stufe (Multiplication oder Division) *an einem Ausdruck erster Stufe* (Summe oder Differenz) *vorzunehmen, kann man diese Rechnung auch an den Operationsgliedern des Ausdrucks einzeln ausführen* — ohne übrigens den Charakter desselben zu verändern; und umgekehrt.*

Was die übrigen Verknüpfungen zwischen einer Operation der ersten und einer Operation der zweiten Stufe betrifft, die sich noch herstellen lassen, so könnte man ferner die Sätze anführen:

$$(156)\quad\begin{cases} a \pm bc = b\left(\frac{a}{b} \pm c\right) = \left(\frac{a}{c} \pm b\right)c, & a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}, \\ ab \pm c = a\left(b \pm \frac{c}{a}\right) = \left(a \pm \frac{c}{b}\right)b, & \frac{a}{b} \pm c = \frac{a \pm bc}{b}, \end{cases}$$

welche indessen, wenn man rechter Hand ausmultiplicirt, oder ausdividirt — mit Rücksicht auf die Hebung entgegengesetzter Operationen — sich nur als specielle Fälle der vorigen distributiven Gesetze herausstellen.

Die beiden linken Formeln zeigen, wie man einen gemeinschaftlichen Factor auch bei solchen Summen oder Differenzen ausscheiden kann, bei welchen derselbe nicht in allen (Operations-)Gliedern zu Tage tritt. Um den nicht gemeinschaftlichen Factor zu finden, der als additives oder subtractives Operationsglied in die Klammer zu setzen ist, muss man, wofern derselbe nicht bereits von dem gemeinschaftlichen Factor abgesondert erscheint, *das betreffende Glied durch diesen letzteren dividiren.*

In den beiden Formeln rechterhand ist gezeigt, wie eine ganze Zahl mit einem Bruche additiv oder subtractiv *vereinigt* werden kann; man muss zu diesem Zwecke erst die ganze Zahl *auf den Nenner des Bruches bringen*, indem man sie mit demselben multiplicirt, und alsdann die Vereinigungsregeln (155) 3) oder 4) anwenden.

Endlich ist hinsichtlich der beiden allein noch denkbaren Verknüpfungen von Operationen zu bemerken, dass für die dadurch entstehenden Ausdrücke: $\frac{a}{b+c}$ und $\frac{a}{b-c}$ einfache Sätze nicht angegeben werden können, und dass für dieselben später nur gezeigt werden wird, wie diese Ausdrücke gewisser complicirter und beliebig weit fortzusetzender Entwickelungen fähig sind.

Der Nachweis, dass die bis jetzt erwähnten 16 Verbindungen von jedesmal 2 Operationen die einzig möglichen also von erschöpfender Vollständigkeit sind, kann später nach den in der Combinatorik gelehrten Methoden (cf. Band 2) geleistet werden, eine Bemerkung, die auch für die früheren (desgl. unter gewissem Vorbehalt für die nachfolgenden) Paragraphen angebracht wäre [cf. § 68.].

§ 65. **Gesetze der dritten Stufe. Erste Gruppe.**

Die wichtigsten Gesetze über die Verbindung dreier Zahlen durch die 4 Species und die Rechnungen der dritten Stufe werden zweckmässig in 3 Gruppen zerfällt. Erstens:

$$(157)\quad \begin{cases} 1) & a^b \cdot a^c = a^{b+c}, \\ 2) & a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c, \\ 3) & (a^b)^c = a^{b \cdot c} = (a^c)^b, \\ 4) & \frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c, \\ 5) & \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}, \end{cases}$$

Die drei ersten Formeln sind bereits bekannt und bewiesen. Die Richtigkeit der zwei letzten ist leicht durch die Probe nachzuweisen, nämlich:

ad 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^c \cdot b^c = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^c = a^c$ nach 2);

ad 5) $a^{b-c} \cdot a^c = a^{(b-c)+c} = a^b$ nach 1).

Sie lauten in Worten:

4) *Eine Potenz kann durch eine andre vom nämlichen Exponenten dividirt werden, indem man die Grundzahl der ersteren durch die der letzteren dividirt und das Ergebniss auf die Potenz des gemeinsamen Exponenten erhebt.*

Rückwärts: *Anstatt einen Bruch zu potenziren, kann man auch die Potenz des Zählers durch die des Nenners dividiren.*

5) *Um eine Potenz durch eine andere von gleicher Basis zu dividiren, kann man auch den Exponenten des Divisors von dem des Dividenden abziehen, und die gemeinsame Grundzahl auf die Potenz dieser Differenz erheben.*

Rückwärts: *Anstatt eine Zahl zu einer Differenz zu potenziren, kann man diese Zahl auch zu dem Minuenden und zu dem Subtrahenden potenziren, und das erstere Ergebniss durch das letztere theilen.*

§ 66. Fortsetzung. Zweite Gruppe.

$$(158)\quad \begin{cases} 1) & \sqrt[c]{a^b} = \left(\sqrt[c]{a}\right)^b = \sqrt[\frac{c}{b}]{a} = a^{\frac{b}{c}}, \\ 2) & \sqrt[c]{a \cdot b} = \sqrt[c]{a} \cdot \sqrt[c]{b}, \\ 3) & \sqrt[c]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}}, \\ 4) & \sqrt[b]{\sqrt[c]{a}} = \sqrt[b \cdot c]{a} = \sqrt[c]{\sqrt[b]{a}}. \end{cases}$$

Die erste Zeile enthält die Sätze:

Die Reihenfolge des Potenzirens und Radicirens ist beliebig. Genauer: *Es ist einerlei, in welcher Ordnung eine Zahl fortschreitend potenzirt und radicirt wird.*

Soll eine Potenz mit einer Zahl radicirt oder eine Wurzel mit einer solchen potenzirt werden, so darf man, wenn es angeht, ihren Exponenten durch diese Zahl dividiren.

Sobald jedoch die eine dieser Divisionen möglich ist, wird die andre unmöglich sein, so dass die Gleichung

$$\sqrt[\frac{c}{b}]{a} = a^{\frac{b}{c}}$$

eigentlich illusorisch ist, nämlich, sobald die eine Seite derselben einen Sinn besitzt, die andre vorerst jedes Sinnes baar sein wird.

Die zweite und dritte Zeile lehren:

Die Wurzel aus einem Producte ist gleich dem Product aus den Wurzeln der Factoren.

Die Wurzel aus einem Bruch ist gleich der Wurzel aus dem Zähler getheilt durch die Wurzel aus dem Nenner. Und rückwärts:

Wurzeln von gleichem Exponenten können miteinander multiplicirt oder dividirt werden, indem man ihre Radicanden multiplicirt oder dividirt und aus dem Ergebnisse die gemeinsame Wurzel zieht.

Endlich die letzte Zeile:

Eine Wurzel kann mit einer Zahl radicirt werden, indem man ihren Exponenten mit derselben multiplicirt. Anstatt mit einem Product zu radiciren, kann man auch mit den Factoren desselben nacheinander radiciren.

Es ist einerlei, in welcher Folge eine Zahl fortschreitend mit andern Zahlen radicirt wird.

Der Beweis ist wieder durch die sogenannte Probe der inversen Operationen zu führen und sehr leicht zu finden. Man hat:

ad 1) $$\left\{\left(\sqrt[c]{a}\right)^b\right\}^c = \left\{\left(\sqrt[c]{a}\right)^c\right\}^b = a^b,$$

desgleichen: $$\left(\sqrt[\frac{c}{b}]{a}\right)^c = \left(\sqrt[\frac{c}{b}]{a}\right)^{\frac{c}{b}b} = \left[\left(\sqrt[\frac{c}{b}]{a}\right)^{\frac{c}{b}}\right]^b = a^b,$$

und endlich: $$\left(a^{\frac{b}{c}}\right)^c = a^{\frac{b}{c}c} = a^b \text{ nach (157), 3);}$$

ad 2) und 3): $$\left(\sqrt[c]{a}\cdot\sqrt[c]{b}\right)^c = \left(\sqrt[c]{a}\right)^c\left(\sqrt[c]{b}\right)^c = ab,$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[c]{b}}\right)^c = \frac{\left(\sqrt[c]{a}\right)^c}{\left(\sqrt[c]{b}\right)^c} = \frac{a}{b}, \text{ nach (157) 2) und 4);}$$

ad 4) $$\left(\sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}\right)^{bc} = \left\{\left(\sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}\right)^b\right\}^c = \left\{\sqrt[c]{a}\right\}^c = a \text{ nach (157), 3).} -$$

§ 67. Fortsetzung. Dritte Gruppe.

$$(159)\quad\begin{cases}
1)\quad \overset{a}{\log}(b\cdot c) = \overset{a}{\log} b + \overset{a}{\log} c,\\
2)\quad \overset{a}{\log}\frac{b}{c} = \overset{a}{\log} b - \overset{a}{\log} c,\\
3)\quad \overset{c}{\log}(a^b) = b\cdot\overset{c}{\log} a = \overset{\sqrt[b]{c}}{\log} a = \frac{b}{\overset{a}{\log} c},\\
4)\quad \overset{b}{\log}\sqrt[c]{a} = \frac{\overset{b}{\log} a}{c} = \overset{b^c}{\log} a,\\
5)\quad a^{\overset{c}{\log} b} = b^{\overset{c}{\log} a} = \sqrt[\overset{a}{\log} c]{b} = \sqrt[\overset{b}{\log} c]{a}.
\end{cases}$$

Die ersten dieser Formeln lehren z. B.:

Der Logarithmus eines Productes ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Factoren.

Der Logarithmus eines Bruches ist gleich (der Differenz aus) *dem Logarithmus des Zählers weniger dem Logarithmus des Nenners.*

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Product aus dem Potenzexponenten in den Logarithmus der Grundzahl.

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten aus dem Logarithmus des Radicanden durch den Wurzelexponenten —

— sämmtliche Logarithmen in Beziehung auf die nämliche Basis genommen. Rückwärts:

Logarithmen von gleicher Basis können durch Addition oder Subtraction vereinigt werden, indem man ihre Logarithmanden durch Multiplication oder Division verbindet, und von dem Ergebniss ebenso den Logarithmus nimmt.

Anstatt einen Logarithmus mit einer Zahl zu multipliciren oder zu dividiren, kann man den Numerus mit dieser Zahl potenziren oder radiciren und von dem Ergebniss wieder den Logarithmus nehmen.

Soll eine Zahl mit einem Logarithmus potenzirt oder radicirt werden, so darf der Logarithmand mit der Potenzbasis, resp. die Logarithmenbasis mit dem Radicanden vertauscht werden.

Die Gleichung

$$b \overset{c}{\log}\, a = \frac{b}{\overset{a}{\log}\, c}$$

aus 3) ist wieder unbedingt illusorisch, desgleichen zwei von den Gleichungen 5).

Der Beweis ist stets leicht durch die Probe zu führen und überdies kann man viele von den Sätzen aus einander ableiten. Es ist z. B. mit Rücksicht auf (54):

$$\text{ad 1):}\quad a^{\overset{a}{\log} b + \overset{a}{\log} c} = a^{\overset{a}{\log} b} \cdot a^{\overset{a}{\log} c} = bc \text{ nach (157), 1);}$$

$$\text{ad 3):}\quad c^{b \overset{c}{\log} a} = \left(c^{\overset{c}{\log} a}\right)^b = a^b \text{ nach (157), 3), u. s. w.}$$

Hinsichtlich der Unsymmetrie, welche bei den Formelgruppen (157, 158, 159) — ungeachtet sie in ihrer Art vollständig sind — besonders auffallend zu Tage tritt, und auf welche schon pag. 180 hingewiesen wurde, ist der zweite Abschnitt des gegenwärtigen Kapitels zu vergleichen. —

§ 68. Rückblick und Schlussanmerkung.

Die Gleichungen (157), 1), 3), 5) und (158), 1) lehren, dass die Rechnungen zweiter Stufe mit Potenzen von gleicher Basis — desgl. die Rechnungen dritter Stufe (ohne das Exponenziren und Logarith-

miren) an einer jeden Potenz vorgenommen — dadurch ersetzt werden können, dass man bei den Exponenten dieselbe, um eine Stufe erniedrigte, Rechnungsoperation vornimmt.

Im übrigen wird es erst später möglich sein (durch die Lehre von den Potenzen mit negativen und *gebrochenen* Exponenten) einen grossen Theil der auf die dritte Stufe bezüglichen Sätze wirksam zusammenzufassen, und ausserdem werden dieselben dann mancherlei Modificationen erfahren.

Bei der Zusammenstellung der Gesetze dieser dritten Stufe habe ich deshalb auch nicht mehr in dem gleichen Grade nach Vollständigkeit gestrebt wie bei den vorhergehenden Stufen.

Beim Ueberblicken aller jener Gesetze oder Formeln von § 57. an bemerkt man an denselben zunächst das gemeinsame, dass (der ursprünglichen Absicht entsprechend) eine jede derselben ausgeht von der Betrachtung zweier successiver Operationen, deren erste zwei Zahlen zu einem Elementarausdruck vereinigt, und deren zweite diesen Ausdruck mit einer dritten Zahl verknüpft. Die Sätze geben nun an, welche andern Operationen, an den gegebenen ausgeführt, zu dem nämlichen Resultat führen, d. i. jenen äquivalent sind — jedoch mit einer Beschränkung in Bezug auf die *Anzahl* dieser neuen Operationen. Zunächst nämlich sind die Sätze nur von zweierlei Art: Entweder geben sie abermals *zwei* successive Operationen an, durch deren Verbindung die der beiden ursprünglichen ersetzbar wäre, oder aber sie führen auf *drei* für jene beiden substituirbare Operationen.

Zu den letzteren gehören auf der ersten und zweiten Stufe nur die Formeln (155) und (156); zu der ersten Klasse gehören alle übrigen Formeln. Auch jene zerfallen aber noch in zwei verschiedene Klassen.

Die Formeln der zweiten Klasse (155) haben einen distributiven Charakter; sie zeigen nämlich, wie gewisse an einem Elementarausdruck vorzunehmende Operationen sich *gleichmässig* auf die beiden Operationsglieder dieses Ausdrucks vertheilen.

Den Formeln dritter Klasse (156) geht jedoch diese Gleichmässigkeit ab; dieselben haben einen unsymmetrischen Charakter und sind überhaupt von geringerem Belange.

Ich habe nun auf der dritten Stufe nur die Formeln der beiden ersten Klassen erschöpfend zusammengestellt — soweit sie überhaupt im Gebiet der natürlichen Zahlen Sinn haben können.

Die Formeln (157), 1), 2), 4), 5), sowie (158), 2), 3) und (159), 1), 2) sind diejenigen, welche zur zweiten Klasse gehören, somit dem Distributionsgesetze analog sind.

Um die gedachte, sowie überhaupt jede andre Analogie, welche noch zwischen manchen unsrer Formeln bestehen mag, so ersichtlich als möglich zu machen, ist es rathsam, die Operationen der dritten Stufe etwas anders auszudrücken, nämlich ihre jeweiligen beiden Operationsglieder ebenfalls auf die Zeile nebeneinander zu setzen, indem man dieselben mittelst irgend welcher neuen Zeichen verknüpft. Dies mag indessen füglich dem Leser überlassen bleiben.

Alle soeben nicht erwähnten Formeln der dritten Stufe gehören zur ersten Klasse.

Dagegen wurde abgesehen von den Formeln der dritten Klasse, wohin z. B. zu rechnen wäre:

$$
(160)\left\{\begin{array}{lll}
a \;.\, c = (a \sqrt[b]{c})^b, & \dfrac{a^b}{c} = \left(\dfrac{a}{\sqrt[b]{c}}\right)^b, & \dfrac{c}{a^b} = \left(\dfrac{\sqrt[b]{c}}{a}\right)^b, \\
a \,.\, \sqrt[b]{c} = \sqrt[b]{a^b c}, & \dfrac{a}{\sqrt[b]{c}} = \sqrt[b]{\dfrac{a^b}{c}}, & \dfrac{\sqrt[b]{c}}{a} = \sqrt[b]{\dfrac{c}{a^b}}, \\
a^b \,.\, c = a^{b + \overset{a}{\log} c}, & \dfrac{a^b}{c} = a^{b - \overset{a}{\log} c}, & \dfrac{c}{a^b} = a^{\overset{a}{\log} c - b}, \\
a + \overset{b}{\log} c = \overset{b}{\log}(b^a c), & a - \overset{b}{\log} c = \overset{b}{\log} \dfrac{b^a}{c}, & \overset{b}{\log} c - a = \overset{b}{\log} \dfrac{c}{b^a}.
\end{array}\right.
$$

u. s. w.

§ 69. Zusätze über Ungleichungen.

Der fundamentalen zu Anfang des § 5. gemachten Bemerkung, wonach jede Ungleichung $a > b$ durch Einführung einer unbestimmten Zahl u auch in Gestalt einer Gleichung $a = b + u$ geschrieben werden kann, lässt sich nach Erledigung der inversen Operationen nun die fernere hinzufügen:

Eine Ungleichung $a > b$ ist auch äquivalent mit der Forderung, dass die Differenz $a - b$ einen Sinn habe (cf. § 39.), d. i. dass sie dem Gebiet der bisher betrachteten positiven (ganzen) Zahlen angehöre.

Es verdient dabei noch besonders hervorgehoben zu werden, dass diese Sätze auf den höheren Operationsstufen *kein* Analogon besitzen.

So z. B. erscheint das dem Theorem (A) des § 5. auf der zweiten Stufe entsprechende Theorem (D) des § 20. daselbst nicht mehr umkehrbar. Wenn nämlich $a > b$ ist, so wird sich innerhalb unsres Zahlengebietes nur in seltenen, vereinzelten Fällen $a = b \cdot u$ hiefür schreiben lassen, da u im allgemeinen nicht mehr ganzzahlig ausfällt, und auch der Werth $u = 1$ Ausnahme bildet; u. s. w.

Zufolge dieses Umstandes wurde schon bei dem Beweis der Theoreme (A) bis (C) des § 20. eine ganz andere Methode angewendet, als bei den entsprechenden Theoremen (E), (F), (G) des § 5.; jener Beweis nämlich musste dort nothwendig auf das Distributionsgesetz gegründet werden.

In noch höherem Grade aber wird dieser Umstand eine Verschiedenheit in der Behandlungsweise der nunmehr folgenden Theoreme bedingen, weshalb es denn auch nöthig war, denselben in den Vordergrund zu stellen.

Für die inversen Operationen ergibt sich jetzt — entsprechend den für die directen Operationen in §§ 5., 20. und 27. aufgestellten Theoremen — eine Reihe von Sätzen, die zum Theil (und soweit solche überhaupt zulässig sind) als die „Umkehrungen“ der letzteren betrachtet werden können.

Und zwar gilt auf der ersten Stufe:

(A) *Gleiches, von grösserem subtrahirt, gibt grösseres.*

Wenn $a > b$ und $a' = b'$, so ist $a - a' > b - b'$.

(B) *Grösseres, von gleichem subtrahirt, lässt kleineres zum Rest.*

Wenn $a = b$ und $a' > b'$, so muss $a - a' < b - b'$ sein.

(C) *Grösseres, von kleinerem abgezogen, lässt kleineres,* und umgekehrt: *kleineres, von grösserem subtrahirt, lässt grösseres übrig.*

Wenn $a > b$ und $a' < b'$, so ist auch: $a - a' > b - b'$.

Ein Lehrsatz — der ja immer an eine gewisse „Voraussetzung“ (hypothesis) eine bestimmte „Behauptung“ (thesis) knüpft — wird bekanntlich *Umkehrung* eines andern Satzes genannt, wenn beide sich nur dadurch unterscheiden, dass in denselben die Voraussetzung und die Behauptung ganz oder theilweise ihre Rolle gewechselt zu haben scheinen, d. h. also, wenn die Behauptung (oder ein Theil der Behauptung) des ersten Satzes im zweiten als hypothetische Annahme figurirt, dagegen die Voraussetzung aus dem ersten Satze (oder ein Theil derselben) ihrerseits die Behauptung des zweiten (mit)ausmacht.

Man würde hienach noch „theilweise“ und „volle“ Umkehrungen unterscheiden können, und ist es eine leichte Aufgabe, zu einem gegebenen Lehrsatze alle überhaupt denkbaren Umkehrungen auszusprechen. Nur freilich bleibt es fraglich, ob diese Aussprüche auch immer richtig sind, ob die umgekehrten Sätze auch auf Wahrheit Anspruch machen dürfen.

Von den citirten Sätzen des § 5. z. B. lässt nur der Lehrsatz (E) eine Umkehrung zu, und diese läuft hinaus auf das obige Theorem (A) — (wogegen alle übrigen Umkehrungen sich als unstatthaft erweisen). Kehrt man nämlich jenen Satz § 5. (E) ohne weiteres um, so ergibt sich zunächst die Aussage: dass, wenn $a + a' > b + b'$ und $a' = b'$ ist, dann auch $a > b$ sein müsse.

Nennt man aber $a + a' = a''$ und $b + b' = b''$, also $a = a'' - a'$, $b = b'' - b'$, so ist hiermit ausgesagt: dass, wenn $a'' > b''$ und $a' = b'$ ist, auch $a'' - a' > b'' - b'$ sein müsse, und diese Aussage stimmt gerade mit der des Theorems (A) überein, wenn man die doppelten Accente weglässt.

Um nun die Theoreme (A) bis (C) und damit auch die Berechtigung zu jener Umkehrung zu beweisen, kann man sich auf die Sätze stützen, welche in § 57. sqq. über die gegenseitige Verknüpfung der Operationen erster Stufe aufgestellt wurden, und lautet der

Beweis ad (A). Wenn $a = b + u$ und $a' = b'$, so folgt durch Subtraction und nach dem Theorem (A) des § 58.:

$$a - a' = (b + u) - b' = (b - b') + u,$$

mithin, wie zu zeigen war: $a - a' > b - b'$.

ad (B). Aus $a = b$ und $a' = b' + u$, also $a' - u = b'$ folgt nach dem Theorem (K) von ebendort:

$$b - b' = a - b' = a - (a' - u) = (a - a') + u,$$

also $b - b' > a - a'$.

ad (C). Aus der Annahme $a = b + u$ und $a' + u' = b'$ oder $a' = b' - u'$ folgt in der That nach (K) und (A) ibid.:

$a - a' = (b + u) - (b' - u') = b + u - b' + u' = (b - b') + u + u'$,

oder, wenn von $u + u'$ abstrahirt wird: $a - a' > b - b'$.

Den obigen Theoremen (A) bis (C) entsprechen auf der zweiten Operationsstufe die Sätze:

(D) *Grösseres, durch gleiches dividirt, gibt grösseres.*

Wenn $a > b$ und $a' = b'$ so ist $\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}$.

(E) *Gleiches, durch grösseres dividirt, gibt kleineres.*

Wenn $a = b$ und $a' > b'$, so ist $\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'}$.

(F) *Grösseres, durch kleineres dividirt, gibt grösseres,* m. a. W. die kleinere Zahl (von zweien) ist in der grösseren (von zwei andern Zahlen) öfter enthalten (als die grössere von jenen in der kleineren von diesen).

Wenn $a > b$ und $a' < b'$, so ist $\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}$. —

Obwohl die Gesetze der zweiten Operationsstufe (insoweit sie sich auf Gleichungen beziehen) vollkommen mit denen der dritten übereinstimmen, so ist es — aus dem zu Anfang dieses Paragraphen angeführten Grunde — doch nicht thunlich, den Beweis der Sätze (D) bis (F) analog demjenigen der Sätze (A) bis (C) zu führen. Auf jeder Stufe stehen jedoch noch sehr einfache *indirecte* Beweise zu Gebot, welche auf die entsprechenden Theoreme der §§ 5., 20. und 27. sich stützen.

Beweis ad (D). Wenn $\frac{a}{a'}$ *nicht* $> \frac{b}{b'}$ wäre, so müsste entweder

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{a'} < \frac{b}{b'}$$

sein. Hieraus aber würde durch Multiplication mit der Gleichung $a' = b'$ folgen $a = b$ resp. [nach § 20. (A)]: $a < b$, beidemal im Widerspruch mit der Annahme $a > b$.

Aus dem hiemit etablirten Theorem (D) geht die wichtige Folgerung bezüglich der distributiven Gesetze in § 64. hervor, dass die dort sub (155) 2) und 4) angedeuteten Subtractionen beiderseits immer *gleichzeitig* ausführbar oder unausführbar sein werden. So oft die Subtraction $ac - bc$ ausführbar ist, muss auch die $a - b$ es sein und umgekehrt, desgleichen wenn die eine Subtraction nicht ausführbar ist, kann auch die andere es nicht sein — da ja die Ungleichungen $ac > bc$ und $a > b$ einander gegenseitig bedingen. — Aehnliches könnte nun hinsichtlich der Ausführbarkeit der Divisionen keineswegs von jenen Gleichungen (155) gesagt werden. Es kann z. B. sehr wohl $a + b$ durch c theilbar sein, ohne

dass a und b selbst es sind, und ist die Erklärung für diese Abweichung wieder in der beim gegenwärtigen Paragraphen vorangestellten Bemerkung zu suchen.

Beweis ad (E). Wäre $\frac{a}{a'}$ *nicht* $< \frac{b}{b'}$, so müsste entweder

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad \text{oder} \quad \frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}$$

sein, und hieraus würde durch Multiplication mit der Ungleichung $a' > b'$ beidemal folgen $a > b$, was mit der gemachten Voraussetzung $a = b$ unverträglich ist.

Man könnte auch, auf Grund von (D) diesen Beweis wie folgt führen. Da $a' > b'$, so kann man $a' = b' + u$ setzen, und für a und b, welche einander gleich sind, mag c geschrieben werden. Wird alsdann $\frac{c}{a'} = \frac{c}{b' + u} = p$ und $\frac{c}{b'} = q$ gesetzt, so hat man: $c = pb' + pu = qb'$, also $pb' < qb'$ und deshalb auch $p < q$, d. h. $\frac{c}{a'} < \frac{c}{b'}$, wie zu zeigen.

Beweis ad (F) — am besten durch Zurückführung auf die beiden vorigen Sätze. Aus $a > b$ folgt nach (D): $\frac{a}{a'} > \frac{b}{a'}$; aus $a' < b'$ folgt ferner nach (E): $\frac{b}{a'} > \frac{b}{b'}$, und aus diesen beiden Ergebnissen endlich a fortiori: $\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}$, was zu beweisen war. —

Auf der dritten Stufe haben wir endlich entsprechend die Sätze:

(G) *Grösseres mit gleichem radicirt, sowie grösseres mit gleichem (ausser 1) logarithmirt, gibt grösseres.*

(H) *Gleiches (ausgenommen 1) mit grösserem radicirt, sowie gleiches mit grösserem logarithmirt, gibt kleineres.*

(J) *Grösseres mit kleinerem radicirt oder logarithmirt, gibt grösseres.*

§ 70. Fortsetzung.

Vergleicht man die vorstehenden Sätze mit den entsprechenden der früheren Paragraphen, so ergibt sich folgende Zusammenfassung.

(K) *Die Verknüpfung einer Ungleichung mit einer Gleichung* (durch irgend eine Rechenoperation) *ist immer zulässig. Ist die verknüpfende Operation eine directe, so geht dabei das Gleichheitszeichen im Ungleichheitszeichen auf; ist sie eine inverse, so findet dasselbe statt, wofern nur stets das Ungleichheitszeichen der activen Ungleichung umgekehrt wird.*

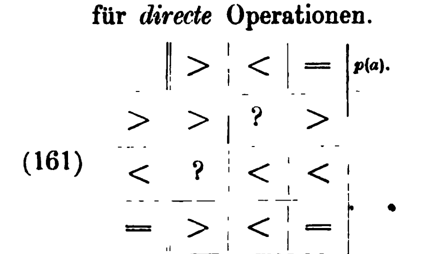
(L) *Ungleichstimmige Ungleichungen können nicht durch eine directe, gleichstimmige nicht durch eine inverse Operation verknüpft werden. Bei Verknüpfung von Ungleichungen durch directe Operationen ist das Ungleichheitszeichen der resultirenden Relation wieder in Uebereinstimmung mit denjenigen der componirenden Ungleichungen; bei Ver-*

knüpfung durch inverse Operationen stimmt es mit demjenigen der passiven resp. dem umgekehrten der activen Relation überein.

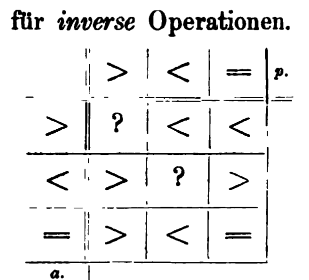
Einen Ueberblick über die zwischen Gleichungen und Ungleichungen zulässigen Verknüpfungen gibt folgende *Tabelle:*

für *directe* Operationen. | für *inverse* Operationen.

(161)



	$>$	$<$	$=$	$p(a)$.
$>$	$>$	?	$>$	
$<$	?	$<$	$<$	
$=$	$>$	$<$	$=$	
$a(p)$.				



	$>$	$<$	$=$	p.
$>$	?	$<$	$<$	
$<$	$>$	?	$>$	
$=$	$>$	$<$	$=$	
a.				

Sucht man in der übergeschriebenen Zeile das Zeichen der passiven und in der vorangeschriebenen Columne dasjenige der activen Relation auf, so ist dazu in der Tafel selbst jeweils das Zeichen der resultirenden Relation zu finden. Das Fragezeichen (?) soll andeuten, dass es unbestimmt ist und allgemein nicht entschieden werden kann, welches von den drei Zeichen $>$, $=$ oder $<$ zutrifft, dass also alle diese Fälle wirklich eintreten können.

(162)

	$(=)$	$\succeq$	$\preceq$	$=$
$(=)$	$(=)$	$(=)$	$(=)$	$(=)$
$\succeq$	$(=)$	$\succeq$	$(=)$	$\succeq$
$\preceq$	$(=)$	$(=)$	$\preceq$	$\preceq$
$=$	$(=)$	$\succeq$	$\preceq$	$=$

Man bemerkt die Analogie der ersten Tafel (161) mit der für die Verknüpfung irgendwelcher Propositionen geltenden, die ich zur Vergleichung hierneben setze. Dieselbe ist leicht nach § 49. zu entwerfen und enthält in Ueber- und Vorschrift wieder die Beziehungszeichen der componirenden Propositionen. Der Correlation entspricht dabei augenscheinlich jenes Fragezeichen, welches nur eine Vergleichbarkeit überhaupt, eine Vergleichbarkeit von nicht weiter bestimmbarem Charakter ausdrückte. [Ganz genau genommen würden den Subsumtionszeichen $\succeq$ und $\preceq$ auch nicht die Ungleichheitszeichen selbst, sondern die Zeichen $\geq$ sowie $\leqq$ analog zu gelten haben.] —

Nach den obigen Theoremen (A), (D), (G), sowie nach § 5. (E), § 20. (A), § 27. (C) und (D) kann man die beiden Seiten einer Ungleichung — unbeschadet deren Richtigkeit durch die nämliche directe oder passiv durch die nämliche inverse Operation ohne weiteres mit irgend einer Zahl verknüpfen.

(M) Auf Grund hievon ist nunmehr zu statuiren, *dass das Transponiren nach den Regeln des* § 35., also das Hinüberschaffen einer Zahl, welche auf einer Seite einer Relation als Operationsglied einer directen oder als actives Operationsglied einer inversen Operation auftritt, nach

ler andern Seite der Relation, *bei Ungleichungen ganz ebenso gestattet st wie bei Gleichungen* — vorausgesetzt nur, dass man sich nicht aus lem Gebiet der natürlichen Zahlen herausbegibt. *Und zwar hat das Ungleichheitszeichen bei diesen Geschäften unverändert zu bleiben.* Aus:

$$x \pm b > a,\ bx > a,\ x : b > a,\quad x^b,\ b^x,\ \sqrt[b]{x},\ \overset{b}{\log} x > a$$

'olgt also beziehungsweise:

$$x > a \mp b,\ x > a : b,\ x > ab,\quad x > \sqrt[b]{a},\ \overset{b}{\log} a,\ a^b,\ b^a,$$

ınd ähnlich für das entgegengesetzte Ungleichheitszeichen.

(N) Es beruht hierauf ferner, dass das in § 40. als *Beweis durch lie Probe der inversen Operationen* bezeichnete Verfahren *auch auf Ungleichungen ohne weiteres anwendbar ist;* d. h. sobald man nachgewiesen hat, dass eine der Ungleichungen: $b + x > b + x_1$, $bx > bx_1$, $x^b > x_1{}^b$, $b^x > b^{x_1}$ (ausser $b = 1$) besteht, ist man berechtigt, auch die Ungleichung:

$$x > x_1$$

als erwiesen anzusehen. —

In den vier noch übrigen Fällen, wo die zu transponirende Zahl passives Operationsglied einer inversen Operation ist, ergibt sich aus den obigen Theoremen (B), (E) und (H) die Vorschrift:

(O) *dass bei Anwendung der Transpositionsregeln des § 36. auf eine Ungleichung das Zeichen dieser letzteren umgekehrt werden muss.* D. h. also, wenn $a - x$, $\frac{a}{x}$, $\sqrt[x]{a}$, $\overset{x}{\log} a > b$, so folgt beziehungsweise $x < a - b$, $\frac{a}{b}$, $\overset{b}{\log} a$, $\sqrt[b]{a}$. —

Durch Anwendung der Methode (M) auf die Sätze (A) des § 5., (D) des § 20., sowie (A) und (B) des § 27. lassen sich, indem z. B. aus $a + b > a$ darnach $a > a - b$ folgt, leicht noch die Sätze ableiten (welche ebensoleicht auch nachträglich nach (N) zu verificiren sind):

(P) *Eine Differenz ist stets kleiner als ihr Minuend.*

Ein Bruch ist kleiner als sein Zähler, oder höchstens gleich demselben — letzteres nur, wenn der Nenner gleich 1 ist.

Eine Wurzel ist kleiner als ihr Radicand (ausser beim Exponenten 1) *desgl. ein Logarithmus stets kleiner als sein Logarithmand.*

Und dies sind factisch die einzigen Beziehungen der Ungleichheit, welche zwischen den Operationsergebnissen inverser Operationen und deren Operationsgliedern allgemein aufgestellt werden können. —

Das Operiren mit Ungleichungen, vorstehend in feste Regeln gekleidet, dürfte hienach jederzeit leicht und mit vollkommener Sicherheit zu vollziehen sein. —

§ 71. Allgemeine Festsetzungen über den Gebrauch der Klammern.

Nachdem wir im vorstehenden die Gesetze kennen gelernt haben, nach denen sich irgend welche drei Zahlen durch zwei Operationen verbinden lassen und darunter namentlich auch mehrere solche Sätze, durch welche sich die Einschliessung als entbehrlich herausstellte, ist es nunmehr am Platze, überhaupt für alle Fälle solche Feststellungen zu treffen, durch die eine möglichste Ersparniss an Klammern herbeigeführt und damit dieses unvermeidliche Uebel auf das nothwendigste Mass eingeschränkt werde.

Zu dem Ende muss wieder an einiges erinnert werden, was schon in der Einleitung No. 22. berührt worden ist.

Durch jede der 7 Operationen werden stets zwei und nur zwei Zahlen miteinander verknüpft, und zwar müssen dieselben jederzeit in unmittelbarer Nachbarschaft bei- oder nebeneinander stehen. Die Natur der die gedachten Zahlen verknüpfenden Operation muss angedeutet sein entweder durch ein zwischen die Zahlen gesetztes Operationszeichen ($+$, $-$, $\times$ oder $\cdot$, : oder $/$, $\sqrt{}$, log), oder durch die gegenseitige Stellung der betreffenden Zahlen namentlich in hypsometrischer Beziehung, d. h. mit Rücksicht auf die Höhe über oder unter dem Niveau der Zeile (wie es der Fall ist bei dem eines Multiplicationszeichens ermangelnden Producte und bei der Potenz), oder endlich durch beides zugleich (wie bei dem Bruch, der Wurzel und dem Logarithmus — bei denen also die Bezeichnung am ausdrucksvollsten ist).

Die beiden Zahlen haben ferner beim (Vorwärts-)Lesen des Ausdrucks eine bestimmte Reihenfolge. Diese Reihenfolge ist durch die Richtung des Lesens entlang der Zeile unzweifelhaft bestimmt, wenn die Operationsglieder keine hypsometrisch unterschiedene Stellung haben; sie ist jedoch auch für die andern Fälle, nämlich bei Bruch und Potenz, bei $\sqrt{}$ und log auf die bekannte Weise festgesetzt.

So, wie für je zwei benachbarte, ergibt sich aber die Reihenfolge auch leicht für drei und mehr durch Operationen miteinander verknüpfte Zahlen.

Wenn nun drei Zahlen miteinander verbunden sind, so kann dies, wie schon früher erwähnt, nur den Sinn haben, dass zuerst zwei derselben mit einander und dann das Ergebniss mit der dritten zu verknüpfen sei, d. h. 3 Zahlen können nicht anders als durch 2 Operationen verknüpft sein. Nach dem obigen ist eine Verknüpfung der ersten mit der dritten Zahl ausgeschlossen, weil beide durch die zweite Zahl getrennt erscheinen, und es bleiben also, wenn ein solcher Ausdruck gedeutet oder ausgerechnet werden soll, nur die beiden Fälle übrig, wo die mittlere Zahl entweder mit der ersten oder mit der

letzten und hierauf das Ergebniss mit der andern von beiden zu verknüpfen ist.

Welcher von diesen beiden Fällen vorliegen soll, muss im allgemeinen durch eine Klammer ausgedrückt werden, welche demnach entweder die beiden ersten oder die beiden letzten Zahlen zu umschliessen hat, und wenn man also einen Ausdruck *erklären* will, zu dessen Verständniss — weil in ihm die Klammern fehlen — eine solche Erklärung nöthig erscheint, so wird man die Klammer jedenfalls auf eine und zwar meistens auf eine bestimmte von diesen beiden Arten zu setzen haben. Dabei ist dann auch wirklich die im innern der Klammer angedeutete Rechnung stets *vor* der andern auszuführt zu denken, durch die sie äusserlich mit der ersten oder dritten Zahl verknüpft erscheint, und der Inhalt der Klammer wird durch ebendiese als eine einzige Zahl charakterisirt, mit welcher natürlich, bevor sie selbst gebildet ist, auch nicht würde operirt werden können.

Die drei gedachten Zahlen lassen, wie sich zeigen wird — in einer bestimmten Ordnung genommen — sich auf nicht weniger als $7 \cdot 2 \cdot 7 = 98$ Arten durch 2 von den 7 Operationen verknüpfen. Es sollen nun zunächst für diese Fälle Regeln aufgestellt werden, nach denen die Klammer, so oft es überhaupt zulässig ist, ungescheut weggelassen werden kann und durch die man umgekehrt jedes Zweifels überhoben wird, auf welche Weise sie da, wo sie fehlt, gesetzt zu denken sei.

Alsdann werde ich zeigen, dass diese Regeln auch zum Verständniss jedes, wenn auch noch so complicirten Ausdruckes hinreichen, und folglich ebenso zur Berechnung desselben, vorausgesetzt nur, dass jede einzelne Elementaroperation für sich numerisch ausgeführt werden kann.

Ueber diese Punkte zu völliger Klarheit zu gelangen, ist eine Sache von der äussersten Wichtigkeit; denn wie vermöchte man z. B. die Sätze über Summen, Producte u. s. w. richtig anzuwenden, so lange man nicht einmal weiss, ob ein zur Umformung nach diesen Regeln vorliegender Ausdruck das eine oder das andere ist — so lange man z. B. sich noch versucht fühlen könnte, Ausdrücke wie: $a + b \times c - c^2$ oder $n - 3 \cdot n - 4^2$ für Producte oder für Potenzen (Quadrate) zu halten? Gerade die richtige Interpretation der Ausdrücke nebst der dazu erforderlichen mentalen Ergänzung fehlender Klammern macht auch erfahrungsmässig dem Anfänger die meiste Schwierigkeit.

Um so mehr ist es zu verwundern, dass dieselbe in den Lehrbüchern so sehr vernachlässigt und es gewissermassen nur dem Takt des einzelnen überlassen wird, sich in der Deutung der Symbole zurecht zu finden.

Eine Klammer kann zunächst weggelassen werden, sobald es einerlei ist, auf welche Weise sie gesetzt wird, also bei solchen Verknüpfungen zweier Operationen, bei denen *Associativität* obwaltet. Dasjenige nämlich, was freisteht, wird man offenbar nicht vorzuschreiben brauchen.

Dies ist nun blos bei folgenden 10 Verknüpfungen der Fall:

$$(\mathrm{A})_1 \qquad (a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c,$$

$$(a+b)-c=a+(b-c)=a+b-c,$$

$$(ab)c= \qquad a(bc)=abc.$$

$$\begin{cases} (ab):c= \qquad a(b:c)=ab:c, \\ * \quad \frac{(ab)}{c}=\frac{ab}{c}=a\left(\frac{b}{c}\right)=a\frac{b}{c}, \end{cases}$$

$$(\mathrm{A})_2 \qquad (\sqrt[a]{b})^c=\overline{\sqrt[a]{b}}^{\,c}=\sqrt[a]{(b^c)}=\sqrt[a]{b^c}=\sqrt[a]{b}^c.$$

Von den in der letzten Zeile ausgedrückten Freiheiten der Darstellung wird *nach* der Erweiterung des Zahlengebietes nur mehr mit grosser Behutsamkeit Anwendung gemacht werden dürfen.

Zu den Ausdrücken in der vorletzten Zeile ist ferner zu bemerken, dass dieselben so wie so schon deutlich genug sind; denn in dem ersteren $\frac{ab}{c}$ kann die Klammer gar nicht anders, als wie folgt: $\frac{(ab)}{c}$, und bei dem letzteren $a\frac{b}{c}$ kann sie nicht anders wie in $a\left(\frac{b}{c}\right)$ gedacht werden, indem bei

$$\frac{a(b}{c)} \quad \text{und bei} \quad (a\frac{b)}{c}$$

gegen die Vorschrift verstossen wäre, dass die beiden Haken oder Hälften einer Klammer stets auf dem gleichen Niveau — in einer Zeile — zu stehen haben.

Aus demselben Grunde erscheint jede Einklammerung sogleich überflüssig bei sehr zahlreichen, nämlich bei nicht weniger als 59 Verknüpfungen, welche nachstehend dadurch hervorgehoben werden sollen, dass denselben ein * beigesetzt wird. Darunter sind 23 auf den Bruchstrich bezügliche Fälle, und zwar würden es deren 24 sein, indem der einzige, von $\left(\frac{a}{b}\right)^c$ bei $(\mathrm{C})_6$ gebildete Ausnahmefall auch noch wegfiele, wenn nur immer die *Länge* des Bruchstriches genau genug abgemessen würde. 24 von den gedachten Fällen haben auf das Wurzelzeichen Bezug (worunter 4 auf Bruchstrich und Wurzelzeichen zugleich). Ungerechnet sind dagegen die 4 Fälle bei $(\mathrm{C})_4$ und $(\mathrm{C})_7$, wo durch den *verlängerten* Wurzelstrich auch noch eine Klammer gespart wird. Bei verschiedenen Ausdrücken, so namentlich bei den letzten von $(\mathrm{B})_1$, ist übrigens zu bemerken, dass die Klammer nur weggelassen werden darf, insoferne die *Zeile* markirt ist, nicht aber bei einem für sich stehenden Ausdruck — es sei denn, dass der eine Bruchstrich dadurch, dass man ihm grössere Dimensionen verleiht, als der dominirende oder *Hauptbruchstrich* vor dem andern ausgezeichnet werde, u. s. w. —

Abgesehen von diesen (zum Ueberfluss schon durch sich selbst erkennbaren) Fällen, machen wir die Klammer, die ja für jede be-

stimmte Verknüpfung von zwei in bestimmter Folge angeschriebenen Operationen nur zur Unterscheidung der zwei denkbaren Fälle dienen sollte, immer wenigstens für einen dieser Fälle entbehrlich.

Und zwar geschieht dies, indem wir zwei allgemeine Festsetzungen treffen.

§ 72. Erste Convention.

Die erste Uebereinkunft kann sogleich für beliebig viele Zahlen ausgesprochen werden, und lautet (vorbehaltlich einer am Schlusse zu erwähnenden Ausnahme) wie folgt:

Kommen (zwei oder mehrere) *Operationen derselben Stufe zusammen, ohne dass durch Klammern ihre Anordnung* (oder die Art der Zusammenfassung der Operationsglieder) *vorgeschrieben wäre, so hat man sich die sämmtlichen Zahlen in ihrer angegebenen Reihenfolge fortschreitend durch die betreffenden Operationen verknüpft zu denken,* d. h. erst die erste Zahl mit der zweiten, dann das Ergebniss mit der dritten und das so entstehende Resultat mit der vierten Zahl und so fort. Der Gang der Rechnung oder die Ordnung, in welcher die Operationen auszuführen sind, stimmt alsdann genau überein mit derjenigen Reihenfolge, in welcher die Zeichen dieser Operationen, wie man liest, von links nach rechts gesprochen werden.

Darnach bedeutet zum Beispiel:

$$a + b - c + d - e - f = ([\{(a + b) - c\} + d] - e) - f,$$

$$a \cdot b : c \cdot d : e : f = ([\{(ab) : c\} d] : e) : f = \frac{\left(\frac{\left[\left\{\frac{(ab)}{c}\right\} d\right]}{e}\right)}{f} = \frac{\frac{\frac{ab}{c} d}{e}}{f}.$$

Beiläufig gesagt wird ein Ausdruck, der so durch die Operationen erster Stufe aus gegebenen Zahlen zusammengesetzt erscheint, wie derjenige in der ersten Zeile, ein *Aggregat* genannt (von grex, die Heerde, ad-gregare, zusammenschaaren), und die gegebenen Zahlen heissen die *Glieder* desselben (Aggreganten). Ein Aggregat ist also das Ergebniss einer fortschreitenden Verknüpfung von Zahlen durch lauter Operationen erster Stufe.

Für einen ebenso durch Operationen *zweiter* Stufe zusammengesetzten Ausdruck, wie der obige in der nächstfolgenden Zeile, ist kein Name allgemein in Gebrauch gekommen. Zwar hat J. T. H. Müller (l. c.) dafür den Namen „Compositum" vorgeschlagen und angewendet; die gegebenen Zahlen, mit welchen also entweder eine Multiplication oder eine Division vorgenommen wird, nennt er die „Componenten" des Compositums. In der That jedoch möchte die Creirung neuer Namen hier leicht zu vermeiden sein, indem man ja nur von *Ausdrücken* (Gebilden, Aggregaten) *zweiter Stufe* und deren Operationsgliedern zu reden braucht.

Ehe die obige Regel auch in ihrer Anwendung auf die dritte Stufe in Betracht gezogen wird, will ich sie für den Fall von *drei* Zahlen üb näher in's Auge fassen. Hier lehrt sie also, dass diejenige Klammer, we zwei ersten Zahlen des dreitheiligen Ausdruckes umschliesst, weggelassen kann, und dass umgekehrt, wo die Klammer fehlt, sie so und nicht ar denken sei.

Ich werde nun immer die zwei mittelst der Klammer von ei zu unterscheidenden Ausdrücke (durch ein Komma getrennt) Zeile nebeneinander schreiben, und zwar den einen, bei dem die mer nicht weggelassen werden darf *einfach;* den andern *doppelt,* ich ihn dem nämlichen von der Klammer befreiten Ausdruck stelle. Hiemit ist alsdann der Gebrauch der Klammer bei den genden Verknüpfungen geregelt.

$(B)_1$

$$(a-b)+c=a-b+c, \qquad a-(b+c)$$
$$(a-b)-c=a-b-c, \qquad a-(b-c)$$
$$\left\{\begin{array}{ll} (a:b)\cdot c=a:bc, & a:(b\cdot c) \\ * \ \left(\frac{a}{b}\right)\cdot c=\frac{a}{b}c, & * \ \frac{a}{(b\cdot c)}=\frac{a}{bc} \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{ll} (a:b):c=a:b:c, & a:(b:c) \\ * \ \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}=\frac{\frac{a}{b}}{c}, & * \ \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}=\frac{a}{\frac{b}{c}} \end{array}\right.$$

$(B)_2$

$$* \ \sqrt[(a^b)]{c}=\sqrt[a^b]{c}, \qquad * \ a^{\left(\sqrt[b]{c}\right)}=a^{\sqrt[b]{c}}$$
$$* \ \overset{(a^b)}{\log} c=\overset{a^b}{\log} c, \qquad * \ a^{\left(\overset{b}{\log} c\right)}=a^{\overset{b}{\log} c}.$$
$$(\overset{a}{\log} b)^c=\overset{a}{\log} b^c, \qquad \overset{a}{\log}\left(b^c\right)$$

$(B)_3$

$$* \ \sqrt[\left(\sqrt[a]{b}\right)]{c}=\sqrt[\sqrt[a]{b}]{c}, \qquad * \ \sqrt[a]{\left(\sqrt[b]{c}\right)}=\sqrt[a]{\sqrt[b]{c}}$$
$$* \ \overset{\left(\sqrt[a]{b}\right)}{\log} c=\overset{\sqrt[a]{b}}{\log} c, \qquad * \ \sqrt[a]{\left(\overset{b}{\log} c\right)}=\sqrt[a]{\overset{b}{\log} c}$$
$$* \ \sqrt[\left(\overset{a}{\log} b\right)]{c}=\sqrt[\overset{a}{\log} b]{c}, \qquad * \ \overset{a}{\log}\left(\sqrt[b]{c}\right)=\overset{a}{\log}\sqrt[b]{c}$$
$$* \ \overset{\left(\overset{a}{\log} b\right)}{\log} c=\overset{\overset{a}{\log} b}{\log} c, \qquad * \ \overset{a}{\log}\left(\overset{b}{\log} c\right)=\overset{a}{\log}\overset{b}{\log} c.$$

Vorstehend sind erst 22 von den in Aussicht gestellten 2 knüpfungen erledigt, und sind wir daher noch 2, ursprünglich z gehörige, anzugeben schuldig. Für diese aber statuiren wir aus lich eine *Ausnahme,* nämlich die folgende:

$(B)_4$ $\qquad (a^b)^c, \qquad a^{(b^c)}=a^{b^c},$

indem nach der vorangestellten Regel gerade umgekehrt im ersten Falle die Klammer wegzulassen, im zweiten aber beizubehalten wäre. Es geschieht dies aus dem Beweggrunde, weil der erstere Ausdruck ohnehin nach der Regel für das Potenziren einer Potenz: $(a^b)^c = a^{bc}$ leicht so umgeformt werden kann, dass keine Klammer dabei nöthig ist, während auf der andern Seite der zweite Ausdruck nicht reducirt und deshalb auch, wo er auftritt, nicht umgangen werden kann [cf. (46) und (47)].

Ganz ähnlich ist auch der Beweggrund beschaffen für die nun folgende zweite Uebereinkunft. —

§ 73. Zweite Convention.

Kommen Operationen verschiedener Stufe ohne Klammer zusammen, so ist stets diejenige Rechnungsart zuerst vorzunehmen, welche zur höheren Stufe gehört.

Hierdurch ist die folgende ausnahmslose Zusammenstellung von den 64 allein noch möglichen Verknüpfungen gerechtfertigt.

$(C)_1$

$$(a+b)\cdot c\,, \qquad a+(b\cdot c) = a+bc$$
$$(a\cdot b)+c = ab+c\,, \qquad a\cdot(b+c)$$
$$\left\{\begin{array}{ll} (a+b):c\,, & a+(b:c) = a+b:c \\ * \ \frac{(a+b)}{c} = \frac{a+b}{c}\,, & * \ a+\left(\frac{b}{c}\right) = a+\frac{b}{c} \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{ll} (a:b)+c = a:b+c\,, & a:(b+c) \\ * \ \left(\frac{a}{b}\right)+c = \frac{a}{b}+c\,, & * \ \frac{a}{(b+c)} = \frac{a}{b+c} \end{array}\right.$$

$(C)_2$

$$(a-b)\cdot c\,, \qquad a-(b\cdot c) = a-bc$$
$$(a\cdot b)-c = ab-c\,, \qquad a\cdot(b-c)$$
$$\left\{\begin{array}{ll} (a-b):c\,, & a-(b:c) = a-b:c \\ * \ \frac{(a-b)}{c} = \frac{a-b}{c}\,, & * \ a-\left(\frac{b}{c}\right) = a-\frac{b}{c} \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{ll} (a:b)-c = a:b-c\,, & a:(b-c) \\ * \ \left(\frac{a}{b}\right)-c = \frac{a}{b}-c\,, & * \ \frac{a}{(b-c)} = \frac{a}{b-c} \end{array}\right.$$

$(C)_3$

$$(a+b)^c\,, \qquad a+(b^c) = a+b^c$$
$$* \ (a^b)+c = a^b+c\,, \qquad * \ a^{(b+c)} = a^{b+c}$$
$$(a-b)^c\,, \qquad a-(b^c) = a-b^c$$
$$* \ (a^b)-c = a^b-c\,, \qquad * \ a^{(b-c)} = a^{b-c}$$

$(C)_4$

*	$\sqrt[(a+b)]{c} = \sqrt[a+b]{c}$,	*	$a + (\sqrt[b]{c}) = a + \sqrt[b]{c}$
	$(\sqrt[a]{b}) + c = \sqrt[a]{b} + c$,		$\sqrt[a]{\vphantom{b}}(b + c) = \sqrt[a]{b + c}$
*	$\sqrt[(a-b)]{c} = \sqrt[a-b]{c}$,	*	$a - (\sqrt[b]{c}) = a - \sqrt[b]{c}$
	$(\sqrt[a]{b}) - c = \sqrt[a]{b} - c$,		$\sqrt[a]{b} - c = \sqrt[a]{b - c}$

$(C)_5$

*	$\overset{(a+b)}{\log} c = \overset{a+b}{\log} c$,	*	$a + (\overset{b}{\log} c) = a + \overset{b}{\log} c$
	$(\overset{a}{\log} b) + c = \overset{a}{\log} b + c$,		$\overset{a}{\log} (b + c)$
*	$\overset{(a-b)}{\log} c = \overset{a-b}{\log} c$,	*	$a - (\overset{b}{\log} c) = a - \overset{b}{\log} c$
	$(\overset{a}{\log} b) - c = \overset{a}{\log} b - c$,		$\overset{a}{\log} (b - c)$

$(C)_6$

	$(a \cdot b)^c$,		$a \cdot (b^c) = a b^c$
*	$(a^b) \cdot c = a^b c$,	*	$a^{(b \cdot c)} = a^{b c}$
	$(a : b)^c$,		$a : (b^c) = a : b^c$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^c$,	*	$\frac{a}{(b^c)} = \frac{a}{b^c}$
*	$(a^b) : c = a^b : c$,	*	$a^{(b : c)} = a^{b : c}$
*	$\frac{(a^b)}{c} = \frac{a^b}{c}$,	*	$a^{\left(\frac{b}{c}\right)} = a^{\frac{b}{c}}$

$(C)_7$

*	$\sqrt[(a \cdot b)]{c} = \sqrt[ab]{c}$,	*	$a (\sqrt[b]{c}) = a \sqrt[b]{c}$
	$(\sqrt[a]{b}) . c = \sqrt[a]{b} c$,		$\sqrt[a]{\vphantom{b}}(b . c) = \sqrt[a]{b c}$
*	$\sqrt[(a : b)]{c} = \sqrt[a : b]{c}$,	*	$a : (\sqrt[b]{c}) = a : \sqrt[b]{c}$
*	$\sqrt[\left(\frac{a}{b}\right)]{c} = \sqrt[\frac{a}{b}]{c}$,	*	$\frac{a}{(\sqrt[b]{c})} = \frac{a}{\sqrt[b]{c}}$
	$(\sqrt[a]{b}) : c = \sqrt[a]{b} : c$,		$\sqrt[a]{\vphantom{b}}(b : c) = \sqrt[a]{b : c}$
*	$\frac{(\sqrt[a]{b})}{c} = \frac{\sqrt[a]{b}}{c}$,	*	$\sqrt[a]{\left(\frac{b}{c}\right)} = \sqrt[a]{\frac{b}{c}}$

$(C)_8$

*	$\overset{(a . b)}{\log} c = \overset{a b}{\log} c$,	*	$a (\overset{b}{\log} c) = a \overset{b}{\log} c$
	$(\overset{a}{\log} b) \cdot c = \overset{a}{\log} b c$,		$\overset{a}{\log} (b \cdot c)$
*	$\overset{(a : b)}{\log} c = \overset{a : b}{\log} c$,	*	$a : (\overset{b}{\log} c) = a : \overset{b}{\log} c$
*	$\overset{\left(\frac{a}{b}\right)}{\log} c = \overset{\frac{a}{b}}{\log} c$,	*	$\frac{a}{(\overset{b}{\log} c)} = \frac{a}{\overset{b}{\log} c}$
	$(\overset{a}{\log} b) : c = \overset{a}{\log} b : c$,		$\overset{a}{\log} (b : c)$
*	$\frac{(\overset{a}{\log} b)}{c} = \frac{\overset{a}{\log} b}{c}$,	*	$\overset{a}{\log} \left(\frac{b}{c}\right) = \overset{a}{\log} \frac{b}{c}$.

Macht man demnach von dem Bruchstrich und dem verlängerten Wurzelstrich den ausgedehntesten Gebrauch, so braucht eine Klammer nur mehr in folgenden 15 Fällen gesetzt zu werden:

$$a-(b\pm c),\quad (a\pm b)c,\quad a(b\pm c),\quad (a\pm b)^c,\quad \overset{a}{\log}(b\pm c),$$
$$(ab)^c,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^c,\quad (a^b)^c,\quad \overset{a}{\log}(bc),\quad \overset{a}{\log}(b^c),$$

d. h. beim Subtrahiren, Multipliciren, Potenziren und Logarithmiren eines Aggregates (erster Stufe), desgleichen beim Potenziren und Logarithmiren eines Ausdrucks zweiter Stufe und einer Potenz (mit Ausnahme noch des Logarithmirens von Brüchen).

Sämmtliche Festsetzungen der vorstehenden Paragraphen befinden sich augenscheinlich im Einklang mit den früher gelegentlich getroffenen besondern Bestimmungen, cf. § 16., 24. und 59.

§ 74. Erkennung von Ausdrücken und Operationsgliedern.

Um jetzt die Natur irgend eines aus vielen Zahlen zusammengesetzten, wenn auch noch so verwickelten Ausdruckes zu erkennen, achte man vor allem darauf, ob dieser Ausdruck frei für sich steht, oder ob derselbe mit andern Zahlen verknüpft und vielleicht selbst von Klammern eingeschlossen erscheint. Im letzteren Falle wird man von diesen Zahlen und Klammern natürlich zu abstrahiren haben und sich überhaupt alles ausserhalb des zu beurtheilenden Ausdruckes befindliche hinwegdenken.

[Sollte über die Begrenzung des letzteren Ausdruckes selbst ein Zweifel obwalten, so wird erst der umfassendere Ausdruck zu untersuchen sein, von dem jener ein Theil ist.] Alsdann verfahre man folgendermassen:

1⁰) Man lasse zuerst der Zeile entlang den Blick über den Ausdruck hingleiten und sehe zu, ob sich nicht *auf* dieser Zeile $+$ oder $-$ Zeichen befinden, welche *frei*, d. h. weder dicht, noch mittelbar aus der Ferne, von einer (dem Ausdruck angehörigen) Klammer umschlossen sind. [NB. der Zähler eines Bruches gilt als *über* der Zeile stehend.]

Ist solches der Fall, so ist der ganze Ausdruck ein *Aggregat*, und zwar je nach dem *letzten* dieser Zeichen entweder eine *Summe* oder eine *Differenz*. Die *Glieder* des Aggregates sind alsdann eben die durch die genannten $\pm$ Zeichen getrennten Theile des Ausdruckes, welche demnach, wo es etwa erforderlich sein möchte, auch eingeklammert werden dürften. Diese Glieder müssen nun, wenn man den Ausdruck vollends verstehen will, nach denselben nachstehend anzugebenden Principien weiter untersucht werden, nach denen der ganze Aus-

druck es noch werden muss in dem andern Falle, wo er kein Aggregat ist.

2°) Wenn obiges nicht der Fall ist, so erscheint der ganze Ausdruck als ein *Monom;* er ist dann in letzter Instanz durch Rechnungen höherer Stufe gebildet.

Alsdann muss ebenso untersucht werden, ob sich nicht auf der Zeile Zeichen wie $\times$, $\cdot$ oder : finden, welche, ohne von Klammern mitumschlossen zu sein, verschiedentliche Bestandtheile des Ausdruckes miteinander verknüpfen. Wenn dieses stattfindet, so ist der Ausdruck ein Ergebniss von Operationen *zweiter Stufe* und zwar je nach der Natur des letzten von diesen Zeichen entweder ein *Product* oder ein *Quotient.*

Wenn aber dergleichen Zeichen nicht bemerkbar sind, so darf noch nicht das Gegentheil behauptet werden. Der Ausdruck ist nämlich auch noch ein *Product*, wenn sich an ihm Zahlzeichen als Bestandtheile erkennen lassen, welche *ohne* Verbindungszeichen nebeneinander stehen und wiederum frei, d. h. von keiner gemeinschaftlichen Klammer umschlossen sind [vorausgesetzt nur, dass ohne weiteres nebeneinanderstehende *Ziffern* jeweils zum Namen einer einzigen dekadischen Zahl vereinigt gelesen werden und dass man auch die späterhin noch einzuführenden fälschlich sogenannten „gemischten Brüche" wie $2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4}$ — welche eigentlich Summen sind — jeweils als einfache Zahlzeichen betrachtet]. Desgleichen ist der Ausdruck ein *Bruch*, wenn derselbe längs der ganzen Zeile durch einen freien Bruchstrich in zwei Theile geschieden wird.

Die also geschiedenen Theile sind stets die *Operationsglieder* des Ausdrucks; sie sind eventuell eingeklammert zu denken, und gesondert nach allen unsern Kennzeichen weiter zu untersuchen.

3°) Wenn obiges nicht der Fall ist, so ist der Ausdruck letztinstanzlich durch eine Operation der *dritten Stufe* entstanden und müssen sich — woferne derselbe nicht defect sein soll — ausser den auf der Zeile miteinander verknüpften Zahlen oder Ausdrücken auch noch solche entdecken lassen, welche in schräg erhöhter Stellung darüber geschrieben sind.

Man wird nun das letzte auf der Zeile selbst befindliche Zeichen aufsuchen, welches entweder ein einfaches Zahlzeichen (Buchstabe oder numerische Zahl) oder ein Bruchstrich (Wurzelstrich) oder ein Schlusshaken von einer Klammer ist. Alsdann findet einer von zwei Fällen statt:

Entweder, man trifft *rechts oberhalb* dieses letzten Zeichens einmal auf weitere ganz in erhöhter Stellung geschriebene Zahlzeichen oder Ausdrücke, welche sich nicht mit ihm zusammen in einer Parenthese eingeschlossen befinden, oder dieses ist niemals der Fall.

Falls ersteres stattfindet, so liegt *unbedingt* (d. h. auch dann, wenn zu Anfang des Ausdruckes ein $\sqrt{\ }$ oder log-Zeichen steht) eine *Potenz* vor; *Exponent* derselben ist der ganze rechts übergeschriebene und nicht mit eingeklammerte Ausdruck, soweit als möglich herabgehend genommen; *Basis* der Potenz ist der ganze vorangehende Ausdruck, bis zu dem Exponenten hin gelesen.

Im zweiten Falle hat man entweder eine *Wurzel* oder einen *Logarithmus,* jenachdem am Anfange des Ausdruckes ein $\sqrt{\ }$ oder ein log-Zeichen vorangeschrieben ist; *actives Operationsglied* ist jedesmal der ganze über dieses Zeichen gesetzte Ausdruck; *passives Operationsglied* ist, was hinter diesem Zeichen steht. —

Falls diese Kennzeichen zur Beurtheilung eines Ausdruckes nicht hinreichen sollten, so muss derselbe entweder fehlerhaft gebildet sein, oder es müssen zu seiner Bildung auch höhere als nur die elementaren Operationen in Verwendung gekommen sein.

Die vorstehenden Regeln ergeben sich leicht als nothwendige Folgerungen aus den in den Paragraphen 72. und 73. vereinbarten Conventionen.

Da z. B., bei Abwesenheit von Klammern, die Operationen höherer Stufe *vor* den andern auszuführen sind, so werden die der niedersten Stufe *zuletzt* auszuführen und also allein für den Charakter des ganzen Ausdrucks massgebend sein, u. s. w. Sind jedoch Klammern vorhanden, so muss die im innern derselben angedeutete Operation zuerst und folglich ebenfalls die andre Operation zuletzt ausgeführt werden (diejenige nämlich, deren Zeichen *frei* ausserhalb der Klammer steht, resp. in Gedanken daselbst zu ergänzen wäre), u. s. w.

§ 75. **Verbindung von mehr als drei Zahlen miteinander. Vier Zahlen.**

Die bisherigen Formeln bezogen sich alle nur auf die Verbindung von *drei* Zahlen mittelst zweier von den 7 Operationen, und zwar wurde gezeigt, in welchen Fällen sich statt der gegebenen Operationen andere setzen lassen, die in bestimmter Ordnung an den drei Zahlen ausgeführt, zum nämlichen Resultat führen. Da die Rechenarbeit jedesmal eine andere wird, so gelingt es oft, durch die Anwendung jener Sätze eine sehr beträchtliche Mühe zu sparen, und es erscheint eine solche Ersparniss, wenn sie auch nicht immer eine unmittelbare ist, doch als der Endzweck der sämmtlichen Sätze.

Was nun die Verknüpfungsgesetze von *mehr* als drei Zahlen betrifft, so möchte man eine eingehende Theorie derselben zunächst für entbehrlich halten. Denn der Rechner wird doch nie mehr als eine

einzige Operation auf einmal auszuführen in der Lage sein, und alle Rechenaufgaben müssen demnach durch eine einfache Kette von aufeinanderfolgenden Einzeloperationen bewältigt werden. Sobald man aber im Stande ist, nur je *zwei successive* Operationen auf alle möglichen Arten durch bessere — die ihnen äquivalent sind — zu ersetzen, wird man dies ebenso auch bei einer Folge von beliebig vielen Operationen nach und nach hinbringen können.

Ausserdem bemerkt man bald, dass einer solchen Theorie sich grosse Schwierigkeiten entgegenstellen würden, vor allem dadurch, dass die Gültigkeitsbedingungen der Formeln immer schwerer zu übersehen sind. Immer lästiger werden die Beschränkungen, welche dem Rechner auferlegt sind durch die Forderung, dass die inversen Operationen jederzeit ausführbar sein sollen, und erst durch passende Erweiterung des Zahlengebietes wird man überhaupt in den Stand gelangen, über diese Hindernisse bequem hinwegzukommen.

Aus diesen Gründen muss hier jedenfalls auf Vollständigkeit völlig Verzicht geleistet werden. Doch empfiehlt es sich immerhin, noch das folgende anzuführen.

Zunächst sind für 4 Zahlen besonders hervorzuheben die Formeln:

$$(163)\quad \begin{cases} (a+b)+(c+d)=a+b+c+d, \\ (a+b)+(c-d)=(a+b+c)-d, \\ (a-b)+(c+d)=(a+c+d)-b, \\ (a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d), \end{cases}$$

$$(164)\quad \begin{cases} (a+b)-(c+d) \quad \text{ist sich selbst gleich}, \\ (a+b)-(c-d)=(a+b+d)-c, \\ (a-b)-(c+d)=a-(b+c+d), \\ (a-b)-(c-d)=(a+d)-(b+c), \end{cases}$$

welche lehren, wie bei Summen und Differenzen die Addition oder Subtraction am besten zu vollziehen ist. Die hier angegebene Darstellung des Resultates in Form einer einfachen Summe oder aber einer Differenz von Summen, resp. Monomien, empfiehlt sich in der That im allgemeinen als die beste Form zur Ausrechnung der betreffenden Ausdrücke — zum Theil schon deshalb, weil dabei alle Subtractionen, wo deren mehrere vorkommen, auf eine einzige zurückgeführt werden (die sich überdies auf zuletzt verspart findet) — hauptsächlich aber aus dem hier noch ferner liegenden und erst später massgebend werdenden Grunde: weil die Ausdrücke rechterhand innerhalb eines umfassenderen Bereiches noch einen Sinn haben, als die entsprechenden zur linken. Die rechts angedeutete Subtraction nämlich ist noch

in manchen Fällen ausführbar, wo es die links angedeuteten Subtractionen nicht mehr alle sind — dagegen trifft dies niemals umgekehrt zu.

Weiter hat man für die Verknüpfung binomischer Aggregate durch Multiplication:

$$(165)\quad \begin{cases} (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd, \\ (a+b)(c-d) = ac-ad+bc-bd = (ac+bc)-(ad+bd), \\ (a-b)(c+d) = ac+ad-bc-bd = (ac+ad)-(bc+bd), \\ (a-b)(c-d) = ac-ad-bc+bd = (ac+bd)-(ad+bc), \end{cases}$$

welche Sätze ebenso wie die vorhergehenden leicht zu beweisen sind, jedoch ziemlich umständlich einzeln in Worte zu kleiden wären. Bequem zusammenfassen und überdies verallgemeinern lassen sich diese Sätze erst dann, wenn man die Lehre von den negativen Zahlen durchgenommen hat.

Beispielsweise hat man als Beweis der letzten Gleichung (163) zuerst nach dem Theorem (B) des § 58.:

$$(a-b)+(c-d) = \{(a-b)+c\} - d,$$

sodann nach dem Theorem (C) ibid.: $= \{(a+c) - b\} - d$, und endlich nach (N), § 59.: $= (a+c) - (b+d)$, wie zu zeigen war.

In Bezug auf den Beweis der Formeln (165) ist § 18. zu vergleichen. Erwähnung verdienen noch folgende specielle Fälle dieser letzteren, auf die man durch die Annahme $c = a$, $d = b$ geführt wird. Zuerst der Satz:

$$(166)\qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

d. h. in Worten: *Das Quadrat eines Binoms ist gleich dem Quadrat des ersten Gliedes plus dem doppelten Product aus dem ersten Glied in das zweite plus dem Quadrat des zweiten Gliedes*, sowie der entsprechende Satz für das Quadrat einer Differenz:

$$(167)\qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Endlich noch das äusserst nützliche Theorem:

$$(168)\qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

welches, vorwärts gelesen, lautet:

Das Product aus der Summe in die Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz der Quadrate dieser Zahlen,

und rückwärts gelesen:

Die Differenz zweier Quadrate ist gleich dem Product aus der Summe in die Differenz ihrer Grundzahlen.

Während sich durch das gewöhnliche Ausmultipliciren nach Vorschrift der Formeln (165) zunächst jedesmal 4 Glieder oder Partialproducte ergeben müssen, erspart man sich durch das Memoriren dieser drei Sätze je das doppelte Anschreiben dieser drei mittleren Partial-

producte, die bei den zwei ersten Sätzen sich zusammenziehen, bei dem letzten sich weg heben. Diese Ersparniss ist namentlich willkommen, wenn die gedachten Partialproducte — wie es häufig vorkommt — recht complicirten Ausdruckes sind. Aber selbst wenn dieses nicht der Fall ist, wird die Ersparniss — wie klein sie auch im einzelnen Falle sein mag — doch werthvoll durch die ungemeine Häufigkeit der Gelegenheiten, woselbst man sie anbringen kann.

Anstatt durch Ausmultipliciren die Theoreme (166) bis (168) nachzuweisen, kann man auch umgekehrt durch Vereinigen oder Ausscheiden die rechte Seite derselben in die linke transformiren. Zu dem Ende muss man nur bei den zwei ersten Theoremen das Glied $2ab$ durch $ab + ba$ ersetzen und beim dritten Theorem den Kunstgriff gebrauchen, zwischen a^2 und $-b^2$ die sich wegbebenden Terme $+ab$ und $-ab$ einzuschalten.

Noch gelten ferner auch im Gebiet der natürlichen Zahlen die Formeln:

$$(169)\quad \begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \\ \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}, \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \\ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \end{cases}$$

welche jedoch erst in der Theorie der gebrochenen Zahlen Wichtigkeit erlangen. —

Da endlich bei der dritten Operationsstufe auf den Verknüpfungsgesetzen von 4 (bis 5) Zahlen die ganze Theorie der Wurzeln und Bruchpotenzen u. s. w. wesentlich beruht, und wir daher ohnehin Ursache haben werden, auf sie zurückzukommen, so gehe ich auf die gedachten Verknüpfungsgesetze an dieser Stelle nicht weiter ein. —

§ 76. Beliebig viele Zahlen.

Alle Sätze über Summen und Producte, welche bisher eigentlich nur für *Binome* und Producte aus *zwei* Factoren aufgestellt und bewiesen worden sind, lassen sich ohne weiteres auch auf Polynome und Producte aus beliebig vielen Factoren ausdehnen. Sie sind deshalb auch sogleich *allgemein* ausgesprochen worden — oder wenigstens so, dass diese Auffassung auch zulässig erscheint — was dadurch hingebracht wurde, dass wir absichtlich die Erwähnung der Gliederzahl unterliessen.

Die Berechtigung hiezu beruht darauf, dass jede Summe als eine zweigliedrige angesehen werden kann, indem man sich alle Glieder

bis auf eines zu einer besondern Summe zusammengefasst denkt, und dass es sich ähnlich auch bei einem Product verhält.

Die gedachten Sätze waren nämlich von dreierlei Art.

Entweder sie lehrten *erstens*, wie eine an einer Summe, resp. einem Product vorzunehmende Operation auch auf *eines* von deren Operationsgliedern übertragen werden kann ... Für diese Sätze, welche etwas von dem associativen Charakter haben, wird die Ausdehnbarkeit unmittelbar evident, wenn man sich alle übrigen Operationsglieder zu einem einzigen zweiten Operationsgliede zusammengefasst denkt (was nach dem Associationsgesetze eventuell in Verbindung mit dem Commutationsgesetze geschehen kann). Nachdem man hierdurch das Recht erlangt hat, die Operation an jenem ersten Operationsgliede vorzunehmen, denkt man sich schliesslich die übrigen Glieder wieder an ihre alten Plätze zurückgebracht.

... Oder aber, diese Sätze zeigten, wie eine gewisse mit oder an einer Summe, resp. einem Product, vorzunehmende Operation auch (als ebensolche) auf *jedes* einzelne Operationsglied des genannten Ausdruckes sich übertragen lässt. Die Uebertragung selbst geschieht dann aber *zweitens* entweder in *verschiedener* Weise, indem mit den Operationsgliedern Operationen der betreffenden Art fortschreitend auszuführen, diese Glieder also mit immer andern Zahlwerthen dabei zu verknüpfen sind — und haben wir alsdann Sätze, die ebenfalls als associativisch angesehen werden können; oder *drittens* die Uebertragung geschieht bei allen Operationsgliedern in *gleicher* Weise durch Verknüpfung derselben nicht nur mittelst der nämlichen Rechnungsart, sondern auch mit der gleichen Zahl, wonach jedoch die einzelnen Operationsresultate wiederum zu einem Ausdruck der einen oder der andern Art vereinigt werden müssen — und die desfallsigen Sätze sind dann von distributivem Charakter.

Ein derartiger Satz aber muss — auf Grund des Associationsgesetzes allein — auch für einen Ausdruck von beliebig vielen Operationsgliedern gelten, sobald er für einen aus zwei Operationsgliedern bestehenden derartigen Ausdruck erkannt ist, indem alsdann ähnlich wie in § 17. der Schluss von der Gliederzahl n auf die $n+1$ anwendbar ist. Gilt der Satz für n Operationsglieder und tritt noch ein weiteres $n+1^{\text{tes}}$ Operationsglied hinzu, so kann, indem man sich die n vorhergehenden zu einem einzigen Operationsgliede (associativ) vereinigt denkt, der für zwei Glieder etablirte Satz angewendet werden. Wendet man dann auf das erste dieser beiden Operationsglieder, welches aus den n ursprünglichen zusammengesetzt ist, auch den für diese vorausgesetzten Satz an, wodurch dasselbe in n neue Operationsglieder zerfällt wird, und lässt nöthigenfalls die vorhin eingeführte und auf

die letzteren mit übergegangene Association wieder fallen, so hat man offenbar denselben Satz für die $n+1$ Operationsglieder nachgewiesen.

Und zwar ist diese Ueberlegung zulässig, mag die an den einzelnen Operationsgliedern auszuführende Operation nur relativ bestimmt sein, wie bei der zweiten Art von Sätzen, oder mag sie absolut bestimmt und auch das andere Verknüpfungsglied derselben ein vorgegebenes sein, wie bei der dritten Art, den distributiven Sätzen.

In der That ist z. B. ganz ähnlich, wie diese Distributionsgesetze in § 17, auch der nicht distributive Satz:

$$a-(b_1+b_2+\ldots+b_n)=a-b_1-b_2-\ldots-b_n$$

durch Schluss von n auf $n+1$ zu beweisen.

Man hat nämlich, falls er nur für das vorstehende n gültig ist, weiter:

$$a-(b_1+b_2+\ldots+b_n+b_{n+1})=a-\{(b_1+b_2+\ldots+b_n)+b_{n+1}\}=$$

$$=a-(b_1+b_2+\ldots+b_n)-b_{n+1}=a-b_1-b_2-\ldots-b_n-b_{n+1},$$

q. e. d. —

Die Sätze der drei genannten Arten kann man sich speciell nunmehr in der Zusammenstellung einprägen:

I. *Soll eine Zahl mit einer Summe durch Addition oder activ durch Subtraction, desgl. mit einem Producte durch Multiplication oder activ durch Division verbunden werden, so genügt es, diese Verknüpfung bei einem beliebigen Operationsgliede des betreffenden Ausdruckes zu vollziehen.*

II. *Soll eine Summe addirt oder subtrahirt, oder soll mit einem Producte multiplicirt, dividirt, potenzirt oder radicirt werden, so kann man dasselbe mit den Operationsgliedern fortschreitend ausführen.*

Dieser Satz wird von Grassmann (l. c.) das „Vereinigungsgesetz“ genannt.

III. *Soll eine Summe durch Multiplication oder passiv durch Division, desgl. ein Product passiv durch Potenziren, Radiciren oder Logarithmiren mit einer Zahl verbunden werden, so kann man diese Operation mit sämmtlichen Operationsgliedern einzeln vornehmen.* Die Partialergebnisse sind im allgemeinen wieder zu einem Ausdruck derselben Art, nur im letzten Falle zu einem solchen von der nächst niedrigeren Stufe zu verbinden.

Dies die distributiven Gesetze — von Grassmann (l. c.) ziemlich nichtssagend das „Beziehungsgesetz“ genannt.

Auch die Sätze von commutativem Charakter — diejenigen, welche aussagten, dass die Reihenfolge, in der gewisse Operationen hintereinander ausgeführt werden, beliebig ist — gelten ebenso ohne weiteres, wenn mehr als zwei derartige Operationen ausgeführt werden sollen. Also namentlich:

IV. *Wenn mehrere Zahlen fortschreitend addirt, subtrahirt oder*
l addirt, bald subtrahirt werden sollen, ebenso wenn mit denselben
heinander bald multiplicirt, bald dividirt werden soll, endlich wenn
cessive in buntem Wechsel mit ihnen potenzirt und radicirt werden
, so ist jedesmal die Ordnung, in der dieses geschieht, beliebig.

Es kann nämlich, wie wir in den Paragraphen 10. und 22. bei VII
ehen haben, jede beliebige Reihenfolge von Operationsgliedern
er Summe oder eines Productes durch Vertauschung von immer
ei benachbarten hergestellt werden, und das nämliche muss auch
ı irgend welchen anderen Operationsgliedern gelten, von denen jedes
rch eine aparte Operation mit dem bis dahin ausgerechneten Er-
bnisse verknüpft gedacht wird. Wenn also nur für zwei aufeinander-
gende Operationen es stets gestattet ist, die Aufeinanderfolge derselben
ızukehren, so muss auch jede beliebige Reihenfolge dieser Opera-
ınen in jede andere sich verwandeln lassen und ist damit die Ver-
ıgemeinerung der commutativen Sätze begründet.

Die vorstehenden Theoreme I. bis IV., welche übrigens, soweit sie
ch nur auf directe Operationen beziehen, schon längst erwiesen sind
f. Kap. 2), sind wohl die wichtigsten Ausdehnungen der Verknüpfungs-
setze auf mehrere Zahlen und Operationen.

§ 77. Schluss.

Hervorzuheben sind ferner noch:

V. Die Regel für die Addition beliebig vieler Differenzen:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_n - b_n) = \\ = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (b_1 + b_2 + \dots + b_n), \tag{170}$$

welche lautet:

Differenzen können addirt werden, indem man von der Summe der Minuenden die der Subtrahenden abzieht, und rückwärts ausgesprochen: *Soll ein Polynom abgezogen werden von einem andern, welches ebensoviele Glieder besitzt, so kann man auch jedes Glied des ersten Polynoms von dem gleichvielten des andern subtrahiren und die Ergebnisse addiren,* d. h. man kann die Subtraction *Glied für Glied* vornehmen.

VI. Desgleichen die Regel für die Multiplication beliebig vieler Brüche:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_n}, \tag{171}$$

welche heisst:

Quotienten können mit einander multiplicirt werden, indem man das Product der Dividenden durch das der Divisoren theilt, und rückwärts: *Soll ein Product durch ein anderes von ebensoviel Factoren getheilt werden, so kann man auch jeden Factor des ersten Productes*

durch den entsprechenden (ebensovielten) des zweiten dividiren, und die Ergebnisse multipliciren.

Dieser Satz bezieht sich überhaupt auf alle möglichen Producte, da man, wenn das eine derselben weniger Factoren haben sollte, die fehlenden durch Einer ersetzen kann — zunächst allerdings vorbehaltlich der Ausführbarkeit der Einzeldivisionen.

Der Beweis für beide Regeln ist durch abwechselnde Anwendung der Sätze II und I des vorigen Paragraphen zu führen, wodurch die rechte Seite der Gleichung leicht in die linke übergeführt wird. —

VII. Man merke noch den Satz vom „Quadrat eines Polynoms", welcher einen besondern Fall der allgemeinen Multiplicationsregel in § 18., zugleich aber eine Verallgemeinerung von (166) bildet:

$$(172)\quad \begin{aligned}(a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad + \ldots + a_n^2 + \\ + 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots + a_1 a_n + \\ + a_2 a_3 + \ldots + a_2 a_n + \\ \cdots\cdots\cdots \\ + a_{n-1} a_n);\end{aligned}$$

derselbe lautet:

Das Quadrat eines Polynoms ist gleich der Summe der Quadrate seiner sämmtlichen Glieder plus der doppelten Summe ihrer Producte zu je zweien. Wie jedoch die letztgenannte Summe ohne Wiederholung oder Auslassungen zu bilden sei, darüber wäre die Combinatorik zu vergleichen. Den Vorzug verdient deshalb gewöhnlich eine andere Fassung des Satzes, durch welche sowohl diese letztere Frage miterledigt, als auch zumeist eine bessere Anordnung der Glieder erzielt wird; nämlich die folgende Darstellung:

$$(173)\quad \begin{aligned}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + \ldots + 2a_1 a_n + \\ + a_2^2 \quad + 2a_2 a_3 + \ldots + 2a_2 a_n + \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_n^2,\end{aligned}$$

welche — freilich etwas umständlicher — wie folgt in Worte zu fassen ist:

Das Quadrat eines Polynoms ist gleich (der Summe aus) *dem Quadrat des ersten Gliedes plus den doppelten Producten aus dem ersten Glied in jedes folgende, plus dem Quadrat des zweiten Gliedes plus den doppelten Producten aus dem zweiten Glied in jedes folgende, plus und so weiter bis zum Quadrat des letzten Gliedes.*

Der Beweis des Theorems ist ebensoleicht independent nach § 18., als recurrent durch den Schluss von n auf $n + 1$ zu führen.

VIII. Durch Ausmultipliciren nach den Gesetzen des § 64. wird man leicht die Gleichung rechtfertigen:

$$(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2 b^{n-3} + a b^{n-2} + b^{n-1})(a-b) = a^n - b^n,$$

woraus dann umgekehrt folgt, dass auch:

$$(174) \quad \frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2 b^{n-3} + a b^{n-1} + b^n$$

sein muss. Da nun der rechterhand befindliche Ausdruck mittelst lauter directer Operationen aus a und b zusammengesetzt ist, und diese bekanntlich jederzeit ausgeführt werden können, so muss auch die linkerhand angedeutete Division eine ausführbare, nämlich der Quotient eine ganze Zahl sein; das heisst m. a. W.: *Die Differenz zweier gleichhohen Potenzen ist stets durch die Differenz ihrer Grundzahlen theilbar.*

Legt man dem n den niedersten Werth bei, dessen es (hier noch) fähig ist, d. h. setzt man $n = 2$, so folgt die Gleichung:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b,$$

welche [nebst der entsprechenden:

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b]$$

auch direct aus (168) hervorgeht. Es erscheint somit das Theorem (174) als eine Verallgemeinerung von (168).

Bemerkenswerth ist endlich der Specialfall, welcher sich aus (174) unter der Annahme $b = 1$ ergibt:

$$(175) \quad \begin{cases} \dfrac{a^n - 1}{a - 1} = a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a^2 + a + 1 = \\ \quad = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1}. \end{cases}$$

Zum Beispiel:

$$\frac{a^2 - 1}{a - 1} = 1 + a,$$

$$\frac{a^3 - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2,$$

$$\frac{a^4 - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2 + a^3,$$

u. s. w.

Im vorstehenden sind die fundamentalen Formeln oder Gleichheiten der gewöhnlichen Algebra mit genügender Vollständigkeit aufgestellt.

Bildet man irgendwie eine Gleichung, welche *nicht* aus diesen Formeln abgeleitet werden kann, oder mit denselben in Widerspruch sich befindet, so wird diese Gleichung keine Formel, sondern nur eine synthetische Gleichung [cf. Einleitung No. 26] sein können, und sie wird keinen Anspruch auf *allgemeine* Gültigkeit für beliebige Werthe

der in ihr vorkommenden literalen Zahlen oder Buchstabengrössen besitzen.

Wenn man eine solche Gleichung, welche in Wirklichkeit synthetisch ist und demnach als Formel hingestellt geradezu *falsch* zu nennen wäre, dennoch wie eine Formel anwendete, so würden ebendadurch oft Ausdrücke einander gleichgesetzt werden, die von völlig verschiedenem Werthe sind, und müssten so unbillige oder falsche Resultate sich ergeben.

So ist z. B. die Gleichung $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ eine synthetische Gleichung und eine unrichtige Formel; sie würde, etwa auf die Werthe $a = 16$, $b = 9$ der literalen Zahlen angewendet, das falsche Resultat $\sqrt{25} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$, das ist: $5 = 4 + 3$ liefern.

Im Hinblick darauf ist nun für den Anfänger überhaupt der Rath am Platze, vor der Anwendung *unerwiesener* Sätze sich sorgfältig zu hüten, besonders aber bei *nichtdistributiven* Operationen sich durch die Analogie mit den Distributionsgesetzen nicht verleiten zu lassen. Ein Aggregat namentlich darf *nicht* „*gliedweise*" potenzirt, radicirt oder logarithmirt werden; desgl. wenn ein Product multiplicirt oder dividirt werden soll, darf diese Operation *nicht etwa an allen* Factoren des Productes (einzeln) ausgeführt werden, u. s. w. —

Synthetische Gleichungen dürfen niemals als allgemeine Vorschriften zur Umformung von Ausdrücken benutzt werden; vielmehr können selbige nur dazu dienen, specielle Zahlen für sich oder in ihrer Abhängigkeit von anderen zu bestimmen. In letzterer Hinsicht aber lassen jene Gleichungen erst dann sich mit Erfolg behandeln, nachdem man mit den analytischen Gleichungen oder Formeln der Algebra sich völlig vertraut gemacht hat. —

II. Die Operationenverknüpfung in formaler Behandlungsweise.

§ 78. Tendenz der formalen Algebra.

In den physikalischen Wissenschaften ist es bekanntlich für das Studium der Wirkungen von der grössten Wichtigkeit, die Ursachen zu *separiren* — und diese auf dem Gebiet der inductiven Disciplinen so fruchtbringende Methode lässt sich auch auf das Gebiet der Deduction mit Nutzen übertragen. Auch bei rein deductiven Schlussfolgerungen ist es nämlich rathsam, eine möglichst scharfe Sonderung ihrer Voraussetzungen oder Prämissen vorzunehmen und die letzteren auch einzeln genommen nach ihren Consequenzen zu untersuchen.

Die Einhaltung dieses Verfahrens ist in der That nicht nur lehrreich, sondern für die richtige Auffassung der zwischen Grund und Folge bestehenden Beziehungen — für das Erkennen ihres gegenseitigen Zusammenhanges — geradezu unerlässlich. Und wie haupt-

sächlich dieser Tendenz z. B. die ganze neuere sogenannte *absolute* oder „Pan-Geometrie“ ihre Entstehung verdanken möchte, so liegt dieselbe auch der eigentlichen formalen oder *absoluten* Algebra zu Grunde.

Zur „formalen Algebra“ im engsten Sinne des Wortes sind diejenigen Untersuchungen über die Gesetze algebraischer Operationen zu rechnen, welche sich auf lauter allgemeine Zahlen eines unbegrenzten Zahlengebietes beziehen, *über dessen Natur selbst weiter keine Voraussetzungen gemacht sind.* [Exemplificationen zu dieser Definition werden in Menge durch das nachfolgende gegeben.]

Aufgabe dieses Zweiges der reinen Mathematik ist es nun, zunächst die verschiedenen Annahmen aufzusuchen, welche zur Definition einer Rechnungsoperation und damit auch zur Construction von Zahlensystemen verwendet werden können — alsdann aber auch: einen Ueberblick zu gewinnen über das System der Consequenzen, die eine jede der so zulässigen Annahmen nach sich ziehen wird.

Die formale Algebra hat somit die allgemeine Vorarbeit zu erledigen für die Betrachtung der verschiedenartigsten speciellen Zahlensysteme und Rechnungsoperationen, welche zu besondren Zwecken ersonnen werden mögen.

Jene Annahmen aber, d. i. die Bedingungen, denen nun irgend welche allgemeine Zahlzeichen $a, b, c, \ldots$ unterworfen sein können, sollen natürlich nicht rein aus der Luft gegriffen werden. Vielmehr wird man denselben nur im engsten Anschlusse an schon vorhandenes, gegebenes, wirkliches näher zu treten im Stande sein, und, anstatt einen salto mortale in's blaue zu unternehmen, nur einfach von da aus stetig weiter zu gehen haben, wo man sich eben befindet.

Daher fragen wir uns denn zuerst, welche von den vorangegangenen Untersuchungen als zur formalen Algebra gehörig zu betrachten sind, oder doch in das Bereich derselben unmittelbar hereingezogen werden können, und hierauf ferner, welches die einfachsten (im obigen Sinne) formalen Prämissen sein werden, auf die sich dieselben zurückführen lassen.

Alle Resultate des zweiten Kapitels, sowie des ersten Abschnittes im dritten und gegenwärtigen vierten Kapitel sind freilich im Grunde die Consequenzen aus der Definition einer natürlichen Zahl als einer Summe von Einern (welche im ersten Kapitel gegeben wurde), sowie aus der Begriffsbestimmung der mit eben diesen Zahlen auszuführenden Rechnungsoperationen der Addition, Multiplication u. s. w. In dieser Weise — als solche Consequenzen — sind ja sämmtliche Gesetze in der That abgeleitet worden. Allein als solche gehören sie keineswegs der formalen Algebra an. Von der letzteren sind gerade die Unter-

suchungen auszuschliessen, bei welchen man genöthigt ist, auf die Bedeutung einer Zahl als einer Summe von Einern zurückzugehen, überhaupt diejenigen, wo nur natürliche Zahlen als solche zur Verwendung kommen (wo es wesentlich auf den speciellen Charakter derselben ankommt). Es gehören ihr dagegen diejenigen Untersuchungen an, bei denen die Operationen einer Stufe auch als Typen für noch nicht völlig bestimmte (zu einander entgegengesetzte) Operationen aufgefasst werden könnten.

Was die Untersuchungen über directe Operationen im zweiten Kapitel betrifft, so können also zur formalen Algebra namentlich alle diejenigen hereingezogen werden, in welchen ein für zwei oder drei Operationsglieder schon erwiesener Satz auf deren mehrere, auf beliebig viele Operationsglieder ausgedehnt wurde; vergleiche §§ 8., 10., 15., 17., 18., 22., dazu die Herleitung der Formeln (35), (37) und (40).

Wie man sich erinnern wird, sind z. B. alle Eigenschaften der gemeinen Multiplication, welche, wenn diese für sich allein betrachtet wird, in dem Satze gipfelten, dass die Anordnung des Multiplicationsprocesses — die Reihenfolge und Gruppirung der Factoren — beliebig ist, dort als strenge Consequenzen der beiden einfachsten Sätze:

$$ab = ba \text{ (des Commutationsgesetzes im engeren Sinne),}$$
$$a(bc) = (ab)c \text{ (des Associationsgesetzes im engeren Sinne)}$$

nachgewiesen; und überdies wurde erkannt, dass aus dem letzteren Gesetze auch *ohne* das erstere schon die *allgemeine associative Eigenschaft* der betreffenden Operation hervorgeht, wonach also in einem Product aus mehreren Factoren diese beliebig gruppirt, d. i. ohne Aenderung ihrer Reihenfolge mittelst Klammern zusammengefasst werden dürfen. Das Commutationsgesetz für sich allein blieb dagegen ohne interessantere Consequenzen, und vermochte namentlich nicht die unbeschränkte Vertauschbarkeit der Factoren eines mehrfactorigen Productes mit Nothwendigkeit zu bedingen.

Offenbar ist hiemit auch (in § 8.) bereits ein Anfang mit der nunmehr noch weiter zu führenden Separation der Prämissen gemacht worden.

Dies aber waren in der That auch die einzigen Betrachtungen formalen Charakters in dem genannten Abschnitte.

Die Herleitung der dabei zum Ausgangspunkt genommenen Gesetze selbst — der Gesetze also, welche eine Grundeigenschaft directer Operationen an nur zwei oder drei Operationsgliedern zum Ausdruck brachten — konnte nicht ohne ein Zurückgehen auf Begriff und Zusammensetzung der natürlichen Zahlen vollzogen werden [eine Bemerkung, welche z. B. auch hinsichtlich aller über die Ungleichungen aufgestellten Fundamentalgesetze zutrifft]. Jene einfachsten Gesetze werden daher in der formalen Algebra sich nimmermehr beweisen lassen; hier können sie nur hypothetisch zugelassen, d. i. willkürlich als Prämissen angenommen oder aber verworfen werden. [Es würde

sich höchstens noch um die Frage handeln können, inwiefern dieselben auch durch andere von ebensogrosser Tragweite zu ersetzen seien.]

Von den über inverse Operationen (für sich) im dritten Kapitel angestellten Untersuchungen können diejenigen des Abschnittes II fast ausnahmslos der formalen Algebra zugezählt werden. Da und dort nur sind in dieselben noch einige allgemeine Untersuchungen auf dem Gebiet der Logik eingeflochten, welche sich unterwegs als nothwendig herausgestellt haben. Im übrigen tritt bei jenen Untersuchungen die Tendenz der Separation schon um ein bedeutendes schärfer zu Tage.

Nun aber wird es sich endlich darum handeln, auch den ganzen Algorithmus der directen und inversen Operationen *in ihren gegenseitigen Verknüpfungen* — so, wie er im vorigen Abschnitt gegeben wurde — noch vom formalen Standpunkte aus zu untersuchen. —

§ 79. Die Elementarvoraussetzungen.

Was zunächst die Operationen der ersten Stufe für sich allein betrifft, so sind von den im vorigen Abschnitt enthaltenen Sätzen vorzugsweise die Formelgruppen (139), (140), (141) und (136) der §§ 56. und 57. — gewissermassen als die *„Fundamentalgesetze“* — in's Auge zu fassen. Diese, sowie auch alle in den beiden früheren Kapiteln auf Addition und Subtraction bezüglichen Sätze (worin nur Gleichungen betrachtet wurden) waren nun die streng logischen Consequenzen des Vereines einiger wenigen höchst einfachen Prämissen, die zum Theil unter jenen Gesetzen selbst sich noch einmal mitangeführt finden, und die als „Fundamental“- oder *„Elementarvoraussetzungen“* aufgefasst werden mögen.

Als solche sind unter gewissem Vorbehalt etwa zu bezeichnen:

1⁰) *die Annahme, dass eine Operation, genannt Addition, innerhalb des betrachteten Zahlengebietes stets ausführbar sei,*

2⁰) *dass dieselbe stets zu einem eindeutig bestimmten Resultat führe,*

3⁰) *dass sie dem Commutationsgesetze* $a + b = b + a$ *unterworfen sei,*

4⁰) *dass sie auch dem Associationsgesetze* $a + (b + c) = (a + b) + c$ *gehorche;*

5⁰) *die begriffliche Definition der Subtraction als einer zur Addition inversen Operation, wie sie ausgeprägt ist in der Gleichung:* $(a - b) + b = a$;

6⁰) *die Annahme der unbeschränkten Ausführbarkeit auch dieser inversen Operation innerhalb des ganzen Zahlengebietes;*

7⁰) *die Annahme der Eindeutigkeit ebendieser Operation.*

Also: *Ausführbarkeit, Eindeutigkeit, Commutativität* und *Associativität* der Addition, *Begriff, Ausführbarkeit* und *Eindeutigkeit* der Subtraction.

Bei der Aufzählung der Prämissen pflegen meist die Lehrbücher — namentlich ad 1⁰), 2⁰), 6⁰) und 7⁰) — sich starker Auslassungen schuldig zu machen.

An die obige Aufzählung knüpft sich nun aber eine ganze Reihe von Bemerkungen, die ich ungeachtet ihrer Wichtigkeit, um Raum zu sparen, dem kleineren Druck unterwerfe.

Zunächst wird man leicht erkennen, dass diese Voraussetzungen — abgesehen von der eine Definition enthaltenden 5⁰) — sich in der That nur *beweisen* lassen für Zahlen von näher bestimmter Zusammensetzung oder Entstehungsweise — wie man es ja an dem Beispiel der natürlichen Zahlen gesehen hat. —

Als Prämisse zu formalen Untersuchungen dürfen diese Sätze nur für ein *bestimmtes,* wenn auch *unbegrenztes* Zahlengebiet in Anspruch genommen werden, *nicht aber für alle Zahlen überhaupt.* Denn bei der unumschränkten Bildungsfähigkeit des Zahlbegriffes können die sub 1⁰) bis 7⁰) betrachteten beiden Operationen selbst dazu benutzt werden, *neue* Zahlen definiren zu helfen und damit, einzuführen, deren Rechengesetze hiernach von ebendiesen Voraussetzungen 1⁰) bis 7⁰) — in Verbindung mit der gedachten Definition — *abhängig* sein werden. Es steht alsdann noch dahin — und wird es eben von ihrer Definition abhängen — ob diese neuen Zahlen ohne Widerspruch mit den Prämissen wieder den alten Gesetzen unterthan gemacht werden können, und wird man also in der That das Zahlengebiet, auf welches die obigen Prämissen sich beziehen sollen, jedenfalls als ein *vorgegebenes* zu betrachten haben. —

Ein Rückblick auf die Herleitung der „Fundamentalgesetze" zeigt, dass die angegebenen Elementarvoraussetzungen 1⁰) bis 7⁰) jedenfalls *hinreichen*, um die ersteren als eine nothwendige Folge nach sich zu ziehen, dass m. a. W. diese Voraussetzungen wirklich jene Gesetze in sich einschliessen.

Jene Fundamentalgesetze sind zwar auf dem Gebiet der natürlichen Zahlen selbst nur bedingungsweise gültig: ihre Gültigkeit ist jeweils an die Bedingung der Ausführbarkeit der inversen Operationen geknüpft (welche hier in Wirklichkeit nur eine beschränkte ist). Da jedoch auch der Beweis dieser Formeln lediglich an Gültigkeitsbedingungen ebendieser Art gebunden war, so wird die Annahme der *unbeschränkten* Ausführbarkeit der inversen Operationen auf einem Zahlengebiete ebendaselbst auch die unumschränkte Gültigkeit jener Fundamentalgesetze nach sich ziehen, sowie auch umgekehrt der Annahme, dass die letzteren auf irgend einem Gebiet ausnahmslose Geltung haben, auch nothwendig die Voraussetzung 6⁰) zu Grunde liegen muss. Wie man dies übrigens auch bei der Ausdehnung der Formeln auf andere als natürliche Zahlen später sehen wird, wobei das Zahlengebiet so „*completirt*" werden wird, dass sämmtliche Formeln allgemein gültig werden, trifft diese Bemerkung nicht blos in Bezug auf hypothetische, sondern auch in Bezug auf die actuellen Operationen der „allgemeinen Arithmetik" factisch zu.

Daraus also, dass diese Bedingungen 1⁰) bis 7⁰) den Gesetzen wirklicher Operationen zu Grunde liegen, wird nun jedenfalls hervorgehen, dass dieselben unter sich *verträglich* sind; es wird demnach keine derselben in einem Widerspruch zu den übrigen stehen können.

Ferner ist leicht zu sehen, dass diese Voraussetzungen auch im ganzen von einander *unabhängig* sind, d. h. es wird nicht möglich sein, die einen aus den andern vollständig oder auch nur theilweise abzuleiten.

Eine Ausnahme bilden in letzterer Beziehung nur die Voraussetzungen 1⁰) und 6⁰), indem einerseits die Annahme der Ausführbarkeit — sozusagen Existenz — einer Operation natürlich Vorbedingung für alle übrigen auf diese Operation bezüglichen Annahmen ist und in den letzteren immer wieder stillschweigend miteinbegriffen („sousentendu") sein muss; insoferne andrerseits aus 1⁰) und 5⁰) auch geschlossen werden kann, dass die inverse Operation jedenfalls für einige (für gewisse Systeme von) Zahlen des vorliegenden Zahlengebietes ausführbar sein muss. Gleichwohl ist aber die Annahme 6⁰) eine über dieses hinausgehende, und wird also, sobald nur die Buchstaben als allgemeine Zahlen eines Zahlengebietes genommen werden, zum wenigsten einen von den übrigen Voraussetzungen noch unabhängigen Theil enthalten.

Auch insofern gibt sich noch eine gewisse Abhängigkeit zwischen den Prämissen kund, als der Wegfall des Commutationsgesetzes 3⁰) eine Zerfällung von 5⁰) in *zwei* Definitionen, und der Wegfall von einer der beiden die Eindeutigkeit betreffenden Voraussetzungen 2⁰) oder 7⁰) auch eine Modification der in 5⁰) anzuwendenden Beziehungszeichen — gemäss den in § 50. auseinandergesetzten Grundsätzen — nach sich ziehen müsste.

Abgesehen hievon wird die gegenseitige Unabhängigkeit der Prämissen 1⁰) bis 7⁰) sich später noch darin zur genüge documentiren, dass bei gewissen (höheren) Operationen (oder Zahlen) die einen oder andern von diesen Voraussetzungen defect werden oder in Wegfall gerathen, ohne dass dadurch die übrigen gestört werden.

Nächst der vorstehend besprochenen Frage nach der Verträglichkeit, Unabhängigkeit und Hinlänglichkeit der angeführten Voraussetzungen — mit einem Worte nach der *Zulässigkeit* derselben — drängt sich endlich noch die Frage auf, ob denn gerade diese Annahmen 1⁰) bis 7⁰) als Prämissen der citirten Fundamentalgesetze der Algebra erwählt werden müssen, ob m. a. W. diese Prämissen auch specifisch *nothwendig* seien. Diese Frage ist zu einem Theile zu *verneinen*, indem einzelne von den gegebenen Prämissen in dem Gesammtverbande sehr wohl auch durch ganz andere ersetzt werden könnten. [Jedoch die Anzahl dieser Prämissen bleibt (für ein gewisses Zählungsprincip) immerfort dieselbe; sie kann in gewissem Sinne als eine feste angesehen werden.]

Wir haben nämlich schon in § 3. gesehen, dass (hinsichtlich der sämmtlichen Consequenzen) die Formel 4⁰) des Associationsgesetzes sich (im Gesammtverbande der Prämissen) auch ersetzen lässt durch die Formel $(a+b)+c=(a+c)+b$ von mehr commutativem Charakter (vergl. auch § 13.) und werden wir später noch mehrere Stellvertreter des Associationsgesetzes in dieser Hinsicht betrachten.

Die Voraussetzung 5⁰) — obwohl gewöhnlich hingestellt als Definition der Subtraction, deren Begriff und Theorie ja auf die der Addition gegründet zu werden pflegt — ist eigentlich anzusehen als eine Voraussetzung bezüglich der gegenseitigen Beziehung von Addition und Subtraction zu einander; sie betrifft im Grunde den *Gegensatz* dieser beiden Operationen, und könnte deshalb in dem Gesammtverbande die sub 5⁰) angegebene Gleichung auch durch die andere: $(a+b)-b=a$ ersetzt werden.

Die Voraussetzung 7⁰) über die Eindeutigkeit der Subtraction lässt sich nach § 40. offenbar auch ersetzen durch eine die Addition betreffende Annahme: die nämlich, dass ein Summand sich nicht ändern kann, ohne dass die ganze Summe

sich ändert. Auf dem letzteren Satze, der wieder nur für specielle Arten von Zahlen (auf Grund einer für die Gleichheit derselben gegebenen Definition) beweisbar ist, beruhte ja der ganze Beweis für die Eindeutigkeit der Subtraction, wie denn auch umgekehrt diese wieder den genannten Satz bedingt.

Eine ähnliche Bemerkung lässt sich natürlich auch ad vocem von 2⁰) anbringen.

Da man auf der ersten Operationsstufe noch keine directe Veranlassung findet, die Voraussetzungen zu separiren und es, wegen der vollkommenen Analogie zwischen den (reinen) Gesetzen der ersten und der zweiten Stufe, überdies genügt, diese Separation nur auf *einer* von beiden Stufen ausgeführt zu haben, so werde ich hier nicht weiter auf erstere eingehen, sondern mich begnügen, nur einen Punkt hervorzuheben, auf welchen ich bei der folgenden Stufe nicht wieder zurückkommen möchte.

Er betrifft die Folgerungen, welche sich an das Commutationsgesetz 3⁰) für sich allein knüpfen, wenn die Annahme 4⁰) des Associationsgesetzes gänzlich unterdrückt wird. Diese Folgerungen lassen sich dann mit einem Blick überschauen. Man übersieht sogleich, dass aus dem Commutationsgesetze allein [indess noch in Verbindung mit den übrigen Elementarvoraussetzungen ohne 4⁰)] nur die Gleichheit der in den Formelgruppen (139), (140), (141) direct *untereinander* geschriebenen Ausdrücke hervorgeht, während sie für kein einziges Paar der nebeneinanderstehenden Ausdrücke gerechtfertigt werden kann. Letzteres gilt ebenso von den „Umformungsregeln" einer jeden von den beiden ersten Zeilen des Tableau's (136), wenn man dort die $3 + 1 = 4$ resp. $3 + 3 + 1 + 1 = 8$ äquivalenten Ausdrücke, welche noch durch Umstellung der Glieder leicht erhalten werden könnten, ergänzend unter jene geschrieben denkt.

Da nun solche Gleichungen, wie $(a + b) - b = (b + a) - b$, $(a + n) - (b + n) = (a + n) - (n + b) = (n + a) - (n + b) =$ etc. einerseits so einfacher Natur sind, dass der Uebergang von einer Seite zur andern nicht die geringste Schwierigkeit bietet, und da sie andrerseits kein sonderliches Interesse haben, so kann das Commutationsgesetz auch hier der interessanteren Consequenzen verlustig erklärt und fortan einfach unberücksichtigt gelassen werden. Ist dasselbe schon in Verbindung mit den Prämissen 1⁰), 2⁰) und 5⁰) bis 7⁰) ohne bemerkenswerthe Folgerungen gewesen, so wird es, für sich allein genommen, dergleichen um so weniger nach sich ziehen. —

§ 80. Fortsetzung. Die Separation dieser Voraussetzungen.

Dies vorausgesetzt, gehen wir nun zu den Operationen der zweiten Stufe über, deren Gesetze und folglich auch formale Prämissen

denen der ersten Stufe so vollkommen analog gestaltet sind, dass sie ihnen ohne weiteres nachgebildet werden können.

Bei diesen aber findet man, wie schon theilweise angedeutet wurde, überdies in drei Umständen eine Veranlassung, die in Rede stehende Separation vorzunehmen, nämlich: *erstens* aus dem Grunde, weil für benannte Zahlen die den angegebenen entsprechenden Elementarvoraussetzungen schon nicht alle unmodificirt aufrecht erhalten werden können, *zweitens* wegen der exceptionellen Stellung der Zahlen 0 und ∞, die sich einigen jener Voraussetzungen nicht mehr fügen, *drittens* und hauptsächlich endlich im Hinblick auf die an höheren (hypercomplexen, extraordinären) Zahlen vorzunehmenden Multiplications- und Divisionsarten, bei welchen man stets genöthigt ist, einzelne von den Fundamentalvoraussetzungen fallen zu lassen.

Will man dazu noch die Sätze über die Verknüpfung der ersten Stufe mit der zweiten in Betracht ziehen, so ist den Elementarvoraussetzungen jetzt noch eine weitere anzureihen, als welche

8⁰) eines der beiden *Distributionsgesetze* einzutreten hat.

Der Wegfall des Commutationsgesetzes bedingt aber nicht nur die bereits erwähnte Zerfällung der Definition 5⁰) in zwei getrennte Definitionen, sondern man wird alsdann ad 8⁰) auch unter zwei nicht aufeinander zurückführbaren Distributionsgesetzen die Wahl haben. —

In Bezug auf die Freiheit, resp. Nothwendigkeit, sie beizubehalten oder aufzugeben, verhalten nun die verschiedenen Elementarvoraussetzungen sich höchst verschieden.

Auf den ersten Blick gibt die Voraussetzung 5⁰) — in der angegebenen Weise für die zweite Stufe modificirt — sich als eine solche zu erkennen, welche aufzugeben sinnlos wäre; denn ohne vorherige Definition der inversen Operationen oder ihres Verhältnisses zu der directen wird überhaupt nicht ein Algorithmus dieser Operationen in ihrer gegenseitigen Verknüpfung geschaffen werden können.

Auch die Annahmen 1⁰) und 6⁰) müssen beide wenigstens theilweise festgehalten werden; die Operationen müssen, wenn auch vielleicht nur unter beschränkenden Bedingungen, als ausführbar vorausgesetzt werden, denn, wenn sie dies niemals wären, so könnte es wieder keinen Algorithmus derselben geben. Die gedachten beiden Annahmen können daher höchstens partielle Einschränkungen dulden, und muss ad 1⁰) sowie ad 6⁰) entweder: a) unbedingte oder b) bedingungsweise Ausführbarkeit vorausgesetzt werden.

Im letzteren Falle werden sich die Fundamentalgesetze an gewisse Gültigkeitsbedingungen geknüpft erweisen, die man, wie sich herausstellen wird, in offenbare, selbstverständliche oder *patente* und in versteckte oder *latente* einzutheilen hat.

Als „patente" Gültigkeitsbedingungen einer Formel sind diejenigen Bedingungen derselben zu bezeichnen, welche schon erfüllt sein müssen, damit die

Formel nur überhaupt einen Sinn habe — die Bedingungen also, welche ausdrücken, dass die sämmtlichen in den beiderseitigen Ausdrücken angedeuteten Operationen ausführbar seien, und welche somit unmittelbar aus dem blossen Anblick der Formel sich entnehmen lassen. Es wird jederzeit überflüssig sein, dergleichen Bedingungen ausdrücklich anzugeben — wenngleich auch sie bei den Anwendungen der Sätze nicht ausser Acht gelassen werden dürfen. Und wir können es als ein merkwürdiges Ergebniss der Untersuchungen in den vorangegangenen Abschnitten aufzeichnen, dass die formalen Consequenzen der vereint adoptirten (nicht separirten) Elementarvoraussetzungen stets nur an solche patente Gültigkeitsbedingungen geknüpft erscheinen (woferne sie nicht sogleich allgemeingültig sind).

„Latent" nennen wir dagegen alle die Gültigkeitsbedingungen einer Formel, welche aus ihr selbst nicht erkennbar sind, gleichwohl aber ihrer Herleitung anhaften. Die letzteren müssen jederzeit sorgfältig bei der Formel angemerkt werden, damit nicht die Gefahr entstehe, die Formel auch ausserhalb ihres Gültigkeitsbereiches anzuwenden auf solche Fälle, für die sie unerwiesen oder ungültig ist — eine Vorsicht, auf deren Vernachlässigung bekanntlich einer der gemeinsten Trugschlüsse beruht.

Dass die Voraussetzung 3⁰) sehr wohl fehlen kann, wurde bereits gesagt, und haben wir ja das Commutationsgesetz förmlich hinwegdekretirt.

Ebenso können sehr wohl die Voraussetzungen 2⁰) und 7⁰) über a) die Eindeutigkeit der Operationen einzeln oder beide zusammen fortfallen, und tritt alsdann an ihre Stelle b) die Annahme einer (eventuellen) Vieldeutigkeit dieser Operationen.

Was 8⁰) betrifft, so werden wir die Consequenzen der Distributionsgesetze mit Leichtigkeit unabhängig von den Prämissen 3⁰) und 4⁰) angeben können. Abgesehen hievon, d. h. woferne es sich nun nicht gerade um diese Consequenzen der Distributionsgesetze handelt, darf aber die Voraussetzung 4⁰) nicht gänzlich unterdrückt werden, da wir sonst zu neuen Schlüssen nicht mehr gelangen könnten.

Ein formales Gesetz der directen oder multiplicativen Operation muss mindestens angenommen werden, denn ohne ein solches würde gerade diejenige Prämisse fehlen, welche den wesentlichsten Grundpfeiler für das zu errichtende Gebäude von Conclusionen bildet.

Fortan werden wir also vorzugsweise die Consequenzen des Associationsgesetzes oder die von einem seiner „Substituten" (siehe unten) für sich zu untersuchen haben, d. i. immerhin im Zusammenhange mit einem der erwähnten Minima von nicht aufgebbaren Prämissen, unter welchen man noch die Wahl hat.

Wir haben demnach folgende Uebersicht der überhaupt zur Auswahl sich darbietenden

Fundamentalprämissen.

* 1⁰)ₐ *Unbedingte* } *Ausführbarkeit*.
1⁰)_b *Bedingungsweise* }

* 2⁰)ₐ *Eindeutigkeit* } *der Multiplication.*
2⁰)_b *Vieldeutigkeit* }

3⁰) *Das Commutationsgesetz* $ab = ba$.

* { 4⁰)ₐ *Das Associationsgesetz* $a(bc) = (ab)c$, *oder:*
{ 4⁰)_b *ein Stellvertreter desselben* (cf. § 83.).

* 5⁰)ₐ *Die Definition der Theilung:* $\frac{a}{b} b \mathrel{\ni\!\!=} a$ }

* 5⁰)_b *Die Definition der Messung:* $b(a : b) \mathrel{\ni\!\!=} a$ }

worin ad 2⁰)ₐ = für $\mathrel{\ni\!\!=}$ zu setzen ist.

6⁰)ₐ *Unbedingte* } *Ausführbarkeit der beiden inversen Operationen.*
* 6⁰)_b *Bedingungsweise* }

7⁰)ₐ *Eindeutigkeit* } *derselben.*
* 7⁰)_b *Vieldeutigkeit* }

8⁰)ₐ *Das erste Distributionsgesetz:* $a(b + c) = ab + ac$.

8⁰)_b *Das zweite Distributionsgesetz:* $(a + b)c = ac + bc$.

Bei dieser Schreibweise muss von jeder Nummer wenigstens die eine Litera gelten, ausser bei 3⁰) und von 8⁰); von 5⁰) alle beide, sobald 3⁰) fehlt. Allerdings sind aber die Prämissen 2⁰)_b und 7⁰)_b eigentlich von negativem Charakter und gleichbedeutend mit dem Wegfall der Prämissen 2⁰)ₐ resp. 7⁰)ₐ, oder 2⁰) resp. 7⁰) überhaupt. Die Prämissen 6⁰) und 7⁰) könnten noch einmal gespalten werden, wenn man sie nur auf die Theilung oder nur auf die Messung allein bezogen haben wollte.

Ich werde nun zunächst die mit einem Stern hervorgehobenen Attribute hinsichtlich ihrer Consequenzen untersuchen, also die Multiplication als unbedingt ausführbar und eindeutig, dagegen die beiden Divisionen als vieldeutig und nur bedingungsweise ausführbar voraussetzen. [Die Prämissen 8⁰) sollen so auch später gesondert von 4⁰) betrachtet werden.] Ich werde somit den in § 50. als „zweiter" aufgeführten Fall eingehend erledigen, woraus sich, indem man die Beziehungszeichen sämmtlich in = übergehen lässt, auch stets sofort mit Leichtigkeit die Erledigung des dort als „erster" erwähnten Falles (der Eindeutigkeit sämmtlicher Operationen) ergeben wird.

Zur Behandlung des „dritten" Falles, wo auch die directe Operation vieldeutig ist, sind zwar schon die nöthigen Fingerzeige im II. Abschnitt des vorigen Kapitels gegeben. Ich werde jedoch aus mehreren Gründen auf diesen Fall nicht weiter eingehen.

Erstens, weil dieser Fall überhaupt noch nicht behandelt ist, wie denn schon die Erledigung der beiden andern Fälle hier zum ersten mal gegeben sein möchte; *zweitens*, weil auch bei den hypercomplexen Zahlen bis jetzt nur eindeutige Multiplicationen zu betrachten gewesen sind; *drittens*, weil der „zweite" Fall so wie so

schon lehrreich genug scheint, indem die Gliederung der Consequenzen nach ihren Prämissen darin genugsam erkennbar ist, desgleichen die zur Behandlung derartiger Aufgaben einzuschlagende Methode des Schliessens — [um den Fall 2°)b auf den 2°)a zurückzuführen, wird man, wie sich von vornherein absehen lässt, nur einige Subsumtions- oder Beziehungszeichen abzuändern haben]; *viertens*, weil dann — bei Vieldeutigkeit der Multiplication — sich statt der Prämisse 4°), z. B. $a(bc) = (ab)c$, mit dem gleichen Rechte auch die Annahme $a(bc)$ $(=)$, $\ni$, $\in$ $(ab)c$ zur Berücksichtigung darbieten und somit vorderhand ein allzuweit ausgedehntes Feld der Forschung sich eröffnen würde.

Ich halte es für nützlich, noch hervorzuheben, dass auch für diejenigen Leser, welchen das Interesse an der Methodik vieldeutiger Operationen ferner liegt, es hinreichend lohnend sein möchte, die nachstehend durchgeführten Schlussreihen zu verfolgen. Dieselben enthalten, wie ich glaube, auch für den Fall eindeutiger Operationen, den sie mit umfassen, vieles lehrreiche und werden für diesen Fall, wo alle Beziehungszeichen in „=“ übergehen, nur um so leichter durchzugehen sein. —

§ 81. Vollständiger Algorithmus rein associativer Operationen.

Einen „Algorithmus associativer Rechnungsoperationen ohne Commutation“ hat schon Herr Hankel in seinem, wie mir scheint, noch nicht genügend gewürdigten Buche über die complexen Zahlen (l. c. pag. 18—25) gegeben, jedoch auf der einen Seite ohne die (erschwerende) Rücksicht auf eventuelle Vieldeutigkeit der inversen Operationen. Auf der andern Seite entgehen ihm in Folge des Umstandes, dass er nur die eine inverse (oder, wie er sagt, „lytische“) Operation der („thetischen“ oder) Multiplication in den Kreis seiner Betrachtungen zieht, sowohl im einzelnen manche von den interessantesten Beziehungen, als namentlich auch die überraschende Symmetrie, welche das ganze System dieser Beziehungen in seinem Ueberblick zeigt.

Wir setzen nun also bei einer eindeutigen Operation, genannt Multiplication, die Gleichung des Associationsgesetzes:

$$(176) \qquad a(bc) = (ab)c$$

als erfüllt voraus für alle Zahlen oder Zusammenstellungen von Zahlen a, b, c eines bestimmten unbegrenzten Zahlengebietes.

Es frägt sich, welche Consequenzen diese Annahme — namentlich für die nun eventuell vieldeutigen inversen Operationen und ihre Verknüpfung mit der directen — nach sich ziehen wird.

Bei der hierüber anzustellenden Untersuchung wird vor allem die Bemerkung in's Gewicht fallen, dass nach § 53. das Gesetz (176) unbedenklich auch auf mehrdeutige Ausdrücke gerade so wie auf eindeutig bezeichnete Zahlen angewendet werden darf, d. h. dass auch $A(BC) = (AB)C$ ist. Da überhaupt in dem genannten Paragraphen die Frage erledigt ist, in welcher Weise die für eindeutige Zahlzeichen gewonnenen Formeln auf beliebig vieldeutige Ausdrücke aus-

zudehnen sind, so können wir die Untersuchungen fortan möglichst auf die ersteren beschränkt halten.

Zunächst will ich übrigens ein frappantes und auch an sich schon bemerkenswerthes Exempel anführen zu der im vorigen Paragraphen ausgesprochenen Behauptung, dass hier die Gültigkeitsbedingungen einer Formel in der That oft „latent" werden, d. h. in ihr selbst sich nicht ausprägen.

Nach (91) und (176) wird man leicht die Kette von Schlussfolgerungen gerechtfertigt finden:

$$\frac{an}{n}b = \frac{an}{n}\left\{n(b:n)\right\} = \left\{\frac{an}{n}n\right\}(b:n) = (an)(b:n) = a\left\{n(b:n)\right\} = ab,$$

und ähnlich — in etwas kürzerer Darstellung:

$$a\left\{(nb):n\right\} = \frac{a}{n}n\left\{(nb):n\right\} = \frac{a}{n}nb = ab.$$

Somit ergibt sich das Resultat:

$$(177)_\alpha \qquad \frac{an}{n}b = ab \qquad \Big| \qquad a\left\{(nb):n\right\} = ab,$$

welches schon auf den ersten Blick paradox erscheinen muss, sobald man die Bedingungen der Herleitung ausser Acht lässt. Obwohl nämlich die Ausdrücke $\frac{an}{n}$ und $(nb):n$ vieldeutig sind — und sie sind z. B. auf dem Gebiet der alternirenden Zahlen unendlich vieldeutig, bekanntlich mit einer willkürlichen Constanten behaftet — so sollte doch der erste Ausdruck mit einer ganz beliebigen von a und n unabhängigen Zahl b nachmultiplicirt (ebenso der zweite mit einer allgemeinen Zahl a vormultiplicirt) stets ein eindeutiges Product geben!

Sieht man jedoch genauer zu, so erkennt man sogleich, dass bei der Herleitung der ersten Formel $(177)_\alpha$ die Zahl b durch n messbar, bei derjenigen der zweiten Formel ebenso a durch n theilbar angenommen werden musste.

Von dieser Annahme ist in den Formeln selbst jede Spur verwischt. Dieselbe trifft jedoch — z. B. bei den alternirenden Zahlen — im allgemeinen keineswegs zu, d. h. es gehören die Quotienten $b:n$ und $\frac{a}{n}$ nur in vereinzelten Fällen zu dem vorgegebenen Zahlengebiete, und werden ihm in den andern Fällen durchaus nicht immer einverleibt werden können.

Die Gültigkeitsbedingungen der Formeln $(177)_\alpha$ wären somit nun dahin auszusprechen, dass resp. die Ausdrücke:

$$(177)_\beta \qquad b:n \qquad \Big| \qquad \frac{a}{n}$$

(mit wenigstens einem ihrer Werthe) dem angenommenen Zahlengebiet angehören müssen.

Indem wir in *erster* Linie die Verknüpfungen dreier Zahlen durch zwei von den drei in Rede stehenden Operationen in's Auge fassen, erscheint vor allem merkwürdig eine Relation, welche sich dadurch auszeichnet, dass je die eine Seite derselben unmittelbar in die andre übergeführt werden kann.

Nach (91), (176) und (91) nämlich ergibt sich ohne weiteres:

$$\frac{a}{c} b = \frac{a}{c} \{c\,(b:c)\} = \left(\frac{a}{c} c\right)(b:c) = a\,(b:c),$$

und ist damit die Gleichung erwiesen:

$$\frac{a}{c} b = a\,(b:c), \tag{178}$$

welcher keine andern Voraussetzungen zu Grunde liegen, als die „selbstverständlichen“ (dass nämlich die Zahl a durch c theilbar und b durch c messbar sei). In Worten liefert uns diese Gleichung den Satz: *Theilung des ersten Factors* (durch eine Zahl) *ist äquivalent einer Messung des zweiten Factors* (durch dieselbe Zahl).

Gestützt auf diesen Satz kann man *zweitens* leicht zwei weitere allgemeine Beziehungen sozusagen heuristisch entwickeln, und zwar beziehungsweise durch folgende Kette von Schlüssen, die sich je an die durch die erste Formel ausgedrückte Voraussetzung anreihen:

$x \mathrel{=\!\!\in} \frac{a}{c} b,\quad \frac{x}{b} (=) \frac{a}{c},\quad \frac{x}{b} c \mathrel{\ni\!\!=} a,$	$x \mathrel{=\!\!\in} a(b:c),\ x:a (=) b:c,\ c(x:a) \mathrel{\ni\!\!=} b,$
$\frac{x}{b} c = x(c:b),\ x(c:b) \mathrel{\ni\!\!=} a,\ x \mathrel{=\!\!\in} \frac{a}{c:b},$	$c(x:a) = \frac{c}{a} x,\ \ \frac{c}{a} x \mathrel{\ni\!\!=} b,\ \ x \mathrel{=\!\!\in} b:\frac{c}{a},$
(179) $\quad \frac{a}{c} b \mathrel{=\!\!\in} \frac{a}{c:b};$	$a(b:c) \mathrel{=\!\!\in} b : \frac{c}{a}.$

Zur Erläuterung dieser Schlussreihen will ich bei der ersten von ihnen (links vom Verticalstrich) den Gedankengang noch etwas ausführlicher darlegen.

Die erste Formel sagt aus, es solle x irgend einen Werth des vieldeutigen Ausdrucks $\frac{a}{c} b$ vorstellen, d. h. das Product aus b in eine bestimmte unter denjenigen Zahlen, die, mit c nachmultiplicirt, a geben. Diese letztere Zahl selbst — der gedachte Specialwerth von $\frac{a}{c}$ — ist demnach, eben weil er mit b nachmultiplicirt x gibt, zugleich auch einer von den Werthen, die in dem Zeichen $\frac{x}{b}$ zusammengefasst werden; d. h. die beiden vieldeutigen Ausdrücke $\frac{a}{c}$ und $\frac{x}{b}$ besitzen jedenfalls einen gemeinschaftlichen Werth, m. a. W. stehen sie zu einander in der durch die zweite Formel ausgedrückten Beziehung der Correlation, als deren Zeichen bekanntlich das eingeklammerte Gleichheitszeichen $(=)$ eingeführt worden ist. Hieraus folgt nun aber weiter, dass die Zahl a einer der Werthe des vieldeutigen Ausdruckes $\frac{x}{b} c$ sein wird; nach der Definition des Quotienten $\frac{a}{c}$ muss dieselbe nämlich gleich dem Producte des mehrerwähnten Specialwerthes von $\frac{x}{b}$ in die Zahl c selbst sein, und somit ist nun auch die dritte Formel gerechtfertigt.

Zur Rechtfertigung des Ueberganges von der ersten zur zweiten und von dieser zur dritten Proposition, welcher je durch eine einfache Transposition bewirkt wird, kann überdies § 51. verglichen werden.

Die vierte Formel ist nun weiter nichts als eine Anwendung des bereits (durch directe Umformung) erwiesenen Theorems (178) auf den zuletzt erhaltenen

Ausdruck $\frac{x}{b}c$, und indem man auf Grund dieser vierten Formel den gedachten Ausdruck durch den ihm gleichen ersetzt, geht aus der dritten Proposition nunmehr die fünfte hervor, aus welcher letzteren endlich (als sechste) zu schliessen ist, dass x auch einen Werth des vieldeutigen Ausdruckes $\frac{a}{c:b}$ vorstellt.

Da nun die vorstehende Ueberlegung statthaft ist, welchen von den Werthen des Ausdruckes $\frac{a}{c}b$ man auch unter x verstanden haben mag, so ist überhaupt *jeder* einzelne Werth von $\frac{a}{c}b$ dem vieldeutigen Ausdruck $\frac{a}{c:b}$ untergeordnet, und damit auch die ganze Gattung von Werthen $\frac{a}{c}b$ oder der ganze Begriff $\frac{a}{c}b$ selber [cf. Einl. Nr. 20 (G)]; es ist mithin die Richtigkeit des Theorems (179) erwiesen. —

Die Bedingung dieser Herleitung, dass nämlich c durch b messbar sei, braucht nicht extra angemerkt zu werden, da sie noch aus dem resultirenden Satze selbst ersehen werden kann.

Dagegen muss noch untersucht werden, ob das erhaltene Zeichen der Unterordnung ein definitives ist, d. h. ob und unter welchen Bedingungen es in ein Gleichheitszeichen übergehen könnte.

Zu dem Ende haben wir nun zu prüfen, ob die ad (179) angegebene Schlusskette sich nicht vielleicht *umkehren* lässt.

In dieser Absicht werden wir nun von der sechsten Proposition als einer Prämisse auszugehen haben, d. h. wir nehmen an, es stelle x (wofür man auch im Gegensatz zu vorhin jetzt einen andern Buchstaben wählen könnte) von vornherein irgend einen bestimmten von den dem Ausdruck $\frac{a}{c:b}$ zukommenden Werthen vor. Alsdann aber lassen in der That unter einer einzigen die Ausführbarkeit der Division betreffenden Gültigkeitsbedingung die sämmtlichen obigen Schlüsse sich ebensoleicht auch rückwärts ausführen und wird dadurch erkannt, dass jenes x auch ein Werth von $\frac{a}{c}b$ sein muss, oder dass auch: $\frac{a}{c:b} \Subset \frac{a}{c}b$ ist — woferne nur die letztere Betrachtung ebenfalls zulässig ist, welchen der Werthe von $\frac{a}{c:b}$ man auch unter x verstanden haben mag.

Unter dieser Voraussetzung also wird [nach Einleitung Nr. 20. (E), indem man das letzte Ergebniss mit dem früheren (179) zusammenhält] die zwischen $\frac{a}{c}b$ und $\frac{a}{c:b}$ bestehende Beziehung diejenige der *Gleichheit* sein müssen, oder es wird die erste der beiden folgenden Propositionen:

(180)$_\alpha$ $\quad \frac{a}{c}b = \frac{a}{c:b} \quad \Big| \quad a(b:c) = b:\frac{c}{a}$

bewiesen sein.

Hiezu jedoch ist zu bemerken, dass diesmal — nämlich für die Umkehrbarkeit der obigen Schlussreihe und damit auch für die Gültigkeit von (180)$_\alpha$ — die Bedingungen keine selbstverständlichen mehr sind. Die vorhin als eine unentbehrliche Voraussetzung erwähnte Gültigkeitsbedingung besteht nämlich darin, dass (je) das gedachte x durch b theilbar sein müsse. Daher wird denn der ersten Relation (180)$_\alpha$ die „latente“ Gültigkeitsbedingung zu Grunde liegen, dass *jeder*

Werth des vieldeutigen Ausdrucks $\frac{a}{c:b}$ durch b theilbar sei, und ebenso setzt die zweite Relation $(180)_\alpha$ voraus, dass alle Werthe von $b:\frac{c}{a}$ durch a gemessen werden können — wobei natürlich, wenn allenfalls die Ausdrücke $\frac{a}{c:b}$ und $b:\frac{c}{a}$ auch ausserhalb des vorgegebenen Zahlengebietes Werthe besitzen oder eine anderweitige Interpretation gefunden haben sollten, diese letzteren Werthe nicht mit einbegriffen werden dürfen, sondern unter jenen Ausdrücken stets nur die Gesammtheit der *unserm Zahlengebiet angehörigen* Werthe derselben zu verstehen ist.

Ich drücke nun die obige Gültigkeitsbedingung zu der Formel $(180)_\alpha$ möglichst kurz dadurch aus, dass ich beziehungsweise den Ausdruck:

$$(180)_\beta \qquad \frac{\left[\frac{a}{c:b}\right]}{b} \qquad\Big|\qquad \left[b:\frac{c}{a}\right]:a$$

einfach hinsetze. Es soll damit im gegenwärtigen sowie in jedem ähnlichen Falle gesagt sein, dass der angegebene Ausdruck *durchaus*, d. h. für alle Werthe seiner (letztinstanzlichen) Operationsglieder mit wenigstens einem Werthe des aus ihrer Verknüpfung resultirenden Quotienten dem angegebenen Zahlengebiete angehören müsse — oder, anders zu reden, soll damit verlangt sein, dass der Ausdruck für jede seiner Deutungen *einen Sinn habe*. —

Auch bei den nachfolgenden Schlussreihen gelten nun ähnlich wie vorhin, wenn jedesmal die erste der Formeln als Definition der Zahl x willkürlich festgesetzt wird, mit Nothwendigkeit immer die sämmtlichen an diese gereihten Propositionen, welche zusammen die Herleitung des am Schlusse aufgestellten Theoremes bilden.

Und zwar *drittens:*

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} a\frac{b}{c}, \quad xc \mathrel{=\!\!\!\in} \left(a\frac{b}{c}\right)c, \qquad\Big|\qquad x \mathrel{=\!\!\!\in} (a:c)b, \quad cx \mathrel{=\!\!\!\in} c\left\{(a:c)\,b\right\},$$

$$\left(a\frac{b}{c}\right)c = a\left(\frac{b}{c}c\right) = ab, \qquad\Big|\qquad c\left\{(a:c)\,b\right\} = \left\{c\,(a:c)\right\}b = ab,$$

$$xc = ab, \quad x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{ab}{c}, \qquad\Big|\qquad cx = ab, \quad x \mathrel{=\!\!\!\in} (ab):c,$$

$$(181) \qquad a\frac{b}{c} \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{ab}{c}; \qquad\Big|\qquad (a:c)b \mathrel{=\!\!\!\in} (ab):c.$$

Bei dieser Ueberlegung ist z. B. linkerhand noch folgendes zu beachten.

Da der Ausdruck $\frac{b}{c}$ ein vieldeutiger ist, so muss auch das Product $a\frac{b}{c}$ von vornherein als ein vieldeutiger Ausdruck angesehen werden, wenngleich nicht ausgeschlossen ist, dass die dem letzteren zukommenden Werthe (welche sich aus den verschiedenen Werthen von $\frac{b}{c}$ durch Multiplication mit denselben ergeben) auch zufällig einander gleich ausfallen können. Die erste Formel sagt nun wieder aus, dass x einen gewissen von den gedachten Werthen vorstellen solle.

Es stellt dann xc ebenfalls einen der Werthe von $\left(a\frac{b}{c}\right)c$ vor, welch' letzteren

Ausdruck wir zunächst wiederum in dem Verdacht haben müssen, vieldeutig zu sein — weshalb denn das Zeichen der Unterordnung hier noch am Platze ist. Nun geht aber aus der darauf folgenden Doppelgleichung — welche selbst nur eine Anwendung des Associationsgesetzes — hervor, dass diese Vermuthung ungegründet, der Ausdruck nämlich $= ab$, also eindeutig ist, und muss darum jenes Zeichen $\Subset$ von nun an durch $=$ ersetzt werden.

Weiter folgt endlich die Schlussformel (181) aus der ihr vorausgehenden und aus der ersten wieder nur im Hinblick darauf, dass die angegebene Herleitung wie für den gedachten, so auch für jeden andern der Werthe des Ausdruckes $a\frac{b}{c}$ rechtskräftig ist.

Und zwar ist das Beziehungszeichen in (181) ein definitives: der erste Ausdruck bleibt dem letzten untergeordnet und wird ihm nicht etwa gleich, weil die Schlussfolgerungen sich hier nicht umkehren lassen. Der Versuch nämlich, sie umzukehren, scheitert an einer ganz bestimmten Stelle, indem aus der Proposition $xc = \left(a\frac{b}{c}\right)c$ nicht auf die erste $x \Subset a\frac{b}{c}$ zurückgeschlossen werden kann. Durch Kürzen einer Gleichung mit einem Factor kann ja, wie wir in § 50. hervorgehoben haben, durchaus keine Art von Werthübereinstimmung zwischen den stehenbleibenden Ausdrücken gefolgert werden, was eine unmittelbare Consequenz war von der der Vieldeutigkeit der Division zu Grunde liegenden Annahme, dass der Werth eines Productes sich nicht nothwendig zu ändern braucht, wenn sich ein Factor desselben ändert.

Die Gültigkeitsbedingungen dieser Herleitung sind keine andern als die aus der resultirenden Formel selbst ersichtlichen, und dasselbe gilt auch von den durch die noch folgenden Schlussreihen zu gewinnenden Theoremen.

Viertens hat man independent zu Werke gehend [oder auch unter Anwendung des letzten Satzes] weiter:

$x \Subset \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}, \quad x\frac{c}{b} \Supset a,$	$x \Subset b:(c:a), \quad (c:a)x \Supset b,$
$\left(x\frac{c}{b}\right)b \Supset ab, \quad x\left(\frac{c}{b}b\right) \Supset ab,$	$a\{(c:a)x\} \Supset ab, \quad \{a(c:a)\}x \Supset ab,$
$\left[x\frac{c}{b} \Subset \frac{xc}{b}, \quad \frac{xc}{b} \Supset a\right],$	$\left[(c:a)x \Subset (cx):a, \quad (cx):a \Supset b\right],$
$xc = ab, \quad x \Subset \frac{ab}{c},$	$cx = ab, \quad x \Subset (ab):c,$
(182) $\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} \Subset \frac{ab}{c};$	$b:(c:a) \Subset (ab):c,$

wobei ich zur Deduction linkerhand nur das folgende bemerken will.

In dem Ausdruck $\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}$ ist der Nenner $\frac{c}{b}$ ungeachtet seiner Einklammerung als ein vieldeutiger Ausdruck zu nehmen, sodass der ganze Ausdruck seine Vieldeutigkeit nicht allein derjenigen der letztinstanzlichen Division, sondern auch

derjenigen des dabei verwendeten Divisors selbst verdankt. Der Uebergang von der ersten zur zweiten Proposition wird nun durch Transposition des Divisors $\frac{b}{c}$ bewerkstelligt. Wäre der letztere eine eindeutig bestimmte Zahl, so müsste dabei das Subsumtionszeichen in ein Gleichheitszeichen verwandelt werden. Wo hingegen, wie hier, ein vieldeutiger Ausdruck (der Generalwerth des Nenners) transponirt wird, zeigt eine leichte Ueberlegung, dass dabei das Subsumtionszeichen in das entgegengesetzte verwandelt werden muss; es muss dies auch, abgesehen von dem in § 51. gesagten, schon von vornherein aus dem Grunde plausibel erscheinen, weil man Ursache hat, den Ausdruck $x\frac{c}{b}$ noch als einen vieldeutigen anzusehen.

Von der dritten zur vierten Proposition kommt das Associationsgesetz in Anwendung; [anstatt dieser beiden Propositionen könnte man jedoch auch die beiden in eckiger Klammer darunter geschriebenen und direct auf das Theorem (181) sich stützenden Propositionen zum Uebergang zu der nunmehr folgenden siebenten Gleichung benutzen, und zwar ist dann der Schluss von der zweiten und fünften auf die sechste ein reiner Syllogismus und findet gemäss dem Theorem (A) der Einleitung Nr. 20. a fortiori statt; dagegen kann dieser Schluss nicht umgekehrt, d. h. es kann nicht von der sechsten und fünften auf die zweite zurückgeschlossen werden].

In der siebenten Proposition muss Gleichheit bestehen, weil auch die linke Seite derselben eindeutig geworden ist, und erkennt man dadurch nachträglich, dass auch in der dritten und vierten Proposition die linksseitigen Ausdrücke nur scheinvieldeutig und die Subsumtionszeichen nur provisorische waren, d. h. durch Gleichheitszeichen ersetzt werden durften.

Da aus der dritten Gleichung abermals nicht auf die zweite Proposition zurückgeschlossen werden kann, so lässt sich die ganze Schlussreihe in keiner Weise umkehren, und findet deshalb im Endresultate definitiv nur Unterordnung, nicht aber Gleichheit statt. —

Fünftens hat man:

$x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}, \quad xb \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{c},$	$x \mathrel{=\!\!\!\in} (a:b):c, \quad cx \mathrel{=\!\!\!\in} a:b,$
$(xb)c = a = x(bc), \quad x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{bc},$	$b(cx) = a = (bc)x, \quad x \mathrel{=\!\!\!\in} a:(bc),$
(183) $\frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b} = \frac{a}{bc},$	$(a:b):c = a:(bc).$

Das Gleichheitszeichen in der resultirenden Proposition ist hier dadurch gerechtfertigt, dass die Reihe der Schlussfolgerungen sich stets umkehren lässt.

Schliesst man von links nach rechts der Kette entlang, so folgt (linkerhand z. B.): $\frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b} \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{bc}$, dagegen wenn man die ganze Kette von Schlüssen rückwärts durchläuft, folgt mit demselben Rechte: $\frac{a}{bc} \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}$; es kommt darnach jeder Werth des einen Ausdrucks unter den Werthen des andern vor, und umgekehrt,

d. h. es geht aus diesen beiden Beziehungen nach Einleitung Nr. 20. (E) in der That die Gleichheit beider Ausdrücke hervor.

Es verdient als besonders auffallend hervorgehoben zu werden, dass in der einen von diesen beiden Formeln, also für die eine der beiden inversen Operationen, die Operationsglieder b und c beiderseits die entgegengesetzte, bei der andern dagegen beiderseits die nämliche Reihenfolge haben; und es scheint sonach, als ob erst dann eine wahrhaft symmetrische Bezeichnungsweise erzielt wäre, wenn man die bisherige dahin abänderte, dass bei der „Theilung" das active Operationsglied (Nenner) dem passiven (Zähler) stets *voran*gestellt würde — wogegen bei der „Messung" der umgekehrte Gebrauch festzuhalten bliebe.

In ähnlicher Weise kommt endlich *sechstens* die nun keines weiteren Commentars bedürftige Kette von Schlüssen zu Stande:

$$x \Leftarrow \frac{a:b}{c}, \quad xc \Leftarrow a:b, \quad b(xc) = a,$$
$$(bx)c = a, \quad bx \Leftarrow \frac{a}{c}, \quad x \Leftarrow \frac{a}{c}:b,$$

durch deren Umkehrbarkeit wieder das Gleichheitszeichen in der nun als Endresultat hervorgehenden Formel:

$$(184) \qquad \frac{a:b}{c} = \frac{a}{c}:b$$

gerechtfertigt ist. Es gibt diese Formel, in Worte gefasst, den Lehrsatz: *Die beiden umgekehrten Operationen einer associativen Operation sind stets miteinander commutativ.*

Man könnte den Beweis dieses eleganten Resultates auch durch die Probe der inversen Operationen zu leisten versuchen, und zu dem Ende beiderseits — vorne mit b und hinten mit c — multipliciren. Auf diese Weise ergibt sich in der That:

$$b\frac{a:b}{c}c = b\left(\frac{a}{c}:b\right)c,$$

oder:

$$b\left\{\frac{a:b}{c}c\right\} = \left\{b\left(\frac{a}{c}:b\right)\right\}c,$$
$$b(a:b) = \frac{a}{c}c,$$
$$a = a,$$

d. h. die Probe stimmt vollkommen, indem man wirklich so auf eine Identität geführt wird. Indessen könnte aus dieser Betrachtung doch nur der Schluss gezogen werden, dass:

$$\frac{a:b}{c} \Join \frac{a}{c}:b,$$

und hätte das Coordinationszeichen $\Join$ hier blos den Sinn, dass, wenn mit beiden Seiten der Formel solche Rechnungen vorgenommen werden, welche die inversen Operationen zum Wegfall bringen, das gleiche Resultat herauskommen muss. —

§ 82. Fortsetzung.

Im Ueberblick hat man nun, den Formelgruppen ([illegible] und (141) des § 57. entsprechend, die Zusammenstellung:

(185) $$\frac{a}{c:b} \succcurlyeq \frac{a}{c}b = a(b:c) \preccurlyeq b:\frac{c}{a},$$

(186) $$a\frac{b}{c} \preccurlyeq \frac{ab}{c} \succcurlyeq \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}, \quad \Big| \quad b:(c:a) \preccurlyeq (ab):c \succcurlyeq (a:c)b;$$

(187) $$\frac{a}{bc} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}, \quad \Big| \quad \frac{a}{c}:b = \frac{a:b}{c}, \quad \Big| \quad (a:b):c = a:(bc),$$

wobei in der ersten Zeile unter gewissen bereits angegebenen Bedingungen, welche sich nur auf die Ausführbarkeit einiger Divisionen beziehen, die Subsumtionszeichen auch in Gleichheitszeichen verwandelt werden dürfen.

Es stellen diese Formeln ein in seiner Art vollständiges System von Consequenzen zu der als Prämisse angenommenen Formel (176) des Associationsgesetzes vor — natürlich in seiner Verbindung mit den beiden zur Definition der Theilung und Messung dienenden, sowie auch mit den übrigen nicht mehr durch Formeln ausdrückbaren Elementarvoraussetzungen, welche in § 80. angenommen wurden und die Prämissen zu dem „zweiten“ Fall des § 50. constituirten.

Im Falle der Eindeutigkeit der inversen Operationen (d. i. im „ersten“ Falle) gehen die sämmtlichen Subsumtionszeichen in Gleichheitszeichen über. Hier finden sich alsdann 16 Ausdrücke durch 10 von einander unabhängige Gleichungen gruppenweise verknüpft, und zwar — *was bemerkenswerth erscheint* — durch *drei* einfache, *zwei* doppelte und *eine* dreifache Gleichung.

Jene 16 Ausdrücke nebst den zweien, die im Associationsgesetz (176) selbst enthalten sind — zusammen 18 —, entsprechen genau den sämmtlichen $3^2 = 9$ Variationen, welche aus den drei Zeichen · (mal), ⁄ (durch) und : (zu) mit Wiederholungen zu je zweien gebildet werden können, und lässt sich hieraus in einer Hinsicht schon eine Garantie für die Vollständigkeit der angegebenen Algorithmen entnehmen.

Das angegebene System von Conclusionen (185), (186) und (187) ist nun auch insofern ein vollständiges, als sich zwischen je zwei solchen Ausdrücken, welche hier getrennten Gleichungsgruppen angehören — sogar im Falle der Eindeutigkeit — keinerlei Beziehung wird nachweisen lassen.

Für den allgemeinen Fall, denjenigen der Vieldeutigkeit, ist ferner noch hervorzuheben, dass zwischen dem ersten und dem letzten Ausdruck der Propositionen (185), sowie auch zwischen den jeweiligen beiden Randausdrücken der beiden in (186) nebeneinandergestellten Doppelbeziehungen, im allgemeinen lediglich die Beziehung der Coordination besteht, insoferne diese letzteren, z. B., je einem und demselben mittleren Ausdruck untergeordnet erscheinen, d. h. es ist eben nur:

$$\frac{a}{c:b} \divideontimes b : \frac{c}{a} \left[\text{obgleich } \frac{a}{c:b} (=) b : \frac{c}{a} \text{ für } \frac{a}{c} \text{ nebst } b:c\right]$$

$$a\frac{b}{c} \divideontimes \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}, \quad \Bigg| \quad b:(c:a) \divideontimes (a:c)b,$$

wo überdies die beiden letzten Coordinationen — selbst unter der Annahme, dass alle möglichen Divisionen stets unbeschränkt ausführbar wären — specifische Geltung behalten, nämlich eine andere Beziehung — eine Werthgemeinschaft — nicht aufkommen lassen.

Ausreichende Bürgschaft für die *Vollständigkeit* des obigen Systems von Consequenzen wird übrigens weiter unten durch die Betrachtungen des § 89. sqq. gegeben, und gilt dasselbe auch hinsichtlich der andern Zusammenstellungen, die ich in den bis dahin noch folgenden Paragraphen nachher entwickeln werde.

Was das Verhältniss des gegenwärtigen Algorithmus zu den Gesetzen der gewöhnlichen (allgemeinen) Arithmetik (cf. § 62.) betrifft, so übersieht man sofort, wie bei Voraussetzung der Eindeutigkeit (der Divisionen) das Hinzutreten des Commutationsgesetzes — in Folge dessen auch Doppelpunkt und Bruchstrich gleichgültig werden — bewirkt, dass diese Formeln vollständig in die dortigen (152) und (153) übergehen, und zwar geht dabei (185) nebst (186) in (152) und (187) in (153) über.

Der Umstand aber, dass auch im Falle der Vieldeutigkeit (der Divisionen) neben den Subsumtionszeichen noch immerhin die Gleichheitszeichen vorherrschen [cf. (180)], lässt erkennen, dass man im Rechnen mit dergleichen vieldeutigen Ausdrücken und obschon theilweise gehemmt im Anwenden der gemeinen arithmetischen Regeln, doch eine ziemlich grosse Freiheit der Bewegung geniessen, dass man jederzeit noch eine beträchtliche Mannigfaltigkeit von Transformations- und Schlussmitteln zur Verfügung haben wird.

Es sind jetzt noch die Gesetze anzugeben, welche den „Umformungsregeln“ (136) des § 56. entsprechen.

In diesem Betreff gelten zunächst die Formeln:

$$(188) \qquad \frac{an}{n:b} \ni \frac{a}{n}(nb) = ab = (an)(b:n) \in (nb) : \frac{n}{a},$$

wobei die Subsumtionen wieder in Gleichheit übergehen, sobald die Voraussetzung zutrifft, dass jeder Werth des linken Randausdruckes durch b theilbar, resp. jeder des rechten Randausdruckes durch a messbar sei.

Die beiden mittleren Gleichungen dieser vierfachen Beziehung bewahrheiten sich unmittelbar durch die Anwendung des Associationsgesetzes. Ebenso ist es leicht, durch Anwendung zweier von den in (185) enthaltenen Theoremen auf die beiden Randausdrücke von (188) nachzuweisen, dass die letzteren dem Producte ab übergeordnet sind [cf. (179) und (180)]. —

Hiezu treten nun weiter die Beziehungen:

$$(189)\quad \left\{ \begin{array}{c|} \dfrac{an}{bn} \\ \dfrac{n}{b} : \dfrac{n}{a} \end{array} \right. \succeq \frac{a}{b} = \frac{\left(\frac{a}{n}\right)}{\left(\frac{b}{n}\right)} \succeq \frac{a}{n} \cdot \frac{n}{b} \;\Bigg\|\; (n:b)(a:n) \preceq (a:n):(b:n) = a:b \preceq \left| \begin{array}{c} (na):(nb) \\ \dfrac{n:b}{n:a} \end{array} \right.$$

in welchen ebenfalls, soferne nicht noch latente Gültigkeitsbedingungen hinzutreten sollen, die sämmtlichen mit n gebildeten Ausdrücke nicht unter sich, sondern nur mit dem von n unabhängigen Ausdrucke direct in Vergleichung gesetzt werden müssen — so wie dies ja schon bei (136) der Fall war, und auch später bei allen Umformungsregeln stillschweigend vorausgesetzt sein wird. Bei dieser Auffassung aber — wo also z. B. die letzte Beziehung linkerhand nun: $\frac{a}{b} \succeq \frac{a}{n} \cdot \frac{n}{b}$ sein wird — sind dann die Gültigkeitsbedingungen in der That nur die selbstverständlichen.

Natürlich soll von den beiden auf einer Seite eines (einfachen) Verticalstrichs stehenden Ausdrücken jeder als dem Ausdruck auf der andern Seite *einzeln* übergeordnet verstanden werden.

Von den Propositionen (189) möchte ich als die charakteristischsten die beiden hervorheben, welche am Ende der nachstehenden Schlussketten resultiren und demnach besonders leicht direct zu beweisen sind:

$x \preceq a : b,\quad bx = a,\quad n(bx) = na,$	$x \preceq \frac{a}{b},\quad xb = a,\quad (xb)n = an,$
$n(bx) = (nb)x,\quad (nb)x = na,\quad x \preceq (na):(nb),$	$(xb)n = x(bn),\quad x(bn) = an,\quad x \preceq \frac{an}{bn},$
(190) $\quad a : b \preceq (na) : (nb).$	$\frac{a}{b} \preceq \frac{an}{bn}.$

Am bequemsten lassen übrigens die Theoreme (188) und (189) sich durch Anwendung der Fundamentalgesetze (185) bis (187) selber beweisen, und wird man zu einer jeden derselben ohne Schwierigkeit eines der Theoreme ausfindig machen, welche dazu behilflich sind, die eine Seite der Proposition in die andere überzuführen. Nur darf hiebei nicht ausser Acht gelassen werden, dass möglicherweise nicht sogleich ein endgültiges Resultat sich ergeben wird, vielmehr die Anwendung des einen Satzes nur ein provisorisches und die des andern erst das definitive Beziehungszeichen wird liefern können. Es genügt wohl, nur ein paar Beispiele herzusetzen.

Da $\frac{ab}{c} \succeq \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}$ (186), so ist $\frac{an}{bn} \succeq \frac{a}{\left(\frac{bn}{n}\right)}$; und da nun $\frac{bn}{n} \succeq b$, folglich auch $\frac{a}{\left(\frac{bn}{n}\right)} \succeq \frac{a}{b}$, so ist a fortiori $\frac{an}{bn} \succeq \frac{a}{b}$.

Da auch $\frac{a}{bc} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}$ (187), so ist $\frac{an}{bn} = \frac{\left(\frac{an}{n}\right)}{b}$; aber $\frac{an}{n} \succeq a$, folglich wieder $\frac{an}{bn} \succeq \frac{a}{b}$. —

Da $a\,\frac{b}{c} \preceq \frac{ab}{c}$ (186), so ist $\frac{a}{n}\cdot\frac{n}{b} \preceq \frac{\frac{a}{n}n}{b}$, und da $\frac{a}{n}n = a$, so ist gefunden $\frac{a}{n}\cdot\frac{n}{b} \preceq \frac{a}{b}$. Dies folgt auch leicht direct, indem für $x \preceq \frac{a}{n}\cdot\frac{n}{b}$ sein muss: $xb \preceq \left(\frac{a}{n}\cdot\frac{n}{b}\right)b = \frac{a}{n}\left(\frac{n}{b}b\right) = \frac{a}{n}n = a$, also $xb = a$, $x \preceq \frac{a}{b}$. —

Da $\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} \preceq \frac{ab}{c}$ (186), so ist $\frac{\left(\frac{a}{n}\right)}{\left(\frac{b}{n}\right)} \preceq \frac{\frac{a}{n}n}{b} = \frac{a}{b}$, also $\frac{\left(\frac{a}{n}\right)}{\left(\frac{b}{n}\right)} \preceq \frac{a}{b}$. Diese Unterordnung ist aber nur eine provisorische, denn aus $\frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b} = \frac{a}{bc}$ (187) folgt andrerseits $\frac{\left(\frac{a}{n}\right)}{\left(\frac{b}{n}\right)} = \frac{a}{\frac{b}{n}n}$, worin $\frac{b}{n}n = b$; d. h. es ist definitiv $\frac{\left(\frac{a}{n}\right)}{\left(\frac{b}{n}\right)} = \frac{a}{b}$. —

Auf verschiedenen Wegen ist noch leicht zu zeigen, dass $\frac{n}{b} : \frac{n}{a} \succeq \frac{a}{n}\cdot\frac{n}{b}$ ist, jedoch nur bedingungsweise, nämlich für $\frac{n}{b} : n$; u. s. w. —

Bei Eindeutigkeit der Divisionen, wo alle Unterordnungen in Gleichheit übergehen, sind es sonach $3 \cdot 4 = 12$ Ausdrücke, aus denen gemäss ebensovieler Gleichungen die Zahl n sich heraushebt.

Irreducibel dagegen sind die nachstehenden 6 Paare von (unter leicht angebbaren Bedingungen) einander gleichen Ausdrücken:

$$(191)\quad \left\{\begin{array}{l|l} \frac{an}{\left(\frac{n}{b}\right)} = (an)\,\frac{b}{n}. & (a:n)(nb) = (nb):(n:a), \\ \frac{na}{\left(\frac{n}{b}\right)} = (na)\,\frac{b}{n}, & (a:n)(bn) = (bn):(n:a), \\ \frac{na}{n:b} = (na)(b:n), & \frac{a}{n}(bn) = (bn):\frac{n}{a}, \end{array}\right.$$

desgleichen die 6 Tripel von bedingungsweise unter sich gleichen Ausdrücken:

$$(192)\quad \left\{\begin{array}{l|l} \frac{\left(\frac{a}{n}\right)}{b:n} = \frac{a}{n}\,(n:b) = (n:b):\frac{n}{a}, & \frac{\left(\frac{n}{b}\right)}{n:a} = \frac{n}{b}\,(a:n) = (a:n):\frac{b}{n}, \\ \frac{a:n}{b:n} = (a:n)(n:b) = (n:b):(n:a), & \frac{\left(\frac{n}{b}\right)}{\left(\frac{n}{a}\right)} = \frac{n}{b}\cdot\frac{a}{n} = \frac{a}{n}:\frac{b}{n}, \\ \frac{a:n}{\left(\frac{b}{n}\right)} = (a:n)\frac{n}{b} = \frac{n}{b}:(n:a), & \frac{n:b}{\left(\frac{n}{a}\right)} = (n:b)\,\frac{a}{n} = \frac{a}{n}:(b:n), \end{array}\right.$$

und endlich die 6 einzelnen Ausdrücke:

(193) $\frac{an}{nb}, \quad \frac{na}{nb}, \quad \frac{na}{bn}.$ | $(an):(nb), \quad (an):(bn), \quad (na):(bn).$

Die $3 \,.\, 2^4 = 48$ in den vorstehenden Formeln (188), (189) und (191) bis (193) vorkommenden, die Zahl n enthaltenden Ausdrücke sind gerade die Hälfte von denen, die überhaupt gebildet werden können, indem man a sowohl als b mit n und darauf die beiden Ergebnisse miteinander verknüpft — versteht sich allemal durch die Operationen des (Vor- oder Nach-)Multiplicirens, des Messens oder des Theilens. Aus dieser angegebenen Hälfte geht die andere noch durch Vertauschung von a und b hervor; von der letzteren aber werden *bei späteren Untersuchungen* nur noch die 16 aus (188) und (191) sich ergebenden Ausdrücke in Betracht kommen, welche in der allgemeinen Arithmetik noch dem Producte ab gleich sind, und daher auch bei andern Algorithmen in Beziehung zu demselben treten können. Im ganzen sind es also $48 + 16 = 64$ verschieden gebaute Ausdrücke, welche einem der drei folgenden: ab, $a:b$, $\frac{a}{b}$ äquivalent werden können, und alle diese Ausdrücke, oder wenigstens nahezu die Hälfte derselben (oben 24) werden bei einem jeden Algorithmus auf ihre Reductionsfähigkeit zu prüfen sein, woferne man über die Gesetze des Algorithmus einen vollständigen Ueberblick erlangen will.

Die Frage aber nach der Reductionsfähigkeit eines bestimmten dieser Ausdrücke kann vorerst nur entschieden werden, indem man mit dem letzteren alle zulässigen Umformungsmittel durchprobirt, und wird man bei solchen Gelegenheiten inne, wie erstaunlich die Menge der Transformationen ist, welche schon mit so einfach gebauten Ausdrücken nach den Gesetzen eines Algorithmus — wie (185) bis (187) — vorgenommen werden können.

Zum Schlusse will ich noch in Bezug auf die Verknüpfungsgesetze von *vier* Zahlen erwähnen, dass dem dritten Satze (169) oder der Multiplicationsregel zweier Brüche, hier nur folgende Proposition entspricht:

(194) $$(a:b)\,\frac{c}{d} \Subset \frac{(ac):b}{d} = \frac{ac}{d}:b,$$

aus welcher als specieller Fall zwar z. B. geschlossen werden kann:

(195) $$\begin{cases} (a:b)\,\frac{n}{n} \Subset \frac{an}{n}:b \Supset a:b, \\ \frac{c}{d} \Subset \frac{(nc):n}{d} \Supset (n:n)\,\frac{c}{d}, \end{cases}$$

ohne dass jedoch zwischen den Randausdrücken, sowie überhaupt zwischen:

(196) $x\,\frac{n}{n} \not\Subset x, \; \left[\text{modul } \frac{xn}{n}\right]$ | $y \not\Subset (n:n)y, \; [\text{mod. } (ny):n, \text{ cf. p. } 28],$

mehr als eine blosse Coordination nachgewiesen werden könnte.

Von besondrem Nutzen wird auch noch die Bemerkung sein, dass die Propositionen gelten:

(197) $a\,\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b} \Subset \frac{ab}{b},$ | $(ba):b \Supset (c:b)(b:c)\,a,$

deren Gültigkeit ebenso wie bei den vorhergehenden nur durch die selbstverständlichen Bedingungen beschränkt ist. Dagegen kann ohne die Annahme der Eindeutigkeit zwischen den Ausdrücken:

(198) $a\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b} \not\asymp a,$ | $a \not\asymp (c:b)(b:c)a,$

abermals keine Beziehung abgeleitet werden. Im Gegensatz hiezu gilt jedoch die Gleichung:

(199)$_\alpha$ $\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}\cdot a = a,$ | $a = a(b:c)(c:b)$

unter der latenten Bedingung:

(199)$_\beta$ $a:b,$ | $\frac{a}{c},$

was man leicht als eine Identität erkennt, wenn man links $b(a:b)$, resp. rechts $\frac{a}{c}c$ für a einsetzt. —

§ 83. Die Stellvertreter des Associationsgesetzes.

Unter diesem Namen verstanden wir diejenigen Gesetze der Multiplication, welche fähig sind, in dem Vereine der Elementarvoraussetzungen das Associationsgesetz zu ersetzen, welche also in Verbindung mit dem Commutationsgesetze (oder schon für sich allein) die Regeln der gemeinen Arithmetik nach sich ziehen. Ohne das letztere jedoch werden dieselben, wie sich zeigen wird, zumeist eigenthümliche und von denen des Associationsgesetzes grundverschiedene Consequenzen haben, die zu einem Theile auch für die dritte Operationsstufe besonderes Interesse besitzen. Es werden diese Consequenzen mit den Regeln der gemeinen Arithmetik zwar nicht in Widerspruch, jedoch auch niemals völlig identisch sein, woferne nur die Voraussetzung der Eindeutigkeit und unbedingten Ausführbarkeit der Divisionen aufgegeben wird.

Die gedachten stellvertretenden Gesetze können sämmtlich erhalten werden, indem man von den 12 gemeinhin äquivalenten Darstellungen eines aus drei Zahlen gebildeten Productes (151) irgend zwei solche einander gleichsetzt, deren Gleichheit nicht lediglich aus dem Commutationsgesetze hervorgeht (und auch nicht gerade das Associationsgesetz selbst vorstellt).

Somit ist zunächst die Gleichsetzung der in (151) *untereinander* stehenden Ausdrücke ausgeschlossen.

In diesem Betreff könnten allerdings noch die Consequenzen des Gesetzes, wonach jedes Product aus drei Zahlen auch rückwärts gelesen werden darf:

(200) $$a(bc) = (cb)a$$

u. s. w. näher untersucht werden. Es geht dieses Gesetz zwar aus dem Commutationsgesetze (durch dessen zweimalige Anwendung) hervor, jedoch ohne dass dieser Schluss auch umgekehrt und aus (200) wieder das Commutationsgesetz gefolgert werden könnte.

Die Mittheilung der gedachten (äusserst dürftigen) Consequenzen kann indessen füglich unterbleiben [vergleiche noch §§ 90. und 91.].

Ferner ist wie gesagt auszuschliessen die Gleichsetzung derjenigen Ausdrücke, welche das Associationsgesetz miteinander verknüpft, indem ja der daraus entspringende Algorithmus sich bereits erledigt findet. In der That verknüpft unser Grundgesetz der associativen Multiplication die 12 Ausdrücke in folgender Art:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} a(bc)=(ab)c, & a(cb)=(ac)b, \\ b(ca)=(bc)a, & b(ac)=(ba)c, \\ c(ab)=(ca)b, & c(ba)=(cb)a, \end{cases}$$

und gehen also diese Gleichungen aus irgend einer von ihnen, z. B. aus der ersten, durch blosse Vertauschung der Buchstaben hervor.

Es erübrigt hingegen, diejenigen Gesetze zu betrachten, welche durch Gleichsetzung irgend zweier andern von den Ausdrücken (42) erhalten werden, wobei wiederum diejenigen Formeln zu einerlei Gesetz gehören und nur einen einzigen Algorithmus begründen werden, die durch blossen Wechsel der Buchstaben in einander übergeführt werden können. Ich werde diese Algorithmen etwas ausser der Reihe mit römischen zum Theil durch Indices unterschiedenen Ziffern bezeichnen.

Darnach bedingt nun z. B. die Gleichsetzung zweier in einer Zeile *nebeneinander* befindlicher Ausdrücke (151) zugleich auch deren Gleichheit mit dem dritten in dieser Zeile daneben stehenden Ausdruck, und erhalten wir so zwei neue Algorithmen. Denselben liegt als Voraussetzung die Eigenschaft der Multiplication zu Grunde, wonach es gestattet ist, je in dem einen der beiden Producte, die sich aus drei in bestimmter Ordnung genommenen Zahlen bilden lassen, diese Factoren *cyklisch* zu vertauschen.

Jedes dieser beiden Gesetze der „cyklischen Multiplication“ verknüpft nur die Hälfte der 12 Ausdrücke (151) zu drei und drei, und zwar involvirt das eine derselben die beiden Doppelgleichungen V_a, das andre die V_b, welche von den vorigen gänzlich unabhängig sind:

V_a.	V_b.
$(bc)a=(ca)b=(ab)c,$	$a(bc)=b(ca)=c(ab),$
$(cb)a=(ac)b=(ba)c.$	$a(cb)=b(ac)=c(ba).$

Es bleibt endlich etwa das erste sowie das letzte der in (151) zusammengestellten Producte — die ja beide durch die Stellung der Klammer ein verschiedenes Gepräge haben — je mit den 5 übrigen Ausdrücken zu vergleichen, die sich weder in derselben Colonne noch in derselben Zeile mit ihnen befinden. Eine leichte Prüfung zeigt, dass man auf diese Weise noch 7 Arten von Multiplication erhält, denen eine wesentlich eigenartige Grundeigenschaft beigelegt ist.

Vier von diesen Arten besitzen ebenso wie die beiden cyklischen nur die halbe Tragweite wie die andern. Sie verknüpfen nur 6 von den 12 Ausdrücken unter sich (paarweise), ohne dass jemals aus den Gleichungen eines dieser Algorithmen eine Beziehung für einen der 6 nicht in ihm vorkommenden Productausdrücke ableitbar wäre.

Dahin gehört erstens das Gesetz (VI_a), wonach in einem Product mit voranstehender Klammer die beiden letzten Factoren vertauscht werden dürfen [cf. § 88.], zweitens das Gesetz (VI_b), wonach im Product mit hintanstehender Klammer die beiden ersten Factoren commutirt werden dürfen, das ist also:

VI_a.	VI_b.
$(ab)c = (ac)b,$	$a(bc) = b(ac),$
$(bc)a = (ba)c,$	$b(ca) = c(ba),$
$(ca)b = (cb)a;$	$c(ab) = a(cb);$

drittens und viertens die beiden Gesetze, wonach in der einen oder andern Art von Producten die beiden Randfactoren vertauschbar sind, während der mittlere Buchstabe seinen Platz beibehält:

IV_a.	IV_b.
$(ab)c = (cb)a,$	$a(bc) = c(ba),$
$(bc)a = (ac)b,$	$b(ca) = a(cb),$
$(ca)b = (ba)c,$	$c(ab) = b(ac).$

Bei einem jeden dieser vier Gesetze bleibt stets die Klammer unverrückt an ihrer Stelle.

Dagegen umschliesst sie in den noch restirenden drei Gesetzen auf der einen Seite die beiden ersten, auf der andern die beiden letzten Factoren, und ferner verknüpfen diese Gesetze je alle 12 Ausdrücke (151) unter sich paarweise.

Das eine (II_a) derselben gestattet, die beiden letzten Factoren unter sich — zugleich mit der Klammer — zu versetzen, das andere (II_b) ebenso die beiden ersten. Es sind die folgenden:

II_a.		II_b.	
$a(bc) = (ac)b,$	$a(cb) = (ab)c,$	$a(bc) = (ba)c,$	$a(cb) = (ca)b,$
$b(ca) = (ba)c,$	$b(ac) = (bc)a,$	$b(ca) = (cb)a,$	$b(ac) = (ab)c,$
$c(ab) = (cb)a,$	$c(ba) = (ca)b.$	$c(ab) = (ac)b,$	$c(ba) = (bc)a.$

Endlich das dritte dieser Gesetze gibt die Erlaubniss, in den mit der Klammer beginnenden Producten die drei Factoren vorwärts [illegible]ligenden Producten, sie rückwärts cyklisch [illegible]lesmal zugleich auch die Klammer mit

$$\text{III.}\quad \begin{cases} (ab)c = b(ca)\,, & (ba)c = a(cb)\,, \\ (bc)a = c(ab)\,, & (cb)a = b(ac)\,, \\ (ca)b = a(bc)\,, & (ac)b = c(ba). \end{cases}$$

Somit sind denn im ganzen 10 Algorithmen möglich, welche Eigenschaften der gemeinen Multiplication zur Voraussetzung haben, die sich auch allein conserviren und isolirt nach ihren Consequenzen untersuchen lassen. Je nach dem Charakter oder der Gliederung dieser Consequenzen zerfallen dieselben in 6 verschiedene Typen, und findet die Reihenfolge, in der diese Typen nunmehr durchgegangen werden sollen, sich bereits durch die Ziffern I. bis VI. markirt.

Der Algorithmus I., d. i. das schon erledigte Associationsgesetz, macht sonach für sich allein den ersten Typus aus.

§ 84. Zweiter Typus von Algorithmen. Conjugation.

Hiezu rechne ich diejenigen (beiden) Algorithmen, deren Gesetze sich in Formeln ausgedrückt auf eine Weise gliedern, welche der Gliederung des Typus I. der associativen Operationen am nächsten kommt; es sind das die beiden Algorithmen II_a. und II_b. des vorigen Paragraphen.

Die Prämisse des Algorithmus II_a.:

(201) $$a(bc) = (ac)b$$

als allgemein gültiges Gesetz adoptirt, definirt eine gewisse Art der Multiplication von ganz bestimmtem Charakter, die wir zunächst betrachten wollen.

Wird in (201) $b = a$ gesetzt, so entsteht: $a(ac) = (ac)a$, und aus dem Anblick dieser Gleichung geht hervor, dass diese Art von Multiplication für eine ganze Klasse von besondern Fällen commutativ sein wird. Immer dann nämlich ist es gestattet, die beiden Factoren eines Productes zu vertauschen, wenn der eine Factor ein Multiplicand des andern ist, m. a. W. wenn dieser sich durch jenen messen lässt.

Woferne man also die Messung hier als unbeschränkt ausführbar gelten liesse, d. h. annähme, dass die Quotienten oder Verhältnisse stets Zahlen sind, deren Multiplication wiederum dem Gesetze (201) unterworfen ist, so müsste nach ebendiesem Gesetze wegen:

(202) $$ab = a\{a(b:a)\} = [a(b:a)]\,a = ba$$

das Commutationsgesetz ganz allgemein bestehen. Das Gesetz (201) würde darnach (bei Eindeutigkeit) genau die Gesetze des vorigen Abschnittes, die den wesentlichen Inhalt der gewöhnlichen Arithmetik ausmachen, nach sich ziehen. Bei dieser Annahme ist m. a. W. die

Prämisse (201) für sich allein schon fähig, das Associationsgesetz mitsammt dem Commutationsgesetze zu ersetzen.

Ganz anders, wenn die Messung als nur bedingungsweise ausführbar angenommen wird, wo dann die Fälle von commutativen Producten als particulare ausser Betracht gelassen werden können.

Bei der letzteren Annahme erhält man so als Consequenzen von (201) nur die nachstehende Gruppe von Beziehungen, die wieder im Falle der Eindeutigkeit (der Divisionen) in eine *dreifache*, zwei *doppelte* und drei *einfache* Gleichungen übergehen:

$$(203)\qquad \left\{ \begin{array}{c|c|c} \dfrac{a}{c:b} & & (ba):c \\ & \mathrel{=\!\!\!<} & \\ a\,(b:c) & & \dfrac{ab}{c} \end{array} \right. ;$$

$$(204)\qquad a\,\frac{b}{c} = \frac{a}{c}\,b \mathrel{=\!\!\!<} \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}, \qquad (a:c)\,b \mathrel{=\!\!\!<} a:\frac{c}{b} \mathrel{=\!\!\!\!\times\!\!\!\!=} b:(c:a);$$

$$(205)\qquad \frac{a}{bc} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}, \qquad \frac{a}{b}:c = (a:c):b, \quad \frac{a:c}{b} = a:(cb),$$

wobei in (203) durch die verticalen Striche angedeutet werden soll, dass jeder von den links stehenden Ausdrücken für sich untergeordnet sein soll einem jeden von den beiden rechts stehenden Ausdrücken. Die vier Ausdrücke dieser ersten Beziehung könnten auch so in einem Kreise herum geschrieben werden, dass ein jeder von ihnen seinen benachbarten entweder über- oder untergeordnet erscheint.

In der zweiten Doppelbeziehung (204) gehen unter gewissen nur die Ausführbarkeit von Divisionen betreffenden Bedingungen die Beziehungszeichen auch in Gleichheitszeichen über. Diese Bedingungen sowie überhaupt die Gültigkeitsbedingungen der ganzen Gruppe von Formeln sind leicht aus der weiter unten folgenden Herleitung derselben zu entnehmen.

Die Herleitung und damit zugleich den Beweis der Formeln kann ich von jetzt an stets in gedrängtester Kürze angeben. Denn einerseits sind wir durch die in der Einleitung eingeführten Zeichen der Werthgemeinschaft in den Stand gesetzt, auch bei Untersuchungen über vieldeutige Ausdrücke die Vortheile einer kurzen Zeichensprache geniessen und dieselben *durch ununterbrochene Ketten von Formeln* ausdrücken zu können, und andrerseits ist der hiebei leitende Gedankengang, die bei diesen Untersuchungen anzuwendende Methode, schon zur Genüge in § 81. sq. auseinandergesetzt worden.

Ad (203) hat man die vier nicht umkehrbaren Schlussketten:

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} a(b:c),\quad xc \mathrel{=\!\!\!\in} \{a(b:c)\}c = a\{c(b:c)\} = ab,\quad x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{ab}{c},$$

also:

$$a(b:c) \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{ab}{c}.$$

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} a(b:c),\quad cx \mathrel{=\!\!\!\in} c\,\{a(b:c)\} = \{c(b:c)\}\,a = ba,\quad x \mathrel{=\!\!\!\in} (ba):c,$$

also:

$$a(b:c) \mathrel{=\!\!\!\in} (ba):c.$$

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{c:b},\quad x(c:b) \ni\!\!= a,\quad b\,\{x(c:b)\} \ni\!\!= ba,\quad \{b(c:b)\}x = cx = ba,\quad x \mathrel{=\!\!\!\in} (ba):c,$$

also:

$$\frac{a}{c:b} \mathrel{=\!\!\!\in} (ba):c.$$

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{c:b},\quad x(c:b) \ni\!\!= a,\quad \{x(c:b)\}\,b \ni\!\!= ab,\quad x\,\{b(c:b)\} = xc = ab,\quad x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{ab}{c},$$

also:

$$\frac{a}{c:b} \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{ab}{c}.$$

Ad (204) ergibt sich zuerst durch directe Umformung nach (201):

$$a\frac{b}{c} = \left(\frac{a}{c}c\right)\frac{b}{c} = \frac{a}{c}\left(\frac{b}{c}c\right) = \frac{a}{c}b$$

— die erste der dort angegebenen Gleichungen, welche somit die Hauptbeziehung des ganzen Algorithmus vorstellt.

Ferner hat man die Schlusskette:

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{c}b,\quad \frac{x}{b} (=) \frac{a}{c},\quad \frac{x}{b}c \ni\!\!= a,\quad \frac{x}{b}c = x\frac{c}{b},\quad x\frac{c}{b} \ni\!\!= a,\quad x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)},$$

also:

$$\frac{a}{c}b \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}.$$

Diese Kette ist im allgemeinen nicht umkehrbar, da man, um sie rückwärts durchlaufen zu dürfen, stillschweigend die Annahme machen müsste, dass x durch b theilbar ist — eine Forderung, die im Endresultat keineswegs als eine nothwendige eingeschlossen erscheint.

Dagegen wird die Reihe der Schlüsse umkehrbar, sobald die genannte Voraussetzung zutrifft, sobald also jeder Werth von $\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}$ durch b theilbar ist, oder es gilt:

$$\frac{a}{c}b = \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} \quad \text{für} \quad \frac{\left[\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}\right]}{b},$$

d. h. wie schon (pag. 246) gesagt, unter der Bedingung, dass der rechts angemerkte Ausdruck einen Sinn habe.

In ähnlicher Weise hat man die Schlusskette:

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} (a:c)b,\quad \frac{x}{b} (=) a:c,\quad a \mathrel{=\!\!\!\in} c\frac{x}{b} = \frac{c}{b}x,\quad x \mathrel{=\!\!\!\in} a:\frac{c}{b},$$

also:

$$(a:c)b \mathrel{=\!\!\!\in} a:\frac{c}{b}$$

— im allgemeinen; dagegen:

$$(a:c)b = a:\frac{c}{b}, \quad \text{für } \frac{a:\frac{c}{b}}{b}.$$

Und endlich ist zu schliessen:

$$x \mathrel{=\!\!\in} a:\frac{c}{b}, \quad \frac{c}{b}x \mathrel{\ni\!\!=} a, \quad \frac{c}{b}(=)\frac{a}{x}, \quad c \mathrel{=\!\!\in} \frac{a}{x}b = a\frac{b}{x} \mathrel{\ni\!\!=} c, \quad c:a(=)\frac{b}{x}, \quad (c:a)x \mathrel{\ni\!\!=} b,$$

$x \mathrel{=\!\!\in} b:(c:a)$, wo nun drei Fälle zu unterscheiden sein werden; es ist:

erstens: $$a:\frac{c}{b} \mathrel{=\!\!\in} b:(c:a) \text{ für } \frac{b}{a:\frac{c}{b}};$$

zweitens: $$a:\frac{c}{b} \mathrel{\ni\!\!=} b:(c:a) \text{ für } \frac{a}{b:(c:a)};$$

drittens: $$a:\frac{c}{b} = b:(c:a) \text{ für } \frac{b}{a:\frac{c}{b}} \text{ und } \frac{a}{b:(c:a)},$$

d. h. wenn beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt, nämlich a und b durch jeden Werth der beiderseitigen Ausdrücke theilbar sind. In allen Fällen beruht demnach die Relation zwischen diesen beiden Ausdrücken auf latenten Gültigkeitsbedingungen, und wenn diese abgelehnt werden, wenn man die Annahme derselben verweigert, so wird als im allgemeinen gültige Beziehung nur die *Coordination* übrig bleiben. Genauer gesagt nämlich wird alsdann nur ein Werth x des linksseitigen und ein Werth y des rechtsseitigen Ausdruckes die Beziehung $\frac{a}{x}b \mathrel{\ni\!\!=} c \mathrel{=\!\!\in} a\frac{b}{y}$ oder $\frac{a}{x}b\,(=)\,a\frac{b}{y}$ befriedigen müssen, aus welcher erst bei Eindeutigkeit: $x = y$ geschlossen werden kann.

Schliesslich ergeben sich ad (205) sehr leicht die drei umkehrbaren Schlussreihen:

$$x \mathrel{=\!\!\in} \frac{a}{bc}, \quad x(bc) = a = (xc)b, \quad xc \mathrel{=\!\!\in} \frac{a}{b}, \quad x \mathrel{=\!\!\in} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c},$$

also: $$\frac{a}{bc} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c};$$

$$x \mathrel{=\!\!\in} \frac{a}{b}:c, \quad cx \mathrel{=\!\!\in} \frac{a}{b}, \quad (cx)b = a = c(bx), \quad bx \mathrel{=\!\!\in} a:c, \quad x \mathrel{=\!\!\in} (a:c):b,$$

also: $$\frac{a}{b}:c = (a:c):b.$$

$$x \mathrel{=\!\!\in} \frac{a:c}{b}, \quad xb \mathrel{=\!\!\in} a:c, \quad c(xb) = a = (cb)x, \quad x \mathrel{=\!\!\in} a:(cb),$$

also: $\frac{a:c}{b}$ [illegible] $:(cb)$

— unter den augensch[illegible] [illegible]gkeitsbeding[illegible]

Was die Umform[illegible] [illegible]en Algorithmus betrifft, so hat man i[illegible] [illegible] Beziehungen:

$$(206)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{an}{\left(\frac{n}{b}\right)} \mathrel{\underline{\ni}} \dfrac{a}{n}(bn) = ab = (an)\dfrac{b}{n} \mathrel{\underline{\in}} (na) : \dfrac{n}{b}, \\[2ex] \left.\begin{array}{r} (n:b):(n:a) \\ \dfrac{n}{b} : \dfrac{n}{a} \end{array}\right| \mathrel{\underline{\ni}} \dfrac{a:n}{b:n} = a:b \mathrel{\underline{\ni}} (a:n)(n:b), \\[2ex] \dfrac{a}{n}(n:b) \mathrel{\underline{\in}} \dfrac{a}{b} = \dfrac{\left(\frac{a}{n}\right)}{b:n} \mathrel{\underline{\in}} \left|\begin{array}{l} (na):(nb) \\ \dfrac{an}{nb}, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

deren Gültigkeitsbedingungen nebst den eventuell zulässigen resp. anzubringenden Modificationen der Subsumtionszeichen man nach dem bisherigen leicht auffinden wird.

Ausser den beiden mittleren Gleichungen der ersten Zeile, welche sich *durch directe Umformung* nach (201) ergeben, sind wohl am leichtesten — *nämlich unmittelbar durch die Probe der inversen Operationen* — die beiden folgenden (der dritten Zeile):

$$(207) \qquad \frac{an}{nb} \mathrel{\underline{\ni}} \frac{a}{b} \mathrel{\underline{\in}} (na):(nb)$$

zu beweisen, und werde ich mich bei den folgenden Algorithmen meist nur auf die Angabe dieser einfachsten und charakteristischsten unter den Umformungsregeln beschränken. Schon hier habe ich diejenigen Ausdrücke ausser Acht gelassen, welche denen (191), (192), (193) beim associativen Algorithmus entsprechend, sich im allgemeinen als irreducibel erweisen.

Es bleibt nun auch der Algorithmus II_b. zu betrachten. Derselbe bildet ein genaues Gegenstück zum vorigen; nämlich die Prämisse desselben:

$$(208) \qquad a(bc) = (ba)c$$

zieht (in der Hauptsache) das System der Conclusionen nach sich:

$$(209) \qquad \frac{an}{bn} \mathrel{\underline{\ni}} a:b \mathrel{\underline{\in}} (na):(bn),$$

$$(210) \qquad \left\{\begin{array}{r} \dfrac{ba}{c} \\ (ab):c \end{array}\right| \mathrel{\underline{\ni}} \left|\begin{array}{l} b:\dfrac{c}{a} \\ \dfrac{a}{c}b, \end{array}\right.$$

$$(211) \qquad \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} \mathrel{\underline{\ni}\!\underline{\in}} \frac{b}{c:a} \mathrel{\underline{\ni}} a\frac{b}{c}, \qquad b:(c:a) \mathrel{\underline{\ni}} a(b:c) = (a:c)b,$$

$$(212) \qquad \frac{a}{cb} = \frac{a}{b}:c, \qquad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a:c}{b}, \qquad (a:c):b = a:(bc).$$

Wie man in der That schon zum voraus einsehen kann, müssen diese Relationen aus denen (207) und (203) bis (205) dadurch hervorgehen, dass Doppelpunkt und Bruchstrich, sowie auch die beiden Factoren eines jeden Productes miteinander vertauscht — hernach aber eventuell noch einige Buchstaben verändert werden. [Die Buch-

stabenveränderung besteht in der Vertauschung von a mit b bei denjenigen Ausdrücken, welche in der gewöhnlichen Arithmetik mit ab oder mit $(ab):c$, dagegen von b mit c bei den Ausdrücken, die dort mit $a:(bc)$ äquivalent sind und ist dieselbe lediglich durch die Anforderung einer symmetrischen eleganten Bezeichnungsweise geboten.]

So oft nun eine derartige Beziehung (die offenbar stets eine gegenseitige ist) zwischen zwei Algorithmen besteht, werde ich dieselben *conjugirte* nennen.

In diesem Sinne also sind dann die beiden Algorithmen II_a. und II_b. einander conjugirt.

Durch das erwähnte Umschreibe- oder Transcriptionsverfahren gehen bei dem Algorithmus I. des § 83. einfach nur die linke und die rechte Seite seiner dort angegebenen Formeln in einander über. *Der Algorithmus des Associationsgesetzes ist hiernach sich selbst conjugirt,* womit selbstverständlich die Möglichkeit einer Conjugation desselben mit irgend einem andern Algorithmus ausgeschlossen ist.

Sind zwei Algorithmen einander conjugirt, so brauchte strenge genommen nur mehr der eine von beiden ausführlich angegeben und es braucht nur der eine von ihnen eingehend begründet zu werden. —

§ 85. Dritter Typus.

Die Reihe der Multiplicationstypen, deren Prämisse von der grösseren Tragweite ist, nämlich die Klammer auf beide Arten enthält und deshalb alle 12 Productausdrücke (151) umzuformen gestattet, beschliesst ein Algorithmus III., welcher insofern ein Gegenstück zu demjenigen I. des Associationsgesetzes bildet, als derselbe ebenfalls sich selbst conjugirt erscheint. Dagegen zeigt derselbe vielfach eine Gliederung, welche von derjenigen der bisherigen Algorithmen wesentlich abweicht.

Die Prämisse:

$$(ab)c = b(ca) \tag{213}$$

dieses Algorithmus III. zieht folgende Consequenzen nach sich, deren erste Gruppe im Ringe herum zu lesen ist:

$$(214)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} \dfrac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} & \Leftarrow & (ba):c & \Rightarrow & a\dfrac{b}{c} & = & (a:c)b & \Leftarrow & \dfrac{ba}{c} & \Rightarrow & b:(c:a) \\ \Downarrow & & & & [\Uparrow] & & [\Uparrow] & & & & \Downarrow \\ b\dfrac{a}{c} & \Leftarrow & (ab):c & \Rightarrow & \dfrac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)} & \Leftrightarrow & a:(c:b) & \Leftarrow & \dfrac{ab}{c} & \Rightarrow & (b:c)a, \end{array}\right.$$

$$(215)\quad \frac{a}{c}:b = \frac{a}{cb}, \qquad \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b} = (a:b):c, \qquad a:(cb) = \frac{a:b}{c},$$

und es lassen darnach 12 Elementarausdrücke sich umgestalten. Auffallenderweise dagegen scheinen die 4 Ausdrücke:

$$\frac{a}{c:b}, \quad \frac{a}{c}b, \quad a(b:c), \quad b:\frac{c}{a},$$

welche beim Algorithmus des Associationsgesetzes die erste Zeile einnehmen, sich hier auf keine Weise in andere Elementarausdrücke umformen zu lassen.

In (214) sind zwar nicht alle zwischen den angeschriebenen Ausdrücken bestehenden Beziehungen direct angegeben, jedoch kann man die zwischen den Ausdrücken der zweiten Zeile noch geltenden Beziehungen (wie z. B. die Gleichheit der beiden äussersten Ausdrücke) mittelst Vertauschung von a und b aus der ersten Zeile herauslesen und umgekehrt. In ähnlicher Weise gehen auch von den in verticaler Richtung angeschriebenen Subsumtionen die beiden eingeklammerten schon von selbst aus den uneingeklammerten hervor.

Ueberdies ist zu bemerken, dass ich mich hier wie überall auf die Angabe derjenigen Beziehungen beschränke, zu deren Gültigkeit nur die selbstverständlichen Bedingungen als erfüllt angenommen werden müssen.

Aus der Herleitung und Zusammenstellung ebendieser Beziehungen werden alsdann die andern mit ihren zugehörigen Gültigkeitsbedingungen leicht abzuleiten sein. So z. B. folgt aus den benachbarten Propositionen:

$$a\frac{b}{c} = (a:c)b \quad \text{und} \quad (a:c)b \mathrel{=\!\!\!\!\!\!\;\in} \frac{ba}{c}$$

leicht die folgende: $a\frac{b}{c} \mathrel{=\!\!\!\!\!\!\;\in} \frac{ba}{c}$, welche jedoch nicht allgemein, sondern nur für $a:c$, d. h. unter der (latenten) Bedingung gilt, dass a durch c messbar sei.

Ebensowenig dürfte unter jener Beschränkung etwa aus:

$$\frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)} \mathrel{\ni\!\!\!=} a\frac{b}{c}, \quad a\frac{b}{c} = (a:c)b, \quad (a:c)b \mathrel{=\!\!\!\!\!\!\;\in} (a:c):b$$

geschlossen werden, dass allgemein: $\frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)}\ (=)\ (a:c):b$ wäre.

Es sind mit Rücksicht auf vorstehendes nur 7 von den angegebenen Beziehungen (214) als von einander unabhängig zu betrachten, und bedingt also unser Algorithmus III. nun eine *siebenfache* und drei *einfache* Beziehungen.

Die Herleitung dieser Beziehungen ist im folgenden gegeben. Direct ist:

$$(a:c)b = (a:c)\left\{\frac{b}{c}c\right\} = \left\{c(a:c)\right\}\frac{b}{c} = a\frac{b}{c}.$$

Nicht umkehrbar sind die 4 Schlussketten:

$x \mathrel{=\!\!\!\!\!\!\;\in} a\frac{b}{c},\ cx \mathrel{=\!\!\!\!\!\!\;\in} c\left(a\frac{b}{c}\right) = \left(\frac{b}{c}c\right)a = ba,$	$x \mathrel{=\!\!\!\!\!\!\;\in} (a:c)b,\ xc \mathrel{=\!\!\!\!\!\!\;\in} \{(a:c)b\}c = b\{c(a:c)\} = ba$
$x \mathrel{=\!\!\!\!\!\!\;\in} (ba):c,$ also: $a\frac{b}{c} \mathrel{=\!\!\!\!\!\!\;\in} (ba):c.$	$x \mathrel{=\!\!\!\!\!\!\;\in} \frac{ba}{c},$ also: $(a:c)b \mathrel{=\!\!\!\!\!\!\;\in} \frac{ba}{c}.$

$$x \preceq \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)},\quad x\frac{c}{b} \succeq a,\quad b\left(x\frac{c}{b}\right) \succeq ba,$$

$$b\left(x\frac{c}{b}\right) = \left(\frac{c}{b}\,b\right)x = cx,\quad cx = ba,$$

$$x \preceq (ba):c,\quad \text{also:}\quad \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} \preceq (ba):c;$$

$$x \preceq b:(c:a),\quad (c:a)x \succeq b,\quad \{(c:a)x\}a \succeq ba,$$

$$\{(c:a)x\}a = x\{a\,(c:a)\} = xc,\quad xc = ba,$$

$$x \preceq \frac{ba}{c},\quad \text{also:}\quad b:(c:a) \preceq \frac{ba}{c};$$

letztere mit der Variante:

$$x \preceq \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)},\quad x\frac{c}{b} \succeq a,\quad x\frac{c}{b} \preceq (cx):b,$$

$$(cx):b \succeq a,\quad cx = ba,\quad x \preceq (ba):c.$$

$$x \preceq b:(c:a),\quad (c:a)x \succeq b,\quad (c:a)x \preceq \frac{xc}{a},$$

$$\frac{xc}{a} \succeq b,\quad xc = ba,\quad x \preceq \frac{ba}{c}.$$

Nur bedingungsweise umkehrbar sind die drei Ketten:

$$x \preceq b\frac{a}{c},\quad x:b\,(=)\,\frac{a}{c},\quad (x:b)c \succeq a,$$

$$(x:b)c = x\frac{c}{b},\quad x\frac{c}{b} \succeq a,\quad x \preceq \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)},$$

$$\text{also:}\qquad b\frac{a}{c} \preceq \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)},$$

$$x \preceq (b:c)a,\quad \frac{x}{a}\,(=)\,b:c,\quad c\frac{x}{a} \succeq b,$$

$$c\frac{x}{a} = (c:a)x,\quad (c:a)x \succeq b,\quad x \preceq b:(c:a),$$

$$\text{also:}\qquad (b:c)a \preceq b:(c:a),$$

wobei Gleichheit eintritt für

$$\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}:b \qquad \text{resp.}\quad \frac{b:(c:a)}{a}.$$

$$x \preceq \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)},\quad x\frac{c}{b} \succeq a,\quad a:x\,(=)\,\frac{c}{b},\quad (a:x)b \succeq c,\quad (a:x)b = a\frac{b}{x},\quad c \preceq a\frac{b}{x},$$

$c:a\,(=)\,\frac{b}{x}$, $(c:a)x \succeq b$, $x \preceq b:(c:a)$; hieraus folgt: $\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} \preceq b:(c:a)$ für $\frac{b}{\left[\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}\right]}$, und $\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} \succeq b:(c:a)$ für $a:[b:(c:a)]$, d. h. wenn überhaupt eine Beziehung zwischen den hier in Vergleichung gesetzten Ausdrücken sich ergeben soll, so muss entweder b durch jeden Werth der linken Seite theilbar oder a durch jeden Werth der rechten Seite messbar sein, und es wird Gleichheit stattfinden, wenn beide Voraussetzungen gleichzeitig eintreffen. Im allgemeinen, wo keines von beiden zuzutreffen braucht, hat man nur (gewissermassen als Lückenbüsser) die Coordination:

$$\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} \mathrel{\succ\!\!\!\prec} b:(c:a).$$

Umkehrbar sind endlich stets die 3 Schlussreihen:

$x \mathrel{=\!\!\in} \frac{a}{c} : b$, $bx \mathrel{=\!\!\in} \frac{a}{c}$, $(bx)c = x(cb) = a$, | $x \mathrel{=\!\!\in} \frac{a:b}{c}$, $xc \mathrel{=\!\!\in} a:b$, $b(xc) = (cb)x = a$,

$x \mathrel{=\!\!\in} \frac{a}{cb}$, also: $\frac{a}{c} : b = \frac{a}{cb}$. | $x \mathrel{=\!\!\in} a : (cb)$, also: $\frac{a : b}{c} = a : (cb)$.

$$x \mathrel{=\!\!\in} \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}, \quad xb \mathrel{=\!\!\in} \frac{a}{c}, \quad (xb)c = b(cx) = a, \quad cx \mathrel{=\!\!\in} a : b, \quad x \mathrel{=\!\!\in} (a : b) : c,$$

also:
$$\frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b} = (a : b) : c. —$$

Von den zahlreichen Umformungsregeln erwähne ich nur die folgenden als diejenigen, welche sich am unmittelbarsten nachweisen lassen:

$$(216) \qquad a : b \mathrel{=\!\!\in} \frac{an}{nb}, \qquad (na)\frac{b}{n} = ab = (a : n)(bn), \quad (na) : (bn) \mathrel{\ni\!\!=} \frac{a}{b}.$$

§ 86. Vierter Typus.

An die $1 + 2 + 1$ Algorithmen von ganzer Tragweite der Prämisse reihen sich die $2 + 2 + 2$ von der halben Tragweite, welche sämmtlich paarweise conjugirt auftreten.

Am leichtesten sind von diesen die beiden Algorithmen IV. zu erledigen, deren Prämisse jedesmal nur sieben *einfache* Gleichungen nach sich zieht.

Und zwar bedingt die Prämisse:

$$(217) \qquad (ab)c = (cb)a$$

des Algorithmus IV_a. das System der Conclusionen:

$$(218) \qquad \frac{a}{c : b} \mathrel{=\!\!\in} (ab) : c, \qquad \frac{ab}{c} \mathrel{\ni\!\!=} b(a : c),$$

$$(219) \qquad \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} \mathrel{\ni\!\!=} (a : c)b, \qquad a\frac{b}{c} = b\frac{a}{c}, \qquad a : (c : b) \mathrel{\ni\!\!\in} b : (c : a),$$

$$(220) \quad a : (bc) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}, \qquad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b,$$

nach welchem 11 Elementarausdrücke transformabel sind — dagegen nicht die 5:

$$b : \frac{c}{a}, \quad \frac{a}{c}b, \quad \frac{a : b}{c}, \quad (a : b) : c, \quad \frac{a}{bc}.$$

Herleitung. Die mittlere ist die Hauptbeziehung und beweist sich durch die directe Ueberführung:

$$a\frac{b}{c} = \left(\frac{a}{c}c\right)\frac{b}{c} = \left(\frac{b}{c}c\right)\frac{a}{c} = b\frac{a}{c}.$$

Hiezu nun kommen die zwei nicht umkehrbaren Schlussreihen:

$$x \in \frac{a}{c:b}, \quad x(c:b) \succcurlyeq a, \quad \{x(c:b)\}b \succcurlyeq ab, \quad \{x(c:b)\}b, \quad \{b(c:b)\}x = cx,$$

$$cx = ab, \quad x \in (ab):c, \quad \text{also:} \quad \frac{a}{c:b} \in (ab):c.$$

$$x \in b(a:c), \; xc \in \{b(a:c)\}c = \{c(a:c)\}b = ab, \quad x \in \frac{ab}{c},$$

also:
$$b(a:c) \in \frac{ab}{c}.$$

Und daran reihen sich die 2 nur bedingungsweise umkehrbaren resp. ausführbaren Schlussreihen:

$$x \in (a:c)b, \quad \frac{x}{b}(=)a:c, \quad c\frac{x}{b} \succcurlyeq a, \quad c\frac{x}{b} = x\frac{c}{b}, \quad a \prec x\frac{c}{b}, \quad x \prec \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)},$$

also: $\quad (a:c)b \in \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}$ und zwar: $\quad (a:c)b = \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}$ für $\left|\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)b}\right|$.

$$x \in a:(c:b), \; (c:b)x \succcurlyeq a, \; c:b\,(=)\frac{a}{x}, \; c \prec b\frac{a}{x}, \; b\frac{a}{x} = a\frac{b}{x}, \; a\frac{b}{x} \succcurlyeq c,$$

$$c:a\,(=)\frac{b}{x}, \; (c:a)x \succcurlyeq b, \; x \prec b:(c:a),$$

also im allgemeinen nur: $\quad a:(c:b) \not\prec b:(c:a);$

dagegen ist:

$a:(c:b) \in b:(c:a)$ für $\frac{b}{a:(c:b)}$, sowie $a:(c:b) \succcurlyeq b:(c:a)$, für $\frac{a}{b:(c:a)}$,

und findet Gleichheit statt, falls beide Voraussetzungen zutreffen.

Endlich die beiden umkehrbaren Schlussreihen:

$$x \in \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}, \; xc \in \frac{a}{b}, \; xc\,b = bc\,x = a, \; x \prec a:(bc), \; \text{also:} \; \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = a:bc,$$

$$x \in \frac{a}{b}:c, \; cx \in \frac{a}{b}, \; (cx)b = (bx)c = a, \; bx \prec \frac{a}{c}, \; x \prec \frac{a}{c}:b,$$

also:
$$\frac{a}{b}:c = \frac{a}{c}:b. -$$

Von den Umformungsregeln sind vor allem anzuführen.

(221) $\qquad ab = (bm)\frac{a}{m}, \qquad \frac{a}{b} \prec (am):(mb).$

Der zu IV_a [illegible] Algorithmus IV_b umfasst die Prämisse:

(222) $\qquad$ [illegible] $=$ [illegible]

und das System [illegible]

[illegible] $\qquad$ (b : [illegible] = [illegible])

$$(224)\qquad \frac{b}{c}\,a \preccurlyeq (ab):c, \qquad\qquad \frac{ab}{c} \succcurlyeq b:\frac{c}{a},$$

$$(225)\qquad \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} \lesseqgtr \frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)}, \qquad (b:c)a = (a:c)b, \qquad a\frac{b}{c} \preccurlyeq b:(c:a),$$

$$(226)\qquad \frac{a:b}{c} = \frac{a:c}{b}, \qquad\qquad (a:c):b = \frac{a}{bc}. -$$

§ 87. Fünfter Typus. Die cyklische Multiplication.

Die beiden conjugirten Algorithmen V_a. und V_b., welche ich zu diesem Typus rechne, bestehen je aus einer *siebenfachen* und einer *doppelten* Beziehung.

Die Prämisse von V_a. zunächst:

$$(227)\qquad (bc)a = (ca)b = (ab)c$$

liefert für $c = b$ unter anderm die Gleichung:

$$(ba)b = (ab)b,$$

und hieraus kann, wenn die Theilung eindeutig ist, allgemein: $ba = ab$ geschlossen werden. Man sieht also, dass die Annahme (227) einer cyklischen Vertauschbarkeit der drei Factoren (wenn auch nur bei der einen Art von Producten, z. B. solchen, die mit der Klammer beginnen), für den Fall der Eindeutigkeit schon das Associationsgesetz mitsammt dem Commutationsgesetze nach sich zieht, und demnach sogar zur alleinigen Grundlage der arithmetischen Gesetze (dieser Stufe) gemacht werden könnte — so zwar, dass diese Gesetze mit denen der gewöhnlichen Arithmetik identisch würden.

Ganz anders jedoch, wenn jene Voraussetzung der Eindeutigkeit fehlt. Alsdann nämlich lassen nur folgende Beziehungen als Consequenzen von (227) sich beweisen:

$$(228)\qquad \frac{ab}{c} \succcurlyeq \left|\begin{array}{c} b\frac{a}{c} = a(b:c) \preccurlyeq \dfrac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)} \\[2ex] (a:c)b \preccurlyeq \quad \dfrac{a}{c:b} \lesseqgtr b:(c:a) \end{array}\right| \preccurlyeq (ba):c,$$

$$(229)\qquad \frac{a}{b}:c = a:(bc) = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b},$$

wo bei der ersteren augenscheinlich die 8 Ausdrücke in einem Kreise herum geschrieben werden könnten.

Die Gültigkeitsbedingungen sind die patenten. Die zwischen den zwei Verticalstrichen enthaltenen Subsumtions- und Coordinationszeichen gehen jedoch unter gewissen nur die Ausführbarkeit von Divisionen betreffenden latenten Bedingungen auch in Gleichheitszeichen über.

Der Beweis, aus dem sich auch diese Gültigkeitsbedingungen ergeben, ist im folgenden zusammengestellt.

$$b\frac{a}{c} = \left\{c(b:c)\right\}\frac{a}{c} = \left\{(b:c)\frac{a}{c}\right\}c = \left\{\frac{a}{c}c\right\}(b:c) = a(b:c),$$

oder kürzer, von rechts ausgehend:

$$a(b:c) = \left(\frac{a}{c}c\right)(b:c) = \left\{c\,(b:c)\right\}\frac{a}{c} = b\frac{a}{c}$$

gibt die Hauptbeziehung des ganzen Algorithmus.

Dieselbe anwendend, erhält man ferner:

$$x \Leftarrow a(b:c),\quad x:a\,(=)\,b:c,\quad c(x:a) \Rightarrow b,\quad c(x:a) = x\frac{c}{a},\quad x\frac{c}{a} \Rightarrow b,\quad x \Leftarrow \frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)},$$

also:

$$a\,(b:c) \Leftarrow \frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)};$$

Diese Schlussreihe ist bedingt umkehrbar, und zwar tritt Gleichheit ein für $\frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)} : a$.

$$x \Leftarrow (a:c)b,\quad \frac{x}{b}\,(=)\,a:c,\quad c\frac{x}{b} \Rightarrow a,\quad c\frac{x}{b} = x(c:b),\quad x(c:b) \Rightarrow a,\quad x \Leftarrow \frac{a}{c:b},$$

also:

$$(a:c)b \Leftarrow \frac{a}{c:b};$$

statt dessen tritt Gleichheit ein (indem die Reihe umkehrbar wird) für $\frac{\left(\frac{a}{c:b}\right)}{b}$.

Aus der Verkettung:

$$x \Leftarrow \frac{a}{c:b},\quad x(c:b) \Rightarrow a,\quad c:b\,(=)\,a:x,\quad c \Leftarrow b\,(a:x),\quad b(a:x) = a\frac{b}{x},$$

$$c \Leftarrow a\frac{b}{x},\quad c:a\,(=)\,\frac{b}{x},\quad (c:a)x \Rightarrow b,\quad x \Leftarrow b:(c:a)$$

ist im allgemeinen nichts zu schliessen, da sie voraussetzt, dass gleichzeitig a durch x messbar und b durch x theilbar sei, während, wenn x durch die erste Proposition definirt wird, mit Nothwendigkeit nur das erstere, dagegen, wenn es durch die letzte Proposition definirt wird, nothwendig nur das letztere stattfinden muss. Unter besonderen Annahmen ergeben sich aber die Theoreme:

$$\frac{a}{c:b} \Leftarrow b:(c:a) \text{ für } \frac{b}{\left(\frac{a}{c:b}\right)},\quad \frac{a}{c:b} \Rightarrow b:(c:a) \text{ für } a:[b:(c:a)],\quad \frac{a}{c:b} = b:(c:a),$$

wenn beide Annahmen zugleich erfüllt.

Es versteht sich, dass man da, wo die obige Hauptbeziehung zur Anwendung kam, auch direct zu werke gehen kann, indem man diejenigen Umformungen vornimmt, welche den beim Beweise jener Hauptbeziehung ausgeführten entsprechen.

Durch die vier nicht umkehrbaren Schlussreihen:

$$x \Leftarrow b\frac{a}{c},\ xc \Leftarrow \left(b\frac{a}{c}\right)c = \left(\frac{a}{c}c\right)b = ab,\quad x \Leftarrow \frac{ab}{c},\quad \text{also: } b\frac{a}{c} \Leftarrow \frac{ab}{c}$$

$$x \mathrel{\overline{\in}} \frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)},\ x\frac{c}{a} \mathrel{\overline{\ni}} b,\ \left(x\frac{c}{a}\right)a \mathrel{\overline{\ni}} ba,\ \left(x\frac{c}{a}\right)a = \left(\frac{c}{a}a\right)x = cx,\ cx = ba,\ x \mathrel{\overline{\in}} (ba):c,$$

also:
$$\frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)} \mathrel{\overline{\in}} (ba) : c,$$

$$x \mathrel{\overline{\in}} (a : c)b,\quad xc \mathrel{\overline{\in}} \{(a : c)b\}c = \{bc\}(a : c) = \{c(a : c)\}b = ab,\ x \mathrel{\overline{\in}} \frac{ab}{c},$$

also:
$$(a : c)b \mathrel{\overline{\in}} \frac{ab}{c},$$

$$x \mathrel{\overline{\in}} b:(c:a),\ (c:a)x \mathrel{\overline{\ni}} b,\ \{(c:a)x\}a \mathrel{\overline{\ni}} ba,\ \{(c:a)x\}a = \{xa\}(c:a) = \{a(c:a)\}x = cx,$$
$cx = ba,\ x \mathrel{\overline{\in}} (ba):c,$ also: $\quad b : (c : a) \mathrel{\overline{\in}} (ba) : c,$

ist nun die geschlossene Kette der Propositionen (228) vollends gerechtfertigt.

Denkt man sich die 8 Ausdrücke wie oben schon angedeutet, im Kreise herum, also etwa an den Ecken eines regulären 8-Eckes angeschrieben, so sind den Seiten dieses Polygons parallel ganz bestimmte Beziehungszeichen zu schreiben. Das Gleichheitszeichen in (228) bildet gewissermassen die gemma, die stärkste, ihm gegenüber das Coordinationszeichen die schwächste oder loseste Stelle des Ringes.

Rechts und links von dem hiedurch bestimmten Durchmesser jedoch sind einerseits die Beziehungszeichen und andrerseits auch die einander ähnlich gebauten Ausdrücke etwas unsymmetrisch vertheilt. Den Diagonalen des Achtecks entlang lässt sich zwischen den durch sie verbundenen Ausdrücken *keinerlei* Beziehung nachweisen.

Ebenso wie ferner die Prämisse (227) ist endlich auch die Doppelbeziehung (229) in einem Kreise herum (als dreifache Beziehung) angeschrieben zu denken, da hier (ausnahmsweise) auch der letzte Ausdruck wieder dem ersten *unter den patenten Bedingungen* gleichgesetzt werden darf. Der Beweis von (229) erledigt sich daher (statt durch zwei) nun durch die *drei* Ketten von umkehrbaren Schlüssen:

$$x \mathrel{\overline{\in}} \frac{a}{b} : c,\ cx \mathrel{\overline{\in}} \frac{a}{b},\ (cx)b = a = (xb)c,\ xb \mathrel{\overline{\in}} \frac{a}{c},\ x \mathrel{\overline{\in}} \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b},$$

also:
$$\frac{a}{b} : c = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}.$$

$$x \mathrel{\overline{\in}} \frac{a}{b} : c,\ cx \mathrel{\overline{\in}} \frac{a}{b},\ (cx)b = a = (xb)c = (bc)x,\ x \mathrel{\overline{\in}} a : (bc),$$

also:
$$\frac{a}{b} : c = a : (bc).$$

$$x \mathrel{\overline{\in}} \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b},\ xb \mathrel{\overline{\in}} \frac{a}{c},\ (xb)c = a = (bc)x,\ x \mathrel{\overline{\in}} a : (bc),\ \text{also: } \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b} = a : (bc).$$

Die den Umformungsregeln entsprechenden Gesetze sind hier sehr mannigfaltig und setzen ganz verschiedenartige Gültigkeitsbedingungen als erfüllt voraus. Die 48 Fundamentalausdrücke sondern sich nämlich in drei Gruppen von je 16, welche beziehungsweise mit einem der drei Ausdrücke ab, $a : b$, $\frac{a}{b}$ eine Werthgemeinschaft eingehen könn-

ten; sie lassen, wie es scheint, alle sich eventuell reduciren. Ich ziehe deshalb wieder vor — um nicht in Details mich verlieren zu müssen — von diesen Umformungsregeln nur die folgenden anzugeben:

$$(230).\quad \frac{a}{b} \curlyeqprec (an):(bn),\ (bn)(a:n) = ab = (nb)\frac{a}{n},\ (an):(nb) \curlyeqsucc a:b$$

als die charakteristischsten, welche sich auch durch Ueberführung oder durch die Probe der inversen Operationen ganz unmittelbar beweisen lassen.

In gleicher Weise sind nun leicht auch die Gesetze des zu V_a. conjugirten Algorithmus V_b. abzuleiten. Die Prämisse:

$$(231)\qquad a(bc) = b(ca) = c(ab)$$

dieses letzteren zieht die Consequenzen nach sich:

$$(232)\quad \frac{a}{b} \curlyeqprec \frac{na}{bn},\qquad (b:n)(an) = ab = \frac{b}{n}(na),\qquad \frac{na}{nb} \curlyeqsucc a:b,$$

$$(233)\qquad \frac{ba}{c} \curlyeqsucc \left| \begin{array}{c} a:(c:b) \curlyeqsucc \frac{a}{c}b = (b:c)a \\ \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} \mathrel{\curlyeqsucc\!\!\!\!\curlyeqprec} b:\frac{c}{a} \curlyeqsucc a\frac{b}{c} \end{array} \right| \curlyeqprec (ab):c,$$

$$(234)\qquad (a:b):c = \frac{a}{bc} = \frac{a:c}{b}.$$

Bemerkenswerth erscheint, dass im Falle der Gleichheit die siebenfache Beziehung (233) von der (228) sich nur durch die Natur je derjenigen beiden Ausdrücke unterscheidet, welche die Mitte einnehmen; dagegen stimmen — abgesehen von der Wahl der Buchstaben — je die übrigen 6 Ausdrücke in (233) und (228) völlig überein (d. i. die einen gehen durch Vertauschung von a und b in die andern über); nur sind sie — im allgemeineren Falle — das eine mal durch andere Beziehungszeichen verknüpft resp. anders gruppirt als das andre mal.

Beide Beziehungen habe ich als siebenfache bezeichnet, weil von den zwischen 8 äquivalenten Ausdrücken bestehenden Gleichungen doch nur 7 von einander unabhängig sind.

Durch jeden der beiden vorstehenden Algorithmen können 11 Elementarausdrücke umgeformt werden, und zwar bei dem einen gerade diejenigen fünfe nicht, die beim andern Algorithmus in der Mitte zwischen den Verticalstrichen oder in der darauf folgenden Zeile stehen. —

§ 88. Sechster Typus. Die reinen Gesetze der dritten Operationsstufe.

Den letzten Typus machen zwei einander conjugirte Algorithmen aus, deren Prämisse (bei Eindeutigkeit und abgesehen von den Umformungsregeln) je eine *dreifache* und vier *einfache* Gleichungen bedingt.

Die Prämisse des Algorithmus VI_a.:

$$(235)\qquad (ab)c = (ac)b$$

zieht in der That das System der Conclusionen nach sich:

(236). $$\frac{b}{c:a} \succcurlyeq a\,(b:c) = b\,(a:c) \preccurlyeq \frac{a}{c:b},$$

(237) $$\frac{ab}{c} \succcurlyeq \frac{a}{c}\,b, \qquad a : \frac{c}{b} \preccurlyeq (ab) : c,$$

(238) $$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}, \qquad \frac{a}{c} : b = a : (bc).$$

Da drei mal zwei von den vorstehenden 12 Ausdrücken unter sich gleichen Baues sind, so lassen sich hiernach doch nur 9 von den 16 Fundamentalausdrücken umgestalten, und sind keine Beziehungen angebbar für:

$$a\frac{b}{c},\quad (a:c)b,\quad a:(c:b),\quad \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)},\quad \frac{a:b}{c},\quad \frac{a}{bc},\quad (a:b):c.$$

In Hinsicht auf Reichthum an Consequenzen bilden demnach die Algorithmen des gegenwärtigen nebst denen des vierten Typus den grössten Contrast mit denen der drei ersten Typen, wie man dies ungefähr (im Hinblick auf die Tragweite ihrer Prämissen) von vornherein erwarten durfte.

Die Begründung der Theoreme (236) bis (238) — ihre Herleitung aus (235) — geschieht in hervorragend leichter Weise durch folgende Schlussreihen. Zunächst ist:

$$a(b:c) = \left\{c(a:c)\right\}(b:c) = \left\{c(b:c)\right\}(a:c) = b(a:c).$$

Ferner hat man die bedingungsweise umkehrbare Schlussreihe:

$$x \preccurlyeq b(a:c),\ x:b\,(=)\,a:c,\ c(x:b) \succcurlyeq a,\ c(x:b) = x(c:b),\ a \preccurlyeq x(c:b),\ x \preccurlyeq \frac{a}{c:b},$$

also: $$b(a:c) \preccurlyeq \frac{a}{c:b},$$

und zwar: $$b(a:c) = \frac{a}{c:b} \text{ für } \frac{a}{c:b} \mathbin{\dot{:}} b.$$

Mit demselben Rechte ist nun auch:

$$a(b:c) \preccurlyeq \text{ oder } = \frac{b}{c:a}$$

unter entsprechenden Bedingungen.

Nicht umkehrbar sind die beiden Schlussreihen:

$$x \preccurlyeq \frac{a}{c}b,\ xc \preccurlyeq \left(\frac{a}{c}b\right)c = \left(\frac{a}{c}c\right)b = ab,\ x \preccurlyeq \frac{ab}{c},\quad \text{also: } \frac{a}{c}b \preccurlyeq \frac{ab}{c}.$$

$$x \preccurlyeq a : \frac{c}{b},\ \frac{c}{b}x \succcurlyeq a,\ \left(\frac{c}{b}x\right)b \succcurlyeq ab,\ \left(\frac{c}{b}x\right)b = \left(\frac{c}{b}b\right)x = cx,\ cx = ab,$$

$x \preccurlyeq (ab):c$, also: $$a : \frac{c}{b} \preccurlyeq (ab):c.$$

Bei der letzteren Kette könnte man auch auf das unmittelbar vorher gewonnene Theorem sich stützen und von der zweiten auf die vorletzte Proposition übergehen vermittelst der beiden:

$$\frac{c}{b}x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{cx}{b}, \quad \frac{cx}{b} \mathrel{\ni\!\!\!=} a.$$

Umkehrbar dagegen sind die beiden Schlussreihen:

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c},\ xc \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{b},\ (xc)b = a = (xb)c,\ xb \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{c},\ x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b},$$

also:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}.$$

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{c} : b,\ \ bx \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{c},\ (bx)c = a = (bc)x,\ x \mathrel{=\!\!\!\in} a : (bc),\ \text{also: } \frac{a}{c} : b = a : (bc),$$

q. e. d. Die Gültigkeit der Formeln (236) bis (238) ist darnach immer nur beschränkt durch die „selbstverständlichen" Bedingungen.

Wegen der hervorragenden Wichtigkeit des gegenwärtigen Algorithmus (siehe unten) will ich hier die Umformungsregeln vollständig angeben; dieselben lauten:

$$(239) \quad \begin{cases} (nb)(a:n) = ab \mathrel{=\!\!\!\in} \dfrac{nb}{n:a}, \\ (an):(bn) \mathrel{\ni\!\!\!=} a:b = \dfrac{a}{n} : \dfrac{b}{n}, \\ \dfrac{n}{b}(a:n) \mathrel{=\!\!\!\in} \dfrac{a}{b} \mathrel{=\!\!\!\in} \dfrac{\left(\frac{n}{b}\right)}{n:a}, \end{cases}$$

wobei, abgesehen von der ersten nahezu selbstverständlichen Gleichung, die Beziehung $a:b \mathrel{=\!\!\!\in} (an):(bn)$ wieder am directesten zu beweisen ist.

Unter gewissen Voraussetzungen, welche nur die Ausführbarkeit der Divisionen betreffen, können wiederum in jeder Formelgruppe einige Subsumtionszeichen durch Gleichheitszeichen ersetzt werden.

Ausserdem lassen (unter ähnlichem Vorbehalt) nur noch folgende Beziehungen sich ableiten:

$$\frac{an}{n:b} = (an)(b:n),\ \frac{a:n}{b:n} = (a:n)(n:b),\ \frac{\left(\frac{a}{n}\right)}{b:n} = \frac{a}{n}(n:b),\ \frac{n:b}{n:a} = (n:b)(a:n),$$

welche ich für den Fall der Eindeutigkeit angebe, es also dem Leser überlassend, die Subsumtionszeichen in dem allgemeineren Falle richtig zu stellen.

Von den 48 mit n zusammengesetzten Fundamentalausdrücken sind somit nur 6 reducibel und 14 überhaupt als solche transformabel. Zwischen den 34 übrigen Ausdrücken lassen sich weiter keine Beziehungen angeben.

Bei dem mit $\mathrm{VI_a}$. conjugirten Algorithmus $\mathrm{VI_b}$. folgt nun aus der Prämisse:

$$(240) \quad a(bc) = b(ac)$$

in ähnlicher Weise das System der Conclusionen:

$$(241) \quad \frac{na}{nb} \mathrel{\ni\!\!\!=} \frac{a}{b}, \qquad \frac{b}{n}(an) = ab,$$

(242) $$b : \frac{c}{a} \mathrel{\underline{\ni}} \frac{b}{c}\, a = \frac{a}{c}\, b \mathrel{\underline{\in}} a : \frac{c}{b},$$

(243) $$\frac{ab}{c} \mathrel{\underline{\ni}} \frac{b}{c : a}, \qquad a(b : c) \mathrel{\underline{\in}} (ab) : c,$$

(244) $$\frac{a}{bc} = \frac{a : b}{c}, \qquad (a : b) : c = (a : c) : b. -$$

Von besondrer Wichtigkeit wird der erstere VI_a. von diesen beiden Algorithmen noch dadurch, dass sich aus ihm die sämmtlichen *reinen* Gesetze der dritten Operationsstufe gewissermassen abschreiben lassen, d. h. diejenigen Gesetze, in deren Ausdrucke ausschliesslich nur Operationen dieser dritten Stufe sich angedeutet finden.

Zu dem Ende braucht man nur auf die unter (67) angedeutete Weise in den Gleichungen (235) bis (239) die sämmtlichen Operationen um eine Stufe zu erhöhen. So erhält man in der That als

(A) *die reinen Gesetze der dritten Stufe* aus der Prämisse:

(245) $$(a^b)^c = (a^c)^b$$

fliessend, das System der Conclusionen:

(246) $$\left\{\begin{aligned} &\sqrt[\overset{a}{\log} c]{b} \mathrel{\underline{\ni}} a^{\overset{c}{\log} b} = b^{\overset{c}{\log} a} \mathrel{\underline{\in}} \sqrt[\overset{b}{\log} c]{a}, \\ &\sqrt[c]{a^b} \mathrel{\underline{\ni}} \left(\sqrt[c]{a}\right)^b, \qquad \overset{\sqrt[c]{b}}{\log} a \mathrel{\underline{\in}} \overset{c}{\log}(a^b), \\ &\sqrt[b]{\sqrt[c]{a}} = \sqrt[c]{\sqrt[b]{a}}, \qquad \overset{b}{\log} \sqrt[c]{a} = \overset{b^c}{\log} a, \end{aligned}\right.$$

(247) $$\left\{\begin{aligned} &(n^b)^{\overset{n}{\log} a} = a^b \mathrel{\underline{\in}} \sqrt[\overset{a}{\log} n]{n^b}, \\ &\overset{b^n}{\log}(a^n) \mathrel{\underline{\ni}} \overset{b}{\log} a = \overset{\sqrt[n]{b}}{\log} \sqrt[n]{a}, \\ &\left(\sqrt[b]{n}\right)^{\overset{n}{\log} a} \mathrel{\underline{\in}} \sqrt[b]{a} \mathrel{\underline{\in}} \sqrt[\overset{a}{\log} n]{\sqrt[b]{n}}. \end{aligned}\right.$$

Mit vorstehendem dürfte wohl eine desfallsige und sofern ich sie recht verstehe, etwas zu weit gehende Bemerkung Grassmann's (l. c. pag. 131, No. 302) auf ihr richtiges Mass zurückgeführt sein. In der That würden sich durch das angegebene Transcriptionsverfahren aus den Gleichungen aller andern Algorithmen (incl. I.) — soferne sie nicht schon so wie so mit denen (235) bis (239) identisch sind — in der Regel falsche Formeln ergeben! Vergleiche noch § 92 und 93. —

Nicht zu übersehen ist, dass die obigen Formeln (246) und (247) sich nur auf ein solches Zahlensystem beziehen, innerhalb dessen die Operation des Potenzirens selbst *eindeutig* definirt ist — wogegen bei der allgemeinen Definition der Potenz im Sinne der Riemann'schen Functionenlehre die Beziehungszeichen noch einigermassen modificirt werden müssten. [Auf welche Weise dies zu geschehen hätte, wird in einem späteren Bande gelegentlich erörtert werden.] Es sind deshalb vorerst auch die Wurzeln und Logarithmen nicht in der vollen Vieldeutigkeit zu nehmen, welche ihnen auf dem zur Ebene der complexen Zahlen erweiterten Zahlengebiete späterhin zukommt, sondern man hat dieselben zu verstehen als nur diejenigen

von ihren Werthen umfassend, welche dem vorgegebenen beschränkteren Zahlengebiet angehören. Desgleichen hat bei den vorstehenden Untersuchungen eine Radication oder Logarithmirung so lange als unausführbar zu gelten, als keiner der durch sie erhältlichen Werthe dem gedachten Zahlengebiet angehört, wenngleich diese Operationen auf dem erweiterten Zahlengebiet stets ausführbar sein werden. —

§ 89. Vollständigkeit der angegebenen Formelcyklen.

Gleichwie die Zusammenstellung der Elementarausdrücke, welche wir in den 10 vorstehend erledigten Algorithmen betrachtet haben, eine vollständige war, so ist es auch jedesmal (in einer gewissen Hinsicht wenigstens) das System der zwischen denselben angegebenen Beziehungen.

Um überhaupt die *Vollständigkeit* eines jener Algorithmen zu prüfen, wird man wohl daran thun, die Divisionen zunächst als eindeutig und stets ausführbar gelten zu lassen, denn jedenfalls kann der Wegfall dieser Annahmen nicht eine Vermehrung, sondern nur eine Reduction und Modification der so erhaltenen Beziehungen zur Folge haben.

Die Vollständigkeit der „Umformungsregeln" eines Algorithmus wird von derjenigen der übrigen Fundamentalbeziehungen dieses Algorithmus abhängen, da man, um jene ersteren vollzählig zu erhalten, am besten die durch letztere gebotenen Transformationsmittel bei den 48 mit n zusammengesetzten Fundamentalausdrücken erschöpfend durchprobirt. Ich will daher die Frage nach der Vollständigkeit jener Umformungsregeln hier nicht weiter erörtern.

Die übrigen bei einem jeden Algorithmus in Betracht gezogenen Ausdrücke zerfallen in drei Klassen: erstens in solche, welche dem Product $a(bc)$, zweitens solche, welche dem Bruch $\frac{ab}{c}$ und drittens solche, welche dem $\frac{a}{bc}$ in der gemeinen Arithmetik äquivalent sind.

Die 12 Ausdrücke (151) der ersten Klasse waren [entsprechend $a(bc)$ und $(ab)c$] von zweierlei Art, und sie lieferten uns, einzeln einander gleich gesetzt, die *Prämissen* zu den in Untersuchung gezogenen Algorithmen. Abgesehen von den viererlei aus dem Commutationsgesetz entspringenden Prämissen:

$$(248)\quad \left\{ \begin{array}{ccc} & a(bc) = (bc)a, & \\ (cb)a = (bc)a & \mid & a(bc) = a(cb), \\ & a(bc) = (cb)a, & \end{array} \right.$$

waren, wie in § 83. gezeigt wurde, 10 Arten solcher Prämissen zu unterscheiden, die wir in die bekannten 6 Typen eingetheilt haben — alles in allem also vierzehnerlei Beziehungen.

Als *Consequenzen* bedingten diese Prämissen gewisse Beziehung[en] der Werthgemeinschaft zwischen verschiedenen Ausdrücken der zw[ei]ten Klasse, desgleichen zwischen Ausdrücken der dritten Klasse.

Die Elementarausdrücke der zweiten Klasse sind von zehner[lei] Art, nämlich die 20 folgenden:

$$(249)\left\{\begin{array}{l|l} a\frac{b}{c},\ \frac{ab}{c},\ \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)},\ \frac{a}{c:b},\ \frac{a}{c}b, & a(b:c),\ b:\frac{c}{a},\ b:(c:a),\ (ab):c,\ (a: \\ b\frac{a}{c},\ \frac{ba}{c},\ \frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)},\ \frac{b}{c:a},\ \frac{b}{c}a, & b(a:c),\ a:\frac{c}{b},\ a:(c:b),\ (ba):c,\ (b: \end{array}\right.$$

Die sechserlei Elementarausdrücke der dritten Klasse sind endlic[h] die folgenden 12:

$$(250)\quad\left\{\begin{array}{l|l} \frac{a}{bc},\ \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b},\ \frac{a}{c}:b, & \frac{a:b}{c},\ (a:b):c,\ a:(bc), \\ \frac{a}{cb},\ \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c},\ \frac{a}{b}:c, & \frac{a:c}{b},\ (a:c):b,\ a:(cb), \end{array}\right.$$

Es gibt nun eine einfache Methode, (auch) das System der letzteren Beziehungen oder Conclusionen bei einem jeden Algorithmus hinsichtlich seiner Vollständigkeit zu prüfen, und dabei es noch, wenn nöthig, zu vervollständigen.

Sobald man nämlich schon im Besitz irgend einer Gruppe von Formeln sich befindet, kann untersucht werden, ob dieselbe einen vollständigen „*Cyklus*“ bildet, und kann, wo dies nicht der Fall ist, der angefangene Cyklus zu einem vollständigen ergänzt werden.

Dies lässt sich erreichen durch Anwendung eines Verfahrens, welches lehrt, aus einer jeden Gleichung (Proposition) zwischen zwei Ausdrücken solche Schlüsse zu ziehen, die eventuell zu neuen Gleichungen führen.

Das gedachte Verfahren, womit also zugleich eine Andeutung zu den verschiedenartigsten Herleitungsweisen der sämmtlichen Formeln *aus einander* gegeben ist, besteht darin, dass man in der zum Ausgangspunkt genommenen Gleichung einen der drei Buchstaben, zum Beispiel a, durch x ersetzt und den übereinstimmenden Werth der beiderseitigen Ausdrücke mit ebendiesem Buchstaben a bezeichnet. Man erhält dadurch zwei Gleichungen, welche sich nach x auflösen lassen. Die Gleichsetzung der beiden Ergebnisse aber ist eine Relation, die (eventuell nur mit vertauschten Buchstaben) *entweder* zurückkommt auf das Grundgesetz der Multiplication, nämlich auf die zwischen Ausdrücken der ersten Klasse angenommene Gleichung, welche die Prämisse des ganzen Algorithmus bildete, *oder* übereinstimmt mit

der zum Ausgangspunkt genommenen Gleichung selbst, die man dergestalt wiederfindet, *oder* endlich eine neue Gleichung vorstellt, die dann — nach meiner Ausdrucksweise — dem gleichen (Elementar-) „*Cyklus*" wie die vorigen zuzuzählen ist. —

Ein einfaches Beispiel wird das gesagte verdeutlichen. Gesetzt etwa, man habe bereits die Gleichung etablirt: $\frac{a}{bc} = \frac{a:b}{c}$, so wird zuerst: $\frac{x}{bc} = \frac{x:b}{c} = a$ zu setzen sein. Löst man hierauf die beiden Theile $\frac{x}{bc} = a$ und $\frac{x:b}{c} = a$ dieser Doppelgleichung nach x auf, so findet sich erstens $x = a(bc)$ und zweitens $x = b(ac)$, woraus durch Vergleichung folgt: $a(bc) = b(ac)$, eine (neue) Gleichung, die man sogleich als Prämisse des Algorithmus VI_b wiedererkennt. Ebenso gelangt man nun durch Auflösung der Gleichungen: $\frac{a}{xc} = b = \frac{a:x}{c}$ nach x leicht zu dem Ergebnisse: $x = \frac{a:b}{c} = \frac{a}{bc}$, welches auf die zum Ausgangspunkt genommene Gleichung zurückkommt, und endlich durch entsprechende Behandlung von $\frac{a}{bx} = c = \frac{a:b}{x}$ zu dem Ergebniss: $x = (a:c):b = (a:b):c$, mit welchem eine neue Beziehung aufgefunden ist. Das Endergebniss dieser Betrachtung ist also, dass die drei Formeln:

$$a(bc) = b(ac), \quad \frac{a}{bc} = \frac{a:b}{c}, \quad (a:c):b = (a:b):c$$

zum nämlichen Elementarcyklus gehören.

Dieser Cyklus ist aber auch ein vollständiger, insoferne man, die erste oder die letzte Gleichung zum Ausgangspunkt nehmend, immer wieder nur die beiden andern (und zwar in diesen Fällen die mittlere Gleichung je *zwei* mal) erhalten würde. Durch das angegebene Verfahren also kommt man von einer dieser Gleichungen immer wieder nur zu einer andern von ihnen, man bewegt sich also so zu sagen im Ringe herum stets im innern des Cyklus; eine jede Gleichung desselben „bedingt" die beiden andern (ausschliesslich, nur die mittlere auch sich selbst noch einmal).

Da bei diesem Verfahren alle Schlüsse sich umkehren lassen, so wird eine Gleichung, die aus einer andern hervorgegangen ist, auch umgekehrt wieder auf diese letztere zurückführen, und wenn daher eine Gleichung einmal aus drei andern (oder überhaupt dreimal) erhalten worden ist, so braucht ebendiese nicht mehr als erzeugende zum Ausgangspunkt genommen zu werden, und ist man schon von vornherein sicher, dass dieselbe nicht mehr auf neue Beziehungen wird führen können.

Ein ähnliches Verfahren aber wie das angegebene lässt sich auch anwenden. wenn statt der Gleichungen nur Subsumtionen oder Correlationen vorliegen (cf. § 90.),

Wenn man nun ein ganzes *System* von Gleichungen zwischen den in Rede stehenden Elementarausdrücken hat, und man ergänzt für eine jede derselben, sowie auch für alle von diesen abhängigen (cf. pag. 26) und endlich für die dabei neu hinzutretenden Gleichungen den Elementarcyklus durch das obige Verfahren (so lange bis auf diese Art keine neuen Gleichungen mehr sich ergeben), so ist auch das ganze System zu einem vollständigen (zusammengesetzten) Cyklus geworden.

In diesem Sinne bilden in der That bei einem jeden der vorangegangenen Algorithmen die sämmtlichen Formeln stets einen vollständigen Cyklus, und zwar ist schon für die Formeln der jedesmaligen letzten Zeile in Verbindung mit der Prämisse jener Cyklus ein in sich abgeschlossener, d. h. also das System der Beziehungen zwischen den Ausdrücken der ersten und denen der dritten Klasse bildet für sich einen Cyklus. Desgleichen stellt das System der zwischen den Ausdrücken der zweiten Klasse bestehenden Beziehungen (welche die Mitte einnahmen) schon für sich einen fertigen Cyklus vor.

Zu dem Beweise dieser Behauptung findet sich in den nächstfolgenden beiden Paragraphen das Material zusammengestellt.

Eine Unvollständigkeit eines unsrer Algorithmen könnte demnach höchstens daher rühren, dass entweder ein ganzer Cyklus von Formeln übersehen wäre, oder — was eher möglich — eine zwischen zwei getrennten Formelgruppen existirende Verbindung, nämlich eine Gleichheit oder Werthgemeinschaft zwischen zwei solchen Ausdrücken, die zur Zeit noch in zwei gesonderten Cyklen (oder auch unverknüpft in einem einzigen Cyklus) figuriren.

In Bezug auf dieses kann ich nämlich nur geltend machen, dass ich meines Wissens alle zu Gebot stehenden Schluss- und Transformationsmittel erschöpfend durchprobirt habe. Namentlich bei dem ersten und dem letzten Typus, die mir die wichtigsten schienen, glaube ich die Vollständigkeit in jeder Hinsicht verbürgen zu können.

Sollte aber auch eine Auslassung sich noch entdecken lassen, so sind in dem nachfolgenden die Vorarbeiten geliefert, um alsdann die Lücke sogleich ganz und gar ausfüllen zu können. —

§ 90. Zerfällung der 100 Gleichungen zweiter Gattung in Elementarcyklen.

Ich betrachte nunmehr die Elementarausdrücke (249), welche die zweite Klasse ausmachten. Zwischen diesen können gerade 100 verschiedenartige Gleichungen bestehen, von denen mittelst blosser Abänderung der Buchstaben sich keine aus einer andern ableiten lässt.

Jeder Ausdruck der ersten Zeile jedem darin folgenden gleichgesetzt, gibt $\frac{10 \cdot 9}{2}$ Gleichungen; in diesen noch einseitig, etwa rechterhand, a mit b vertauscht, gibt doppelt so viele oder $10 \cdot 9$ Gleichungen; dazu die 10 durch Gleichsetzung der untereinanderstehenden Ausdrücke sich ergebenden macht $\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 2 + 10 = 100$ Gleichungen.

Es entsteht nun die Frage, welche von diesen Gleichungen einander gegenseitig bedingen, d. i. auf welche Weise dieselben in Elementarcyklen zerfallen.

In dieser Beziehung genügt es, eine Zusammenstellung der Resultate zu geben, wie selbige sich leicht durch die Anwendung der im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Methode verificiren lassen.

Im ganzen stellt sich heraus, dass die gedachten Gleichungen entweder für sich *allein* oder zu *zweit*, zu *dritt* oder zu *viert* einen in sich abgeschlossenen Elementarcyklus bilden, und wird es für eine kleine Weile nothwendig, diese Cyklen nach der Anzahl der sie zusammensetzenden Gleichungen kurz zu benennen. Ich werde dieselben als „*isolirte* oder Einzelgleichungen", *Dyaden*, *Triaden* und *Tetraden* bezeichnen.

So oft man Gruppen von 1, 2, 3, 4 Dingen consequent zu benennen hat, pflegt — welcher Cultursprache man die Ausdrücke auch entnehmen will — eine eigenthümliche Verlegenheit aus dem Umstande zu erwachsen, dass immer schon der eine oder andre Ausdruck in einer specifisch fremdartigen Bedeutung gebraucht und dadurch gewissermassen anstössig geworden ist — so das griechische „Monade". Von den nach dem lateinischen gebildeten Benennungen: Unionen, Binionen, Ternionen, Quaternionen ist ebenso die letzte zu vermeiden; desgl. sind von den im französischen substantivisch gebrauchten Simple, Double u. s. w. nur die beiden letzten als Tripel und Quadrupel germanisirbar; die italienischen: Solo, Duo, Trio, Quatuor wegen des musikalischen Beigeschmacks zu vermeiden u. s. w. Das deutsche „Doppelgleichung" (wie $a = b = c$) gibt einen andern Sinn als wie „Paar von Gleichungen" (z. B. $a = b$, $c = d$), u. s. w.

Jede einen Cyklus bildende Einzelgleichung geht, nach der erwähnten Methode behandelt, allemal wieder nur in sich selbst über. Bei einer Dyade liefert eine jede der beiden Gleichungen sich selbst stets einmal und die andre zweimal. Bei einem triadischen oder dreitheiligen Cyklus erzeugt eine Gleichung, welche wir eine bevorzugte Stellung einnehmen lassen, sich selbst einmal wieder, und dazu (je einmal) die beiden andern; von diesen beiden aber gibt eine jede einmal die andere und zweimal die bevorzugte. Bei einer Tetrade folgen aus einer jeden von den vier Gleichungen immer die drei andern (je einmal).

Alle diese Cyklen sind entweder sich selbst oder paarweise einander conjugirt, in welch' letzterem Falle wir sie (durch den Verticalstrich getrennt) symmetrisch nebeneinander schreiben.

Und zwar erhalten wir so (in 22 Typen) im ganzen 3 Einzelgleichungen, 9 Dyaden, 5 Triaden und 16 Tetraden — wobei in der That $3 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 16 \cdot 4 = 100$ ist. Es finden dieselben sich zunächst mit Nummern versehen und in nachstehender Tabelle, zu der ich fernere Bemerkungen für weiter unten verspare, zusammengestellt. —

Die drei Einzelgleichungen.

1) $$\frac{ab}{c} = (ba) : c$$

II_a., II_b. III., V_a., V_b., vergl. 13), 22), 23).

2) $\frac{a}{c:b} = a(b:c)$

I., IIa., Va., VIa., vergl. 14), 18), 22).

3) $\frac{a}{c}b = b:\frac{c}{a}$

I., IIb., Vb., VIb., vergl. 15), 18), 23).

Die neun Dyaden.

4) $\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} = a\frac{b}{c}$, $(a:c)b = b:(c:a)$

I., IIa., IIb., III., Va., Vb., vergl. 19), 20). 26), 27), 28), 29).

5) $\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} = a:(c:b)$, $(a:c)b = b\frac{a}{c}$

III., Va., Vb., vergl. 24), 25), 30), 31), 32), 33).

6) $a\frac{b}{c} = a:(c:b)$, $\frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)} = (a:c)b$

III., Va., Vb., vergl. 21).

7)* $\frac{a}{c:b} = \frac{b}{c}a$, $b(a:c) = b:\frac{c}{a}$

8)* $\frac{a}{c:b} = a:\frac{c}{b}$, $b(a:c) = \frac{a}{c}b$

9) $a:\frac{c}{b} = (ab):c$, $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c}b$

VIa.

10) $a(b:c) = (ab):c$, $\frac{ab}{c} = \frac{b}{c:a}$

VIb.

11) $\frac{a}{c:b} = (ab):c$, $\frac{ab}{c} = b(a:c)$

IVa.

12) $\frac{b}{c}a = (ab):c$, $\frac{ab}{c} = b:\frac{c}{a}$

IVb.

Die fünf Triaden.

13) $\frac{ab}{c} = (ab):c$

$\frac{ba}{c} = \frac{ab}{c}$, $(ab):c = (ba):c$

III., cf. 1).

14) $\frac{a}{c:b} = b(a:c)$

$\frac{b}{c:a} = \frac{a}{c:b}$, $b(a:c) = a(b:c)$

VIa., cf. 2).

15) $\frac{b}{c}a = b:\frac{c}{a}$

$\frac{a}{c}b = \frac{b}{c}a$, $b:\frac{c}{a} = a:\frac{c}{b}$.

VIb., cf. 3).

16) $\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} = (a:c)b$

$b:(c:a) = a:(c:b)$, $b\frac{a}{c} = a\frac{b}{c}$

III., IVa.

17) $a\frac{b}{c} = b:(c:a)$

$(a:c)b = (b:c)a$, $\frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}$

III., IVb.

Die sechzehn Tetraden.

18)
$$\frac{a}{c:b} = b : \frac{c}{a}$$
$$\frac{a}{c:b} = \frac{a}{c}b, \qquad a(b:c) = b : \frac{c}{a}$$
$$\frac{a}{c}b = a(b:c)$$

I., cf. 2), 3).

---

19)
$$\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} = \frac{ab}{c}, \qquad (ab):c = b:(c:a)$$
$$a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \qquad (ab):c = (a:c)b$$

I., III., cf. 4).

---

20)
$$\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} = (ba):c, \qquad \frac{ba}{c} = b:(c:a)$$
$$a\frac{b}{c} = (ba):c, \qquad \frac{ba}{c} = (a:c)b$$

III., cf. 4).

---

21)
$$\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} = b:(c:a)$$
$$\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} = b\frac{a}{c}, \qquad (b:c)a = b:(c:a)$$
$$b\frac{a}{c} = (b:c)a$$

III., cf. 6).

---

22)
$$\frac{a}{c:b} = \frac{ab}{c}, \qquad \frac{ab}{c} = a(b:c)$$
$$\frac{a}{c:b} = (ba):c, \quad (ba):c = a(b:c)$$

IIa., Va., cf. 1), 2).

23)
$$\frac{a}{c}b = (ab):c, \quad (ab):c = b:\frac{c}{a}$$
$$\frac{a}{c}b = \frac{ba}{c}, \qquad \frac{ba}{c} = b:\frac{c}{a}$$

IIb., Vb., cf. 1), 3).

---

24)
$$\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} = (ab):c, \quad (ab):c = a:(c:b)$$
$$(a:c)b = \frac{ab}{c}, \qquad \frac{ab}{c} = b\frac{a}{c}$$

III., Va., Vb., cf. 5).

25)
$$\frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{ab}{c}, \qquad \frac{ab}{c} = b:(c:a)$$
$$(b:c)a = (ab):c, \quad (ab):c = a\frac{b}{c}$$

III., Va., Vb., cf. 5).

---

26)
$$\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} = \frac{b}{c:a}, \qquad \frac{b}{c:a} = a\frac{b}{c}$$
$$b:(c:a) = a(b:c), \quad a(b:c) = (a:c)b$$

IIb., Va., cf. 4).

27)
$$(a:c)b = a:\frac{c}{b}, \quad a:\frac{c}{b} = b:(c:a)$$
$$a\frac{b}{c} = \frac{a}{c}b, \qquad \frac{a}{c}b = \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}$$

IIa., Vb., cf. 4).

28) $(a:c)b = \frac{a}{c:b}$, $\frac{a}{c:b} = b:(c:a)$

$\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} = b(a:c)$, $b(a:c) = a\frac{b}{c}$

Va., cf. 4).

29) $\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} = b:\frac{c}{a}$, $b:\frac{c}{a} = a\frac{b}{c}$

$(a:c)b = \frac{b}{c}a$, $\frac{b}{c}a = b:(c:a)$

Vb., cf. 4).

30)* $\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} = a(b:c)$, $a(b:c) = a:(c:b)$

$a\frac{b}{c} = \frac{a}{c:b}$, $\frac{a}{c:b} = (b:c)a$

cf. 5).

31)* $\frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{a}{c}b$, $\frac{a}{c}b = b:(c:a)$

$b\frac{a}{c} = b:\frac{c}{a}$, $b:\frac{c}{a} = (a:c)b$

cf. 5).

32)* $b:(c:a) = b:\frac{c}{a}$, $b:\frac{c}{a} = \frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)}$

$(a:c)b = \frac{a}{c}b$, $\frac{a}{c}b = b\frac{a}{c}$

cf. 5).

33)* $a:(c:b) = \frac{a}{c:b}$, $\frac{a}{c:b} = \frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)}$

$(b:c)a = a(b:c)$, $a(b:c) = a\frac{b}{c}$

cf. 5).

Bei diesen 33 Cyklen sind zunächst in Gestalt der römischen Ziffern die Nummern derjenigen Algorithmen angefügt, von welchen sie einen Bestandtheil ausmachen — woferne nur abgesehen wird von dem Umstand, dass an der Stelle des Gleichheitszeichens dort meistens ein andres Beziehungszeichen steht.

Durch einen der Nummer des Cyklus beigefügten Stern sind diejenigen Cyklen hervorgehoben, welche nach den bisherigen Ergebnissen keinem einzigen jener 10 Algorithmen angehören. Die letzteren sind entweder die Consequenzen des Commutationsgesetzes oder aber die einer Verbindung von mehreren Algorithmen mit einander, wenn nämlich deren Prämissen gleichzeitig adoptirt werden. Es scheint so namentlich dem Formelpaar 7) ein imaginäres Elementargesetz der Multiplication zu Grunde zu liegen.

Aus der Wahrnehmung, dass viele Formelsysteme zu gleicher Zeit mehreren verschiedenen Algorithmen angehören (denselben „gemeinsam“ sind), ist zu entnehmen, dass die Schlüsse sich im allgemeinen keineswegs umkehren lassen, dass aus den Conclusionen eines Algorithmus durchaus nicht zwingend auf dessen Prämisse zurückgeschlossen werden kann.

Die angegebenen Cyklen sind *Elementar*cyklen, d. h. ich habe jedesmal nur diejenigen Gleichungen zusammengestellt, die sich direct durch das beschriebene Verfahren (der Auflösung nach x u. s. w.) ergeben. Ich habe aber diese Gleichungen nicht miteinander oder mit denjenigen verschmolzen, die noch ausserdem von ihnen abhängig sind

oder aus ihrem Zusammenbestehen hervorgehen. Auf die Nummern der letzteren Gleichungssysteme ist allerdings jeweils (mittelst „cf.") zurückverwiesen, und umgekehrt auch bei diesen (mit „vergl.") vorwärts auf die Nummern hingedeutet, in welchen auf sie zurückverwiesen wird.

So würde z. B. der Cyklus 24) sich allerdings kürzer so ausschreiben lassen:

$$\frac{a}{\left(\frac{c}{b}\right)} = (ab) : c = a : (c : b), \qquad (a : c)b = \frac{ab}{c} = b\,\frac{a}{c},$$

womit dann zugleich die Dyade 5) in denselben einverleibt erschiene; noch viel einfacher sogar würden etwa die Cyklen 18), 22), 23) sich je durch eine einzige dreifache Gleichung zugleich mit den angezogenen Dyaden haben zusammenfassen lassen. Dass ich gleichwohl dieses unterlassen habe, geschah deshalb, weil ich nicht nur die Beziehung der Gleichheit, sondern auch die Beziehungen der Subsumtion und Correlation bei der Aufstellung jener Cyklen im Auge hatte.

Die Gleichheitszeichen der einzelnen Cyklen können nämlich — zwar nicht beliebig, jedoch immerhin auf eine mannigfaltige und noch nicht genügend untersuchte Weise — auch durch gewisse andere Beziehungszeichen der Werthgemeinschaft ersetzt werden. Z. B. in dem Cyklus 24) können sie, wie man leicht sieht, ersetzt werden durch Subsumtionszeichen in der Configuration: $\begin{matrix} \preceq, & \succeq \\ \preceq, & \succeq \end{matrix}$, so zwar, dass wiederum die vier Propositionen sich miteinander vertragen und sich gegenseitig mit Nothwendigkeit bedingen.

In diesem Falle aber wird zwischen den Randausdrücken links und rechts nun keinerlei Art von Werthübereinstimmung bestehen müssen (nur Coordination), und es kommt dann also die Dyade 5) geradezu in Wegfall. —

Dass in der That Subsumtionen nicht beliebig zwischen den Ausdrücken angenommen werden dürfen, mag folgendes merkwürdige Beispiel zeigen, welches sich an die Betrachtung der Einzelgleichung 1) knüpft, und woraus zugleich die Methode ersichtlich ist, nach welcher bei derartigen Untersuchungen zu verfahren.

Ich behaupte, dass zwischen den beiderseitigen Ausdrücken $\frac{ab}{c}$ und $(ba) : c$ der Formel 1) nur entweder Gleichheit oder aber Correlation allgemein stattfinden kann, dagegen („definitive") Unter- oder Ueberordnung nicht.

Beweis. Wäre etwa:

$$\frac{ab}{c} \preceq (ba) : c$$

für alle Zahlen a, b, c, so müsste auch:

$$\frac{ab}{x} \preceq (ba) : x$$

sein. So oft nun $c \preceq \frac{ab}{x}$, mithin $x \preceq (ab) : c$, so ist auch: $c \preceq (ba) : x$, mithin $x \preceq \frac{ba}{c}$, woraus folgt:

$$(ab) : c \preceq \frac{ba}{c},$$

oder, a und b vertauscht, stets:

$$\frac{ab}{c} \mathrel{\not\!\!\ni} (ba) : c,$$

ein Ergebniss, dessen Widerspruch mit der Voraussetzung nur dadurch gehoben werden kann, dass man

$$\frac{ab}{c} = (ba) : c$$

gelten lässt — wie behauptet wurde.

Ist dagegen:

$$\frac{ab}{c} (=) (ba) : c,$$

also auch:

$$\frac{ab}{x} (=) (ba) : x,$$

so sei c der gemeinsame Werth, also:

$$c \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{ab}{x}, \qquad \text{und} \qquad c \mathrel{=\!\!\!\in} (ba) : x.$$

Alsdann folgt:

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} (ab) : c, \qquad\qquad x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{ba}{c},$$

mithin wieder: $(ab) : c \, (=) \, \frac{ba}{c}$, und weiter nichts. Diese letztere Annahme bleibt daher in der That zulässig. —

§ 91. Zerfällung der 14 Gleichungen erster sammt den 36 dritter Gattung in Elementarcyklen.

Ich will nun für die $\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 2 + 6 = 36$ verschiedenen Gleichungen, welche zwischen den 12 Elementarausdrücken (250) der dritten Klasse bestehen können, die entsprechende Aufgabe lösen.

Diese Gleichungen scheiden sich in 14 Cyklen, welche für je ein bestimmtes Gesetz der Multiplication charakteristisch sind, und in Verbindung mit den letzteren 6 Triaden und 8 Tetraden zusammensetzen.

Und zwar ergibt sich bei der gleichen Einrichtung wie vorhin nun das Tableau:

Die sechs Triaden.

1) $\frac{a}{c} : b = a : (bc)$	2) $\frac{a}{bc} = \frac{a : b}{c}$
$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}$, $\quad (ab)c = (ac)b$	$c(ba) = b(ca)$, $\quad (a:b):c = (a:c):b$
$\mathrm{VI_a}$.	$\mathrm{VI_b}$.

3) $a:(bc) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$ $(ba)c = (ca)b, \quad \frac{a}{b}:c = \frac{a}{c}:b$ IVa.	4) $(a:c):b = \frac{a}{bc}$ $\frac{a:b}{c} = \frac{a:c}{b}, \quad c(ab) = b(ac)$ IVb.
5)* $\frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b} = \frac{a}{c}:b$ $a:(bc) = a:(cb), \quad (bc)a = (cb)a$	6)* $\frac{a:b}{c} = (a:b):c$ $a(cb) = a(bc), \quad \frac{a}{cb} = \frac{a}{bc}$

Die acht Tetraden.

7) $b(ac) = (ba)c$

$\frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b} = \frac{a}{bc}, \quad a:(bc) = (a:b):c$

$\frac{a}{c}:b = \frac{a:b}{c}$

I.

---

8) $(ab)c = b(ca)$

$\frac{a}{c}:b = \frac{a}{cb}, \quad a:(cb) = \frac{a:b}{c}$

$\frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b} = (a:b):c$

III.

---

9)* $(bc)a = a(bc)$

$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a:b}{c}, \quad \frac{a}{c}:b = (a:c):b$

$\frac{a}{bc} = a:(bc)$

---

10)* $a(bc) = (cb)a, \quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = (a:b):c$

$\frac{a}{b}:c = \frac{a:b}{c}, \quad \frac{a}{bc} = a:(cb)$

---

11) $b(ca) = (ba)c$ $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}, \quad a:(bc) = \frac{a:b}{c}$ $(a:b):c = \frac{a}{c}:b$ IIa.	12) $b(ac) = (ab)c$ $\frac{a}{c}:b = \frac{a}{bc}, \quad a:(bc) = (a:c):b$ $\frac{a:b}{c} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}$ IIb.

13) $(ac)b = (ba)c$	14) $b(ac) = c(ba)$
$\frac{a}{b} : c = a : (bc)$, $\quad a : (bc) = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}$	$(a : b) : c = \frac{a}{bc}$, $\quad \frac{a}{bc} = \frac{a : c}{b}$
$\frac{a}{b} : c = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}$	$(a : b) : c = \frac{a : c}{b}$
V_a.	V_b.

worin jedoch eigentlich der Cyklus 10) gleichwie in § 90. der 1), 5) und 8) nur in etwas modificirter Auffassung sich selbst conjugirt zu nennen ist.

Wie man übrigens sieht, bedingen hier auch umgekehrt die Conclusionen stets wieder ihrerseits die Prämisse, und niemals kann ein Elementarcyklus zwei verschiedenen Algorithmen gemeinsam sein.

Bei den Cyklen des vorigen Paragraphen ist ersteres nur vereinzelt der Fall. Dort bedingt nämlich (woferne die Beziehungen wirklich Gleichungen sein sollen) der Cyklus:

$$\mathrm{VI}_a.,\ \mathrm{VI}_b.,\ \mathrm{IV}_a.,\ \mathrm{IV}_b.,\ \mathrm{I}.,\ \mathrm{III}.,\ \mathrm{II}_b.,\ \mathrm{II}_a.,\ \mathrm{V}_a.,\ \mathrm{V}_b.,$$

resp. die Prämisse des Algorithmus:

14), 15), 16), 17), 18), 21), 26), 27), 28), 29)

ebenso bedingt dort 32) sowie 33) das Commutationsgesetz $ab = ba$. Und zwar geht dieses (bei den sich selbst conjugirten und bei den linkseitigen der paarweise conjugirten Cyklen) jederzeit hervor aus derjenigen Gleichung, die als die letzte figurirt. Der Nachweis dieser Behauptungen mag an dem Beispiel des Cyklus 18) erläutert werden. In der That, setzt man in der dortigen Gleichung $\frac{a}{c}b = a(b : c)$ etwa: $\frac{a}{c} = \alpha$, $b : c = \beta$, mithin $a = \alpha c$, $b = c\beta$, was unbedingt gestattet ist, und die Werthe α, c, β nicht der geringsten Beschränkung unterwirft, so ergibt sich: $\alpha(c\beta) = (\alpha c)\beta$ — also richtig die Grundgleichung der associativen Multiplication. — Es finden sich gleichwohl bei jedem der Cyklen 16), 17), 26), 27) (des § 90.) zwei Algorithmen zugleich angezogen; von diesen schliesst aber immer der eine die Formeln des betreffenden Cyklus nur als Coordinationen aufgefasst in sich.

Mit dem vorstehenden ist die Hauptaufgabe erledigt für alle denkbaren Separationen solcher die Operationen zweiter Stufe betreffenden Prämissen, welche in der gewöhnlich sogenannten oder, wie ich sagen will, *„ordinären“* allgemeinen Arithmetik aufgegriffen werden können.

Auf eben dieses Feld will ich mich auch durchgehends in diesem Bande beschränkt halten, jedoch nicht unterlassen, darauf hinzudeuten, was für Aufgaben zunächst ausserhalb desselben anzutreffen sind.

Die innerhalb der eben erwähnten Grenzen sich haltende formale Algebra verhält sich zu der ordinären „allgemeinen Arithmetik“ nur wie eine *bedingte* Bewegung, etwa eine Bewegung auf vorgeschriebenen Bahnen, zu der *freien* Bewegung in einem auch jene Bahnen in sich fassenden Raume. Man könnte auch, beide Disciplinen mit einer Sprache

vergleichend, sagen, dass sie sich zu einander verhalten wie die gebundene Redeweise zur ungebundenen. Die Algorithmen, welche wir so (in jener Disciplin) gefunden haben, heben gewissermassen vor den Regeln dieser allgemeinen Arithmetik sich ebenso hervor, wie ein Bas-Relief auf einem breiter ausgedehnten Hintergrunde.

Nichts aber steht im Wege, den bisherigen Raum, den Boden der bisher so genannten Arithmetik gänzlich zu verlassen (oder — um auch an den andern Vergleich, den ich brauchte, anzuknüpfen: nichts hindert, zu einer ganz fremden Sprache überzugehen), und eine wenngleich allgemeine so doch „*extraordinäre*" oder transcendentale Arithmetik aufzubauen, z. B. die Eigenschaften einer Operation zu untersuchen [mag man sie auch nicht mehr Multiplication nennen], deren Grundgesetz etwa wäre:

$$\frac{ab}{c} = (ac) : b, \qquad \text{oder auch:} \qquad a(bc) = \frac{c}{ba}$$

und dergleichen mehr.

Ueber die Eigenschaften, welche eine doch nur aus gewissen Bedürfnissen hervorgegangene actuelle Operation (wie die gemeine Multiplication) gewissermassen zufällig besitzt, kann man sich füglich erheben und unabhängig davon die Frage beantworten, welchen logischen Zusammenhang die Gesetze irgend welcher andern Operationen, die an sich noch denkbar sind, unter sich haben werden. Die Erledigung dieser Frage möchte in der That eine Vorbedingung für weitere wichtige Untersuchungen bilden.

Es wird diese Frage zunächst zu beantworten sein für alle Operationen, deren Algorithmus auf einer Prämisse beruht von folgender Entstehungsweise. Es werden entweder zwei Elementarausdrücke einander gleich gesetzt, die verschiedenen (von den drei) Klassen angehören, oder aber in einer von den bisher betrachteten Formeln der zweiten oder auch der dritten Gattung wird einseitig eine solche Vertauschung von Buchstaben vorgenommen, die den Werth des auf der gedachten Seite stehenden Ausdrucks gemeinhin verändert und deshalb in der gewöhnlichen Arithmetik unerlaubt ist, d. h. dort die Formel zu einer falschen machen würde [letzteres wäre bei den Gleichungen der ersten Gattung bekanntlich nicht möglich].

Erst wenn — auch für die verschiedenen Arten von Werthgemeinschaft — bei allen derartigen Beziehungen eine Uebersicht der Cyklen und Conclusionen gewonnen ist, werden vom formalen Standpunkte aus die Operationen erledigt sein, die ein *reines* Grundgesetz haben — ein solches wenigstens, welches aussagt, dass zwei successive Operationen der betreffenden Stufe (mit drei allgemeinen Zahlen) äquivalent sind zwei andern successiven Operationen ebendieser Stufe.

Es würde hieran ferner die Betrachtung solcher Algorithmen (der letztgenannten Art) sich reihen, in deren Grundgesetz zwei-, drei- oder viererlei Operationen und Stufen vertreten sind, also die Operationen von *gemischtem* Grundgesetze. Aehnliches noch für mehr als drei Zahlen. Weiter kämen die Operationen, in deren Grundgesetz einzelne von den allgemeinen Zahlen sich hüben

oder drüben auch mehr als ein mal engagirt finden, so namentlich distributiv wiederkehren, u. s. w. Und endlich könnten verschiedene Algorithmen auch in Combination miteinander untersucht werden — wie denn im vorangegangenen z. B. die beiden Algorithmen VIa. und VIb. auch zusammengekoppelt das Commutationsgesetz noch nicht zu bedingen vermögen, sondern einen ausgedehnten Algorithmus zusammensetzen, der seinerseits noch immer mit der gewöhnlichen Arithmetik nicht ganz zusammenfällt.

In das Gebiet der gemeinen Algebra fallen zwar von allen Untersuchungen der letztgenannten Gattungen nur noch die wenigen hinein, welche den Inhalt der beiden nächsten Paragraphen ausmachen, und darüber hinaus sind dieselben bis jetzt überhaupt noch nicht cultivirt worden. Immerhin lege ich einigen Werth darauf, dass schon gleich beim Eintritt in die algebraischen Disciplinen sich dem Anfänger der Blick auf ein unermessliches Feld eröffne, auf welchem er seinen Forschertrieb bethätigen und seinen Scharfsinn erproben kann. —

§ 92. Specifische Gesetze der dritten Stufe.

Wie sich vollends im nächsten Paragraphen herausstellen wird (insofern daselbst die noch übrigen Gesetze untergebracht werden) ist:

(B) das einzige Gesetz, welches auf der dritten Operationsstufe von specifischem Charakter ist, dieses:

(251) $$(a^b)^c = a^{bc}.$$

Wird dasselbe als Prämisse aufgefasst, so zieht es ein System von Conclusionen nach sich, das die grösste Analogie im Detail sowohl als in der Gesammtgliederung mit dem Algorithmus I. des Associationsgesetzes besitzt, nämlich das folgende:

(252) $$\begin{cases} \sqrt[c:b]{a} \mathrel{\ni\!\!=} (\sqrt[c]{a})^b = a^{b:c} \\ \dfrac{a}{\overset{b}{\log} c} \quad \divideontimes \quad a \overset{c}{\log} b \mathrel{=\!\!\in} \overset{\sqrt[a]{c}}{\log} b; \end{cases}$$

(253) $$a^{\frac{b}{c}} \mathrel{=\!\!\in} \sqrt[c]{a^b} \quad \mathrel{\ni\!\!=} \sqrt[\frac{c}{b}]{a}, \qquad b : \overset{a}{\log} c \mathrel{=\!\!\in} \overset{c}{\log}(a^b) \mathrel{\ni\!\!=} (\overset{c}{\log} a) b;$$

(254) $$\sqrt[bc]{a} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}, \quad \overset{b}{\log} \sqrt[c]{a} = \frac{\overset{b}{\log} a}{c}, \quad (\overset{b}{\log} a) : c = \overset{b^c}{\log} a.$$

(255) $$\overset{\sqrt[a]{n}}{\log} \sqrt[b]{n} \mathrel{\ni\!\!=} \frac{a}{b}, \qquad ab \mathrel{=\!\!\in} \overset{\sqrt[a]{n}}{\log}(n^b), \qquad a : b \mathrel{=\!\!\in} \overset{n^b}{\log}($$

(256) $$\begin{cases} \sqrt[bn]{a^n} \Big| \mathrel{\ni\!\!=} \sqrt[b]{a} = \sqrt[\frac{b}{n}]{\sqrt[n]{a}} \mathrel{\ni\!\!=} (\sqrt[n]{a})^{\frac{n}{b}} \Big\| \overset{b}{\log} n . \overset{n}{\log} a \mathrel{=\!\!\in} \overset{n}{\log} a : \overset{n}{\log} b = \overset{b}{\log} a \mathrel{=\!\!\in} \Big| \dfrac{\overset{b}{\log} n}{\overset{a}{\log} n} \\ \sqrt[n:b]{a^n} \mathrel{\ni\!\!=} (\sqrt[n]{a})^{nb} = a^b = (a^n)^{b:n} \end{cases}$$

Was die Analogie in der Gesammtgliederung betrifft, so fehlt zur Vollendung derselben allerdings die dreifache Gleichung, welche beim associativen Algorithmus die erste Stelle einnahm; dieselbe ist jedoch durch die zwei Doppelbeziehungen (252) reichlich vertreten. Ferner fehlt bei den letzten drei Gruppen von Umformungsregeln das Hinzutreten je eines vierten Ausdruckes und bieten statt dessen die drei Gleichungen (255) sich dar. Im einzelnen manifestirt sich die gedachte Analogie daran, dass man jede Proposition des gegenwärtigen Algorithmus aus der entsprechenden des associativen erhält, indem man auf einer Seite beide, auf der andern nur die eine Operation um eine Stufe erhöht.

Behufs Herleitung von (252) hat man zunächst die directe Umformung:

$$\left(\sqrt[c]{a}\right)^b = \left(\sqrt[c]{a}\right)^{c(b:c)} = \left\{\left(\sqrt[c]{a}\right)^c\right\}^{b:c} = a^{b:c};$$

sodann die beiden Schlussreihen:

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} \left(\sqrt[c]{a}\right)^b, \quad \sqrt[b]{x} \;(=)\; \sqrt[c]{a}, \quad a \mathrel{=\!\!\!\in} \left(\sqrt[b]{x}\right)^c = x^{c:b}, \quad x \mathrel{=\!\!\!\in} \sqrt[c:b]{a};$$

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} a \overset{c}{\log} b, \quad x : a \mathrel{=\!\!\!\in} \overset{c}{\log} b, \quad b = c^{x:a} = \left(\sqrt[a]{c}\right)^x, \quad x \mathrel{=\!\!\!\in} \overset{\sqrt[a]{c}}{\log} b,$$

welche für $\sqrt[b]{\sqrt[c:b]{a}}$ resp. $\left(\overset{\sqrt[a]{c}}{\log} b\right) : a$ umkehrbar werden. Endlich ist überhaupt nur bedingungsweise ausführbar — nämlich vor- oder rückwärts je unter einer eigenthümlichen leicht zu erkennenden Voraussetzung — die Schlussreihe:

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{\overset{b}{\log} c}, \quad x \overset{b}{\log} c \mathrel{\ni\!\!\!=} a, \quad \overset{b}{\log} c \mathrel{\ni\!\!\!=} a : x, \quad c = b^{a:x} = \left(\sqrt[x]{b}\right)^a,$$

$$\sqrt[a]{c} \mathrel{\ni\!\!\!=} \sqrt[x]{b}, \quad \left(\sqrt[a]{c}\right)^x \mathrel{\ni\!\!\!=} b, \qquad x \mathrel{=\!\!\!\in} \overset{\sqrt[a]{c}}{\log} b,$$

worin das drittletzte Beziehungszeichen rückwärts durch (=) zu ersetzen. Damit ist von (252) nun auch das Coordinationszeichen gerechtfertigt.

Der Beweis der Relationen (253) und (254) geschieht durch folgende vier nicht umkehrbare Ketten von Schlüssen:

$$x = a^{\frac{b}{c}}, \quad x^c = \left(a^{\frac{b}{c}}\right)^c = a^{\frac{b}{c}c} = a^b, \quad x \mathrel{=\!\!\!\in} \sqrt[c]{a^b};$$

$$\mathrel{=\!\!\!\in} \sqrt[\frac{c}{b}]{a}, \quad x^{\frac{c}{b}} = a, \quad \left(x^{\frac{c}{b}}\right)^b = a^b, \quad x^{\frac{c}{b}b} = x^c = a^b, \qquad x \mathrel{=\!\!\!\in} \sqrt[c]{a^b};$$

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} (\overset{c}{\log} a)\, b, \quad c^x \mathrel{=\!\!\!\in} c^{(\overset{c}{\log} a)\, b} = \left(c^{\overset{c}{\log} a}\right)^b = a^b, \qquad x \mathrel{=\!\!\!\in} \overset{c}{\log}(a^b);$$

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} b : \overset{a}{\log} c, \quad (\overset{a}{\log} c)\, x \mathrel{\ni\!\!\!=} b, \quad a^{(\overset{a}{\log} c)\, x} \mathrel{\ni\!\!\!=} a^b, \quad \left(a^{\overset{a}{\log} c}\right)^x = c^x = a^b, \quad x \mathrel{=\!\!\!\in} \overset{c}{\log}(a^b),$$

sowie durch die drei umkehrbaren Schlussreihen:

$$x \mathrel{=\!\!\!\!\in} \sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}\,,\quad x^b \mathrel{=\!\!\!\!\in} \sqrt[c]{a}\,,\quad (x^b)^c = x^{bc} = a,\quad x \mathrel{=\!\!\!\!\in} \sqrt[bc]{a};$$

$$x \mathrel{=\!\!\!\!\in} \frac{\overset{b}{\log} a}{c},\quad xc \mathrel{=\!\!\!\!\in} \overset{b}{\log} a,\quad b^{xc} \mathrel{=\!\!\!\!\in} b^{\overset{b}{\log} a} = a,\quad (b^x)^c = a,\quad b^x \mathrel{=\!\!\!\!\in} \sqrt[c]{a},\quad x \mathrel{=\!\!\!\!\in} \overset{b}{\log} \sqrt[c]{a};$$

$$x \mathrel{=\!\!\!\!\in} (\overset{b}{\log} a) : c,\quad cx \mathrel{=\!\!\!\!\in} \overset{b}{\log} a,\quad b^{cx} \mathrel{=\!\!\!\!\in} b^{\overset{b}{\log} a} = a,\quad (b^c)^x = a,\quad x \mathrel{=\!\!\!\!\in} \overset{b^c}{\log} a.$$

(C). Ein Algorithmus, dessen Prämisse wäre:

$$(a^b)^c = a^{cb},$$

würde (hinsichtlich der Operationen zweiter Stufe) dem vorigen conjugirt sein und kann, soferne die Multiplication commutativ angenommen wird, als völlig mit jenem identisch angesehen werden.

Es wird kaum nöthig sein, ausdrücklich zu erwähnen, dass bei den vorstehenden Deductionen und Resultaten nur die inversen Operationen der dritten Stufe — auf welche ja das Interesse sich jetzt hauptsächlich concentrirt — als vieldeutige angenommen wurden, wogegen auf der zweiten Stufe den Divisionen die gewöhnliche Auffassung derselben als eindeutiger Operationen zu Grunde liegt.

§ 93. Consequenzen der distributiven Gesetze für alle drei Stufen.

Höchst einfach lassen sich die Consequenzen der beiden Distributionsgesetze übersehen, welche wir in § 80. als achte Fundamentalvoraussetzung aufgeführt haben — wenigstens wofern man, was am nächsten liegt, die Addition noch als commutativ und die Subtraction als eindeutig gelten lässt.

(D). Es zieht nämlich die Prämisse:

$$a(b+c) = ab + ac \tag{257}$$

alsdann die Folgerungen nach sich:

$$\left\{\begin{aligned} a(b-c) &= ab - ac, \\ (b+c) : a &\mathrel{=\!\!\!\!\ni} (b:a) + (c:a), \\ (b-c) : a &\mathrel{=\!\!\!\!\ni} (b:a) - (c:a). \end{aligned}\right. \tag{258}$$

In Conjugation hiezu (hinsichtlich der Operationen zweiter Stufe) steht:

(E). Der Algorithmus, dessen Prämisse:

$$(a+b)c = ac + bc, \tag{259}$$

die Conclusionen bedingt:

$$\left\{\begin{aligned} (a-b)c &= ac - bc, \\ \frac{a+b}{c} &\mathrel{=\!\!\!\!\ni} \frac{a}{c} + \frac{b}{c}, \\ \frac{a-b}{c} &\mathrel{=\!\!\!\!\ni} \frac{a}{c} - \frac{b}{c}. \end{aligned}\right. \tag{260}$$

Der letztere hat bekanntlich auf der dritten Stufe ein exactes Analogon, welches aus ihm erhalten wird, indem man alle Operationen um eine Stufe erhöht — in Gestalt nämlich des Algorithmus

(F), dessen Prämisse:

$$(ab)^c = a^c b^c, \tag{261}$$

wenn hier auch wieder die Operationen der niedersten Stufe (die Divisionen) für eindeutig genommen werden, die Conclusionen nach sich zieht:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c, \quad a^c : b^c = (a:b)^c, \\ &\sqrt[c]{ab} \ni \sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b}, \\ &\sqrt[c]{\frac{a}{b}} \ni \frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}}, \quad \sqrt[c]{a:b} \ni \sqrt[c]{a} : \sqrt[c]{b}. \end{aligned}\right. \tag{262}$$

Auch zwischen dem Algorithmus des ersten Distributionsgesetzes, nämlich dem vorigen (D), und dem nunmehr allein noch zu discutirenden Iterationsgesetze der Elevation lässt sich eine gewisse Analogie nicht verkennen.

(G). Die Prämisse:

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c \tag{263}$$

dieses letzteren nämlich bedingt, dass auch

$$\left\{\begin{aligned} &a^{b-c} = a^b : a^c \\ &\overset{a}{\log}(bc) \ni \overset{a}{\log} b + \overset{a}{\log} c, \\ &\overset{a}{\log}(b:c) \ni \overset{a}{\log} b - \overset{a}{\log} c \end{aligned}\right. \tag{264}$$

sein muss (desgleichen für den Bruchstrich). Die gedachte Analogie ist aber hier eine weniger reine. Diesmal nämlich müssen, wenn (G) aus (D) abgeleitet werden soll, dort auf der einen Seite einer jeden Formel zwar beide Operationen, auf der andern aber nur die höhere Operation um eine Stufe erhöht werden. —

§ 94. Rückblick und Schlussbetrachtung.

Nachdem die begonnenen Separationen in der aus dem vorangegangenen erhellenden Weise zu Ende geführt sind, kann jetzt bequem verwirklicht werden, was wir in den Paragraphen 54. und 67. in Aussicht genommen und als ein Ziel vorgesetzt hatten, das eines der Motive zu den Untersuchungen des gegenwärtigen Abschnittes überhaupt abgab.

Nämlich die augenfälligen *Unsymmetrieen*, welche (in den §§ 65. bis 67.) der Zusammenstellung aller auf die dritte Operationsstufe bezüglichen Fundamentalgesetze anhaften, können wir jetzt leicht erklären; wir können sie bis zu ihrem Ursprung hinauf verfolgen und als innerlich nothwendige nachweisen.

In der That entsteht die Unsymmetrie jener ganzen Formelgruppe dadurch, dass *vier* vollkommen symmetrische und in sich abgeschlossene Algorithmen — und zwar die (A) des § 88., (B) [oder (C)] des § 92., (F) und (G) des § 93. — sich in einseitiger Weise an einander anschliessen und theilweise übereinanderschieben. Die vereinten Formelgruppen (157, 158 und 159) sind gewissermassen nur ein Conglomerat dieser vier Algorithmen, welche ihrerseits direct aus den im zweiten Kapitel aus dem Begriff der Elevation selbst abgeleiteten Grundeigenthümlichkeiten dieser Operation entspringen. Mit dieser Bemerkung ist aber der Beweis auch für die *Vollständigkeit* jener Formelzusammenstellung vollends erbracht.

Zweck und Nutzen der eigenthümlichen in diesem Abschnitt (erstmalig) durchgeführten Betrachtungen bleibt jedoch keineswegs hierauf allein beschränkt. Der Gewinn, auf den ich es bei diesen Untersuchungen abgesehen habe, ist nicht nur ein ästhetischer — soferne ich dadurch den Anforderungen des Geschmackes an die Symmetrie und Eleganz der Formelsysteme nachzukommen suchte — auch in logischer Hinsicht hatte ich nebenbei eine Bereicherung der Methodik im Auge. Und in der That möchte aus dem vorangehenden genugsam zu ersehen sein, dass man das Rechnen mit vieldeutigen Ausdrücken und Operationen bisher mit Unrecht zu vernachlässigen pflegte. Auch mit solchen Ausdrücken lässt sich *nach einfachen Gesetzen* logisch folgerecht operiren und um alle dabei auftretenden Schlussfolgerungen auch in kürzester Weise (mit Formeln) auszudrücken, sind nur die vier Zeichen der Werthgemeinschaft erforderlich. Hierdurch aber kann nicht nur den Untersuchungen eine anders nicht erreichbare Feinheit gegeben werden, sondern es bietet das Verfahren auch — wie aus einem späteren Bande erhellen wird — den einzigen Weg dar, um gewisse Fehlschlüsse und Klippen zu vermeiden, an denen die meisten Anfänger zu scheitern pflegen.

Endlich aber möchte von jenen Untersuchungen auch noch ein materieller Gewinn zu erwarten sein: durch die Erschliessung neuer Zahlensysteme nämlich, welche für die Bewältigung gewisser Gattungen von Problemen ganz besonders geeigenschaftet sind. Nach dieser Richtung hin wird sich übrigens die Tragweite der hier eingeleiteten Separationen erst dann völlig übersehen lassen, wenn man den höheren oder *extraordinären* (hypercomplexen etc.) Zahlen mehr, als bisher geschehen ist, Aufmerksamkeit zuwenden wird.

Im Hinblick auf die verhältnissmässige Seltenheit und den unbedeutenden Umfang, in welchem die eigentliche formale Algebra bis dato cultivirt worden ist, und namentlich auf die übermässig enge Beschränkung, in welcher man den Begriff der Zahlen und der Operationen gemeinhin aufzufassen pflegt, dürfte es angemessen erschei-

nen, dass ich die wichtigsten auf diesem Gebiet zu Tage getretenen Gesichtspunkte noch einmal übersichtlich zusammenfasse.

Die formale Algebra verhält sich zur gewöhnlichen fast ebenso, wie ein bewusstes Handeln nach bewährten Grundsätzen, ein Handeln aus ferner liegenden Zweckmässigkeitsrücksichten zu einem nur durch das unmittelbare Bedürfniss, durch die nächstliegenden Zweckmässigkeitsrücksichten bestimmten Handeln. Diese sucht nur die Mittel zur Erreichung schon gegebener, sich von selbst uns aufdrängender Zwecke*); jene dagegen geht umgekehrt darauf aus, zu finden, welche Zwecke sich mit allen denkbaren zu Gebote stehenden Mitteln verwirklichen lassen.

Die formale Algebra strebt daher zunächst darnach, in systematischer Vollständigkeit alle Annahmen aufzusuchen, welche — höchstens beschränkt durch die Anforderung einer gewissen Einfachheit ihres Charakters — überhaupt möglicherweise dazu dienen können, eine Rechnungsoperation zu definiren, d. i. eine bestimmte Art von operativer Verknüpfung der Zahlen eines Zahlensystems zu charakterisiren. Ihre begriffliche Bestimmung erhält eine Rechnungsoperation auf einem Zahlengebiete hauptsächlich dadurch, dass man ihr daselbst gewisse Grundeigenschaften beilegt, sie bestimmten Gesetzen unterwirft, welche — an sich willkürlich — nur mit einander verträglich zu sein brauchen.

Um dieselben verknüpfen zu können, muss die Operation schon fertige Zahlzeichen vorfinden (wie bei den Operationen der ordinären Arithmetik die Einer und die Ziffern), aus welchen sie dann neue Zahlzeichen zusammensetzt. Diese neuen aus der Operation selbst resultirenden Zahlzeichen ebensowohl als die ursprünglich gegebenen sind an sich — als blosse Laute oder Schriftzeichen betrachtet — natürlich ohne jegliches Interesse; sie erhalten ein solches erst durch die Art ihrer Verwendung, durch das, was sich mit ihnen ausrichten lässt. Ihre Wesenheit also liegt lediglich in der Regelung, die man ihrem Gebrauche gegeben hat und in den Bedeutungen oder dem Sinne, welche man ihnen dementsprechend wird unterlegen können. Es ist die Zahl sozusagen ein *disciplinirtes* Zeichen, welches nur insofern Werth erhält, als es sich den Eigenschaften gewisser Klassen von wirklichen Dingen anzupassen vermag und dadurch zum Träger dieser Eigenschaften, zum Repräsentanten oder Abbild jener Dinge sich eignet.

Einen *Weg* nun, um von der ordinären Arithmetik aus zu den in der extraordinären zu betrachtenden einfachsten Annahmen oder Elementarvoraussetzungen zu gelangen, bot uns die Methode der *Separation* dar, welche der zur Combination oder Verknüpfung entgegen-

*) So wenigstens in ihren ersten Anfängen. Dem Verfahren, welches man in ihren höheren Partieen einhält, die ferner noch auf diese Anfänge gegründet worden sind, soll damit natürlich der Charakter der echten Wissenschaftlichkeit nicht abgesprochen sein. Jedoch lässt eben dieser Weg sich schon früher — schon bei der Grundlegung selbst — betreten.

gesetzte Process ist. Es lieferte uns dieselbe einen Fingerzeig dafür, welcher Art die Elementarvoraussetzungen sind, die eigentlich sämmtlich in's Auge zu fassen wären.

Nachdem jene *erste* Aufgabe der formalen Algebra, das ist die Auffindung der brauchbaren oder zulässigen Prämissen, erledigt ist, tritt an sie als *zweite* Aufgabe die heran, zu jeder Prämisse sowohl im einzelnen als in ihren zulässigen Verknüpfungen mit anderen, erschöpfend die Conclusionen zu ziehen — vorerst immer mit der Beschränkung, dass ein gewisser Grad von Einfachheit nicht überschritten werde.

Nur für ein kleines, wenn auch abgerundetes Gebiet und gewissermassen nur als Vorbild für noch andere Untersuchungen ähnlichen Charakters sind diese beiden Aufgaben im gegenwärtigen Abschnitte wirklich gelöst worden — immerhin noch sozusagen mit grosser Mässigung oder Zurückhaltung. So bin ich z. B. auf die interessanten Schlüsse, welche in Bezug auf die Anzahl der Werthe bei den vieldeutigen Ausdrücken und deren Abhängigkeit von gewissen Operationsgliedern sich ziehen lassen würden, also auf die Frage der *Wievieldeutigkeit* der vieldeutigen Operationen hier gar nicht eingegangen.

Eine *dritte* Aufgabe der formalen Algebra wird hierauf darin bestehen, zuzusehen, welche in sich abgeschlossene Zahlensysteme, die von einheitlichen Gesetzen ihrer operativen Verknüpfung beherrscht sind, sich durch die gefundenen Operationen construiren lassen, um endlich *viertens* zu entscheiden, welche geometrische, physikalische oder überhaupt vernünftige Bedeutung diesen Zahlen und Operationen zukommen, welches reale Substrat ihnen untergelegt werden kann.

Diese beiden letzten Aufgaben, mit deren Erledigung die „formale“ Algebra sich eigentlich zur *absoluten* Algebra fortentwickelt, möchten erst mit Erfolg weiter zu behandeln sein, nachdem das actuelle Zahlensystem der ordinären Algebra — das System der gemeinen complexen Zahlen — seinen Abschluss gefunden haben wird. A priori aber lässt sich erwarten, dass man nach vollendetem Ausbau jener Disciplinen an irgend welche gegebene Aufgaben ganz anders ausgerüstet herantreten wird, als zuvor, dass man folgerichtig weit mehr Aussicht auf rasche Bewältigung dieser Aufgaben, sowie überhaupt auf die Erreichung der Zwecke, die man sich setzen mag, hernach besitzen wird.

Anhang.

Ueber die symbolische Darstellung von Summen und Producten.

Die einzigen Operationen, welche — zum Theil allerdings erst nach der Erweiterung ihrer ursprünglichen Bedeutung — es gestatten, mehr als zwei und zwar beliebig viele Zahlen auf einmal als Operationsglieder mit einander zu verknüpfen, sind die *Addition* und die *Multiplication*. Daher geben denn diese beiden Operationen noch Veranlassung zu einigen eigenthümlichen Betrachtungen. Die von ihnen resultirenden. Ausdrücke sind nämlich einer oft sehr nützlichen symbolisch abgekürzten Darstellung fähig, zu der man sich der Zeichen Σ und Π bedient.

Es gewähren diese Zeichen bei complicirten Rechnungen von allgemeinem Charakter in der That ganz ungemeine Vortheile; das erstere namentlich ist nahezu unentbehrlich.

Dem Umstand, dass dasselbe in der Regel von den elementaren Lehrbüchern ausser Acht gelassen wird, dürfte es zuzuschreiben sein, dass ein grosser Theil des lesenden mathematischen Publikums nicht hinlänglich mit diesen Zeichen vertraut ist und vor dem Gebrauch derselben eine ungerechtfertigte Scheu besitzt.

Ich werde durch den gegenwärtigen Anhang diesem Missstand vorzubeugen trachten und sollen deshalb die Gesetze, nach welchen mit diesen Zeichen zu operiren ist, nun auseinandergesetzt werden. Doch mag für den Studirenden der Rath am Platze sein, das betreffende erst dann nachzulesen, wenn er auf ein solches Zeichen stösst.

§ 95. Das Summenzeichen Σ. Summation nach einer Variabeln.

Wenn sich zur Betrachtung Summen darbieten aus vielen Gliedern, welche beliebige Werthe haben und darum durch Buchstaben darzustellen sind, so empfiehlt es sich im allgemeinen nicht, diese Buchstaben regellos zu wählen, sondern man wird passend irgend ein

Princip aufstellen, nach welchem aus dem Namen eines Gliedes derjenige des folgenden abgeleitet werden kann. Soferne nicht schon aus dem Ursprung und der Bedeutung oder Benennung der betreffenden Zahlen ein Fingerzeig sich entnehmen lässt, um dieselben mnemonisch zu bezeichnen, wird man stets die alphabetische Reihenfolge der Buchstaben zu dem fraglichen Princip erheben können und die gedachte Summe z. B. bezeichnen können mit:

$$a + b + c + d + e + \cdots$$

Am vortheilhaftesten jedoch erscheint für alle diese Fälle, namentlich auch für diejenigen, wo es auf die Anzahl der Glieder ankommt und selbige eine unbestimmte ist, die Bezeichnung der Glieder vermittelst eines Buchstabens, dem andre und andre natürliche Zahlen als Stellenzeiger oder Indices angehängt sind. So erhält man für eine n gliedrige Summe S etwa die Darstellung:

$$(265) \qquad S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n,$$

dergleichen wir schon im vorangegangenen fortwährend angewendet haben.

Bei dieser Bezeichnungsweise ist es in der That am leichtesten, sowohl: dem Namen eines jeden Gliedes es sogleich anzusehen, an welcher Stelle dasselbe in der Reihe eingeschaltet zu denken ist, als auch umgekehrt: für ein irgendwievieltes durch seine Ordnungszahl bestimmtes Glied den Namen stets gleich unzweifelhaft richtig zu treffen. So wird etwa u_{100} der Name des hundertsten, allgemein u_a derjenige des a^{ten} Gliedes (von vorne) sein; das b^{te} Glied von rückwärts heisst u_{n-b+1}, und die Bezeichnungsweise, indem sie die Stellenzahl eines jeden Gliedes dergestalt mit in den Namen desselben verflicht, ist darum schon die ausdrucksvollste. Ihr Hauptvorzug besteht aber darin, dass sie noch eine sehr erhebliche Abkürzung gestattet, die von der vorigen Bezeichnungsweise nicht ermöglicht wird — eben jene Abkürzung nämlich, die aus der Anwendung des Summenzeichens hervorgeht.

Zum Zwecke dieser Abkürzung stellt man den Index irgend eines Gliedes durch eine literale Zahl, z. B. a dar, bezeichnet also durch u_a das *allgemeine Glied* der Summe, und schreibt:

$$(266) \qquad S = \sum_{a=1}^{a=n} u_a \text{ — noch eleganter: } \sum_1^n{}^a u_a,$$

sprich: S ist gleich der Summe nach a, genommen von $a = 1$ bis $a = n$, von dem Gliede u_a, oder kürzer:

S gleich Summe, nach a von 1 *bis n, von* u_a.

Die Anwendbarkeit dieser symbolischen Bezeichnung ist jedoch noch eine weitergehende als aus dem bisher gesagten hervorzugehen scheint, indem man in dem allgemeinen Gliede auch noch die ganze Entstehungsweise sämmtlicher Glieder ausgeprägt annehmen kann.

Bei jeder Summe nämlich, deren Glieder überhaupt aus *einem* Ausdrucke dadurch hervorgehen, dass man einer in demselben vorkommenden literalen Zahl verschiedene Werthe beilegt, kann dieser Ausdruck selbst als allgemeines Glied genommen werden, und braucht man sich nach einer systematischen Bezeichnung der Glieder nicht erst anderweitig umzusehen. Der Ausdruck wird zu diesem Behufe, geradeso wie vorhin u_a, hinter das Summenzeichen geschrieben und dürfen wir uns also unter u_a auch eine solche analytisch dargestellte Function von a vorstellen. Da die Summe selbst durch ihre Glieder bestimmt ist, diese aber nach unsrer Voraussetzung aus dem erwähnten Ausdruck als allgemeinem Gliede hervorgehen, indem man verschiedene Werthe für a einsetzt, so muss nun, um die Darstellung zu vollenden, zu dem bereits geschilderten noch unzweideutig die Reihe der Werthe angegeben werden, welche der literalen Zahl nacheinander beizulegen sind. Die gedachte Angabe kann der Summenformel textuell beigefügt werden; am besten setzt man sie, wenn die von a anzunehmenden Werthe $a_1, a_2, \ldots a_n$ bekannt (oder durch Ausrechnung angebbarer Ausdrücke bestimmbar) sind in einer Klammer unter das Summenzeichen, und schreibt also wie folgt:

$$(267)\qquad u_{a_1} + u_{a_2} + u_{a_3} + \cdots + u_{a_n} = \sum_{(a=a_1,\, a_2, \ldots a_n)} u_a .$$

Jene literale Zahl, die wir uns mit a bezeichnet dachten, wird die (laufende) *Summationsvariable* genannt und gesagt, es sei die Summe über die Werthe derselben *auszudehnen*; die Reihe $a_1, a_2, \ldots a_n$ jener Werthe selbst aber heisst die Erstreckung oder *Amplitude* der Summe.

Anstatt übrigens diese Werthe der Summationsvariabeln entwickelt oder *explicite* anzugeben, genügt es auch — was namentlich bei Summationen nach mehreren Variabeln oft bequem ist — eine Gleichung oder ein System von Gleichungen hinzusetzen, durch welche diese Werthe (*implicite*) bestimmt sind. Doch muss alsdann auch das Zahlengebiet, dem diese Werthe angehören sollen, schon bekannt sein oder mit angegeben werden.

Die gedachten Gleichungen werden alsdann als die (die Variable) „*einschränkenden* Bedingungsgleichungen" oder als die *Bestimmungsgleichungen* (der Amplitude) bezeichnet. Vergl. § 115.

Ein Summenzeichen mit angehängtem Index, wie $\Sigma_a = \sum_a$ soll nur ausdrücken, dass die Summe *nach a zu nehmen*, also dieser Index als Summationsvariable zu betrachten sei.

Das Anschreiben der ganzen Summe ist hiemit zurückgeführt auf das einmalige Setzen des allgemeinen Gliedes (hinter dem Zeichen Σ), auf die Signalisirung der Summationsvariabeln, endlich auf die Angabe der Amplitude; und es wird die damit erzielte Ersparniss um so grösser sein, je grösser die Anzahl der Glieder und je complicirter der Ausdruck derselben ist.

In dem besondern Falle, wo die Werthe der Summationsvariabeln eine Sequenz von natürlichen Zahlen bilden, pflegt man die Amplitude dadurch auszudrücken, dass man ohne weitere Erläuterung wie in (266) den kleinsten dieser Werthe als *untere Summengrenze* unter, und den grössten derselben als *obere Summengrenze* über dem Summenzeichen anschreibt, resp. gleichsetzt der Summationsvariabeln. Es haben darnach, wenn $q > p$ ist, die folgenden Ausdrücke als äquivalent zu gelten:

$$(268)\quad \begin{cases} u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_{q-1} + u_q = \\ \qquad = \sum\limits_{(a=p,\, p+1,\, \ldots\, q)} u_a = \sum\limits_p^q {}^a u_a. \end{cases}$$

Da dieser Fall weitaus der wichtigste ist und wie in § 99. gezeigt wird, sich auch die andern Fälle auf denselben zurückführen lassen, so werden wir demselben künftig unser Hauptaugenmerk zuwenden.

Um ferner umgekehrt sich die Bedeutung einer mit dem Zeichen Σ symbolisch dargestellten Summe zu vergegenwärtigen, oder diese Summe ausführlich entwickelt hinzuschreiben (d. h. das Summenzeichen zu *interpretiren*), wird man in dem allgemeinen Gliede, welches hinter demselben steht, für die Summationsvariable zuerst die untere Summengrenze setzen und den erhaltenen Ausdruck als erstes Glied der gesuchten Summendarstellung schreiben; alsdann wird man ebenso der Summationsvariabeln fort und fort den nächst höheren von den Werthen beilegen, welche sie durchlaufen soll, bis man die obere Summengrenze erreicht und für die Summationsvariable eingesetzt hat; die sich ergebenden Ausdrücke wird man jedesmal als weitere Glieder den bisherigen anfügen.

So ergibt sich z. B.:

$$(269)\quad \sum_m^{m+n} {}^a u_a = u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+n-1} + u_{m+n}.$$

Die nachfolgenden Beispiele werden wohl genügen, um überhaupt das über den Uebergang von der einen Summendarstellung zur andern gesagte vollends zu verdeutlichen.

Ebenso wie auch später noch hie und da will ich jedoch bei diesen Beispielen das Zeichen 0 (*Null*) mit den Grundeigenschaften:

$$(270)\quad \begin{cases} 0 < 1, \quad 0 + a = a = a + 0, \quad a - 0 = a, \quad a - a = 0, \\ a \,.\, 0 = 0 = 0 \,.\, a, \quad 0 : a = 0, \quad a^0 = 1, \end{cases}$$

welche erst in Bd. 3 in ihrem gegenseitigen Zusammenhange gerechtfertigt werden, schon jetzt als Index oder Summationsvariable zulassen.

Es ist zum Exempel:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n = \sum_{1}^{n}{}_{a}\, a,$$

$$\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \cdots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{1}^{n}{}_{a} \frac{a(a+1)}{2},$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) = \sum_{0}^{n-1}{}_{a} (2a+1),$$

$$\sum_{0}^{n}{}_{a} a^2 = \sum_{1}^{n}{}_{a} a^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \cdots + (n-1)^2 + n^2,$$

$$\sum_{0}^{4}{}_{b} ax^b = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4,$$

$$\sum_{3}^{7}{}_{c} \frac{\alpha + c\beta}{2c\gamma - \delta} = \frac{\alpha + 3\beta}{6\gamma - \delta} + \frac{\alpha + 4\beta}{8\gamma - \delta} + \frac{\alpha + 5\beta}{10\gamma - \delta} + \frac{\alpha + 6\beta}{12\gamma - \delta} + \frac{\alpha + 7\beta}{14\gamma - \delta}.$$

Ebenso bedeutet der Ausdruck:

$$S = \Sigma a^3 y^a,$$

wenn die Summe ausgedehnt werden soll über alle geraden Zahlen von 2 bis 100, ausführlicher geschrieben das Polynom:

$$S = 2^3 y^2 + 4^3 y^4 + 6^3 y^6 + \cdots + 100^3 y^{100},$$

und lässt sich vollständig so zusammenfassen:

$$S = \sum_{(a = 2,\, 4,\, 6,\, \ldots\, 100)} a^3 y^a = \sum_{1}^{50}{}_{a} (2a)^3 y^{2a}, \quad \text{etc.}$$

Wie man sieht, lässt an Kürze und Uebersichtlichkeit oder gewissermassen Durchsichtigkeit die symbolische Bezeichnung nichts zu wünschen übrig.

Einen *Ausdruck* (nach einer Variabeln über ein gewisses Bereich von Werthen) *summiren* heisst äusserlich betrachtet: ihm ein Summenzeichen voranstellen, bei welchem dieses Werthbereich als Amplitude der Variabeln angemerkt ist, und läuft im wesentlichen diese Operation hinaus auf die Ausführung einer Reihe von Substitutionen (in

dem genannten Ausdruck) und nachherige Addition der Substitutionsergebnisse.

Man kann jedoch mit dem Summenzeichen auch an einer *Gleichung* (Ungleichung, Proposition) operiren. Ist z. B. für eine ganze Reihe von Werthen einer literalen Zahl a ein Ausdruck stets einem andern gleich, nämlich etwa:

$$u_a = v_a$$

für $a = a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, so kann man die obige Operation an den beiden Seiten dieser Gleichung für sich vollziehen, nämlich beide Ausdrücke über irgend welche von diesen Werthen summiren, und die Ergebnisse einander gleich setzen; man kann schreiben:

$$\Sigma_a u_a = \Sigma_a v_a\,,$$

wofern nur beiderseits die Amplitude als die gleiche angesehen wird und ganz dem Bereich jener Werthe angehört. Denn in der That wird diese Gleichung dann, interpretirt, lediglich hinauskommen auf eine Anwendung des bekannten Grundsatzes, dass gleiches zu gleichem addirt, gleiches gibt. Namentlich also ist das Summiren einer Gleichung im weitesten Umfange (nämlich nach irgend einer in ihr vorkommenden literalen Zahl als Summationsvariabeler und über ein beliebiges Bereich von Werthen als Amplitude) gestattet, wenn die Gleichung eine analytische — eine Formel — ist.

§ 96. Grundeigenschaften des Summenzeichens. Endliche Integration.

Zu dem bisherigen werden indess noch einige Bemerkungen nicht überflüssig erscheinen.

Das allgemeine Glied einer Summe bestimmt gewissermassen die *Form* ihrer sämmtlichen Glieder. In diese Form treten die zur Amplitude gehörenden Werthe als *Inhalt* ein, wodurch die Glieder sowohl im ganzen nach ihrer Menge als auch im einzelnen vollends bestimmt werden.

Dagegen kommt der Name der Summationsvariabeln selbst in der ausführlichen Darstellung der Summe gar nicht vor, und hängt die Bildung der Glieder nur mehr von den Werthen ab, welche *an die Stelle* der Summationsvariabeln zu treten haben. Die Wahl dieses Namens wird daher von vornherein willkürlich sein, und kann man auch *für einen Namen der Summationsvariabeln irgend einen andern setzen.* Z. B. es ist:

$$(271)\qquad \sum_1^n{}^a u_a \quad \text{einerlei mit} \quad \sum_1^n{}^b u_b = \sum_1^n{}^c u_c = \text{etc.},$$

alle diese Summen stellen in gleicher Weise den Ausdruck:

$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ vor, und wenn in u_a für a eine bestimmte Zahl gesetzt wird, so muss in der That dasselbe herauskommen, als wenn in u_b für b die nämliche Zahl gesetzt wird, da ja u_b aus u_a selbst durch Vertauschung von a und b hervorgeht. (Cf. Einleitung Nr. 21.)

Nur darauf wird immerhin zu achten sein, dass der Name der also willkürlich zu bezeichnenden Summationsvariabeln von demjenigen irgend einer andern in dem allgemeinen Gliede (als Operationsglied oder Index) auftretenden Zahl unterscheidbar bleibe, damit keine Verwechselung jener Variabeln mit einer (Summations-) *Constanten* stattfinde — damit „stehende" und „laufende" Werthe nicht vermengt werden.

So darf etwa in der Summe

$$\sum_{p}^{p+q} {}^{a} (px + ay)$$

die Summationsvariable a weder mit x noch mit y, p oder q bezeichnet werden, denn während z. B.:

$$\sum_{a=p}^{a=p+2} (px + ay) = \left\{px + py\right\} + \left\{px + (p+1)y\right\} + \left\{px + (p+2)y\right\}$$
$$= 3px + 3(p+1)y$$

ist, würde doch:

$$\sum_{x=p}^{x=p+2} (px + xy) = \left\{p^2 + py\right\} + \left\{p(p+1) + (p+1)y\right\} + \left\{p(p+2) + (p+2)y\right\}$$
$$= 3(p+1)(p+y)$$

bedeuten, u. s. w.

Lehrreich ist es noch, den besonderen Fall in's Auge zu fassen, wo das allgemeine Glied *constant* ist. Wenn nämlich die Summationsvariable weder als Index noch als Operationsglied in dem allgemeinen Glied vorkommt, wenn also dieses letztere sie überhaupt nicht enthält, so wird dasselbe unverändert bleiben, welche Werthe auch der Summationsvariabeln beigelegt werden mögen. Die Summe besteht alsdann aus lauter Gliedern, welche unter sich und dem allgemeinen Gliede gleich sind — sie geht in ein *Product* über, z. B.:

$$(272)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{m}^{m+n} {}^{a} u &= \underset{\frown}{\underset{m}{u}} + \underset{\frown}{\underset{m+1}{u}} + \underset{\frown}{\underset{m+2}{u}} + \cdots + \underset{\frown}{\underset{m+n}{u}} = \\ &= \underset{\frown}{\underset{1}{u}} + \underset{\frown}{\underset{2}{u}} + \underset{\frown}{\underset{3}{u}} + \cdots + \underset{\frown}{\underset{n+1}{u}} = u(n+1). \end{aligned}\right.$$

Ersetzt man jedes Glied durch 1, so wird die Summe die Anzahl aller ihrer Glieder vorstellen (§ 1.). Aus der letzten Betrachtung geht aber, indem $u = 1$ gesetzt wird, hervor:

$$(273)\qquad \sum_{m}^{m+n}{}^{a}\, 1 = n + 1, \quad \text{ebenso auch:} \quad \sum_{p}^{q}{}^{a}\, 1 = q - p + 1,$$

d. h. es gilt der Satz: *Die Anzahl der Glieder einer symbolisch dargestellten Summe ist immer um* 1 *grösser als der Ueberschuss der oberen Summengrenze über die untere,* oder als das sogenannte *Intervall* der Summengrenzen — wonach man denn diese Anzahl jederzeit leicht ersehen wird.

Ist namentlich die obere Grenze der unteren gleich, so besteht die Summe aus nur *einem* Gliede; sie ist ein Monom oder gar keine eigentliche Summe, z. B.:

$$(274)\qquad \sum_{p}^{p}{}^{a}\, u_a = u_p\,;$$

die Summation kommt alsdann auf eine blosse Substitution hinaus.

Ueber den Sinn, welcher dem Zeichen Σ beizulegen wäre, wenn die untere Grenze grösser als die obere angenommen wird, ist eine Einigung noch nicht erzielt. Bei manchen Untersuchungen scheint es vortheilhaft, alsdann der Summe die Bedeutung 0 unterzulegen, bei andern, darunter einfach dasjenige zu verstehen, was durch Vertauschung der unteren Grenze mit der oberen entsteht — eine Deutung, die wir adoptiren werden, soferne nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird.

Noch ist anzuführen, dass einige Schriftsteller, um bei der Summe die Analogie mit der Definition des „bestimmten Integrales" herzustellen, die obere Summengrenze als Werth der Summationsvariabeln *ausschliessen*, sodass z. B. mit $\sum_{1}^{n}$ bezeichnet wird, was wir durch $\sum_{1}^{n-1}$ ausdrücken würden und dass also die Reihe der ganzen Zahlen nur bis (*exclusive*) zur oberen Grenze von der Variabeln durchlaufen gedacht wird. Es müsste jedoch, um diese gedachte Analogie *völlig* herzustellen, neben allerhand andern Festsetzungen auch noch die getroffen werden, dass der Zuwachs oder das Increment (Δa) der Summationsvariabeln durch einen Factor hinter dem Summenzeichen repräsentirt würde, sodass man, wo letzteres doch ohnehin unterlassen wird, auch ohne Bedauern auf die gedachte Analogie zu verzichten vermag.

Aus demselben Grunde wäre es bei der hier adoptirten Auffassung des Summenzeichens nicht ganz passend, das Vorsetzen desselben, etwa des Zeichens $\sum_{m}^{n}{}^{a}$ vor einen die Zahl a enthaltenden Ausdruck u_a, die *endliche Integration* dieses Ausdruckes (nach a von m bis n) zu nennen — wie es doch gleichwohl hie und da geschieht. Hierüber an geeigneter Stelle näheres. —

Für den Fall, dass Rechnungsoperationen mit symbolisch dargestellten Summen vorzunehmen sind, pflegt man die Regeln für das

Setzen oder Weglassen der ursprünglich nöthigen Klammern so einzurichten, als ob die symbolische Summation eine *mittlere* Operationsstufe zwischen der Addition und der Multiplication einnehme (cf. § 73.). Demnach wird z. B. bedeuten:

$$\Sigma u \pm v = (\Sigma u) \pm v, \qquad \Sigma u \,.\, v = \Sigma(uv),$$
$$\Sigma u \pm \Sigma v = (\Sigma u) \pm (\Sigma v), \qquad \Sigma u \,.\, \Sigma v = \Sigma(u \,.\, \Sigma v),$$

wie immer auch die Grenzen und Summationsvariablen — die nur beiderseits in den entsprechenden Summen übereinstimmend angebracht sein müssen — beschaffen sein mögen. Dagegen darf bei $\Sigma(u \pm v)$, $\Sigma(u \pm \Sigma v)$ und bis auf weiteres auch bei $(\Sigma u) \,.\, v$, $(\Sigma u) \,.\, (\Sigma v)$ die Klammer nicht weggelassen werden.

§ 97. Fortsetzung. Zerlegung der Grenzen.

Es erübrigt nun, zu untersuchen, welche Gesetze aus der Bedeutung des Summenzeichens in Rücksicht auf die Eigenschaften der Addition (und Multiplication) hervorgehen.

Zunächst möge ein *einzelnes* Summenzeichen betrachtet werden.

Auf Grund des Commutationsgesetzes kann man, um dasselbe zu interpretiren, d. i. die Summe ausführlich anzuschreiben, die Summationsvariable ihre vorgeschriebene Werthenreihe in einer beliebigen Folge durchlaufen lassen, z. B. auch in einer von der oberen zur unteren Grenze absteigenden Ordnung, wie:

$$(275) \quad \sum_{1}^{n}{}^{a} u_a = \sum_{n}^{1}{}^{a} u_a = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_3 + u_2 + u_1.$$

Da jedoch laut vorangegangener Uebereinkunft auch beide Summengrenzen vertauscht werden dürfen, so mögen wir immerhin die (von der untern zur obern Grenze) *aufsteigende* Ordnung für gewöhnlich als Norm gelten lassen.

Auf Grund des Associationsgesetzes kann man einen Process ausführen, der die Umformung der Summe durch *Zerlegung der Grenzen* genannt wird, und von häufigster Anwendung ist.

Ist nämlich r irgend eine zwischen der untern Grenze p und der obern q liegende Zahl, mithin $p < r < q$, so kann man die gegebene Summe wie folgt zerlegen:

$$(276) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{p}^{q}{}^{a} u_a &= \sum_{p}^{r-1}{}^{a} u_a + \sum_{r}^{q}{}^{a} u_a \quad \text{und auch:} \\ &= \sum_{p}^{r}{}^{a} u_a + \sum_{r+1}^{q}{}^{a} u_a, \end{aligned} \right.$$

und geht hieraus auch umgekehrt hervor, dass:

$$\sum_{r}^{q} {}^a u_a = \sum_{p}^{q} {}^a u_a - \sum_{p}^{r-1} {}^a u_a, \tag{277}$$

$$\sum_{p}^{r} {}^a u_a = \sum_{p}^{q} {}^a u_a - \sum_{r+1}^{q} {}^a u_a. \tag{278}$$

Die Richtigkeit dieser Zerlegungen (276) bis (278) wird augenscheinlich, wenn man sich die Mühe nicht verdriessen lässt, die Bedeutung der symbolischen Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung ausführlich hinzuschreiben. Es ist ferner leicht, die Regeln für diese Zerlegungen allgemein in Worte zu kleiden, z. B.: Will man eine Summe *additiv* in zwei Theile spalten, so muss die untere Grenze der zweiten um 1 grösser sein als die obere der ersten Summe; es müssen diese beiden mittleren Grenzen successive Zahlen (der natürlichen Zahlenreihe) sein und zu der Werthenreihe der Summationsvariabeln gehören.

Soll aber die Summe *subtractiv* zerlegt werden, so kann dies entweder durch Erniedrigung der untern Grenze nach (277) oder durch Erhöhung der oberen nach (278) geschehen. Beidemal muss die Summe mit der umfassenderen Amplitude (d. i. mit dem erweiterten Spielraum der Summationsvariablen) zum Minuenden der gesuchten Differenz gemacht werden. Die Grenzen des Subtrahenden hat man nach der Vorschrift jener Gleichungen so einzurichten, dass gerade nur die zuviel genommenen Glieder, diese aber vollständig, in Abzug gebracht werden.

Die Gleichungen (276) bis (278) bieten, wenn sie auch noch für $r = p$ oder für $r = q$ gelten sollen, ein Beispiel zu der oben gemachten Bemerkung, wonach eine Summe bisweilen vortheilhaft durch Null ersetzt wird, sobald die obere Grenze kleiner ist als die untere.

Mit jeder Theilsumme auf der rechten Seite der genannten Gleichungen können dieselben Operationen noch beliebig lange fortgesetzt vorgenommen werden, woferne nur die Grenzen der ursprünglichen Summe weit genug auseinander liegen oder hinreichend viele Glieder u vorhanden sind. Namentlich kann man durch fortgesetzte Anwendung des Theorems (276) dasselbe dahin erweitern, dass unter der Annahme $p < r_1 < r_2 < r_3 \ldots < r_n < q$ die Zerlegung entsteht:

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{p}^{q} {}^a u_a &= \sum_{p}^{r_1-1} {}^a u_a + \sum_{r_1}^{r_2-1} {}^a u_a + \sum_{r_2}^{r_3-1} {}^a u_a + \cdots + \sum_{r_{n-1}}^{r_n-1} {}^a u_a + \sum_{r_n}^{q} {}^a u_a = \\ &= \sum_{p}^{r_1} {}^a u_a + \sum_{r_1+1}^{r_2} {}^a u_a + \sum_{r_2+1}^{r_3} {}^a u_a + \cdots + \sum_{r_{n-1}+1}^{r_n} {}^a u_a + \sum_{r_n+1}^{q} {}^a u_a, \end{aligned}\right. \tag{279}$$

deren Gesetz evident ist.

Umgekehrt wird also auch eine Reihe von Summen mit dergestalt „*aneinanderhängenden*“ Grenzen, wobei sich jede untere Grenze an die vorhergehende obere anschliesst, sich bei der Addition in eine einzige Summe zusammenziehen („*Vereinigung der Grenzen*“).

Als ein besonderer Fall der Zerlegung der Grenzen wird häufig die *Absonderung* des ersten oder des letzten Gliedes gefordert, z. B.:

$$\sum_{p}^{q} {}^{a} u_a = u_p + \sum_{p+1}^{q} {}^{a} u_a = \sum_{p}^{q-1} {}^{a} u_a + u_q, \tag{280}$$

oder, wenn beides zugleich geschehen soll, die Absonderung der beiden *äussersten* oder *Rand*-Glieder:

$$\sum_{p}^{q} {}^{a} u_a = u_p + \sum_{p+1}^{q-1} {}^{a} u_a + u_q, \tag{281}$$

oder auch die *Ausscheidung* irgend eines Gliedes u_r aus der Mitte:

$$\sum_{p}^{q} {}^{a} u_a = \sum_{p}^{r-1} {}^{a} u_a + u_r + \sum_{r+1}^{q} {}^{a} u_a. \tag{282}$$

§ 98. **Vollziehung distributiver Operationen am Summenausdrucke.**

Als Repräsentanten einer distributiven Operation kann man die Multiplication mit einem Factor ansehen; nur braucht die commutative Eigenschaft der Multiplication dabei keineswegs vorausgesetzt zu werden.

Für eine derartige Operation gilt nun die Gleichung:

$$x \sum_{m}^{n} {}^{a} u_a = \sum_{m}^{n} {}^{a} (x u_a) = \sum_{m}^{n} {}^{a} x u_a \tag{283}$$

(vergl. Schlussbemerkung zu § 96.). Geht man in der That auf die ursprüngliche Bedeutung der beiderseitigen Summenausdrücke zurück, so stellt diese Gleichung sich als einerlei heraus mit der folgenden:

$$x (u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n) = x u_m + x u_{m+1} + \cdots + x u_n,$$

deren Richtigkeit evident ist.

Aehnlich sieht man ein, dass auch:

$$\left(\sum_{m}^{n} {}^{a} u_a \right) x = \sum_{m}^{n} {}^{a} (u_a x) = \sum_{m}^{n} {}^{a} u_a x \tag{284}$$

ist — eine Gleichung, deren beiderseitige Ausdrücke zudem einerlei sein müssen mit denen der vorigen, sobald die in Betracht stehende Multiplication commutativ angenommen wird.

Es zeigen diese Formeln, *dass man mit einem Factor von ausserhalb eines Summenzeichens auch unter dasselbe gehen kann*, und dass

umgekehrt *ein constanter* (d. h. von der Summationsvariablen unabhängiger) *Factor des allgemeinen Gliedes einer Summe auch vorgezogen*, d. i. vor das Summenzeichen gesetzt *werden darf.* Das Symbol der Summation ist mit constanten Factoren commutativ.

Zur Gültigkeit dieser Sätze ist indessen keineswegs erforderlich, dass die Summationsvariable gerade eine Sequenz von natürlichen Zahlen durchlaufe, vielmehr ist die Werthenreihe derselben ohne allen Belang dabei und könnte man deshalb auch kürzer schreiben:

$$x\,\Sigma_a\, u_a = \Sigma_a\, x\, u_a,\quad (\Sigma_a\, u_a)\, x = \Sigma_a\, u_a\, x,$$

wobei nur miteinzubegreifen ist, dass selbstverständlich die rechts und links auftretenden Summen stets über einerlei Werthenreihe erstreckt aufgefasst werden. [In Betreff des Beweises dieser Behauptung wäre nur weiter unten (295) zu vergleichen.]

Factoren, welche mit der Summationsvariabeln behaftet sind, dürfen — im Gegensatz zu dem obigen — nicht vor das Summenzeichen gezogen werden. So ist z. B. der Ausdruck:

$$\sum_m^n{}^a x_a\, u_a = x_m\, u_m + x_{m+1}\, u_{m+1} + \cdots + x_n\, u_n$$

gründlich verschieden von diesem:

$$x_a \sum_m^n{}^a u_a = x_a\, u_m + x_a \quad u_{m+1} + \cdots + x_a\, u_n$$

welcher letztere übrigens eine Bemerkung herausfordert. Da nämlich die Summationsvariable erst durch ein ihr vorangehendes Summenzeichen mit Index oder Grenzenangabe als eine solche kenntlich gemacht wird, so kann sehr wohl ausserhalb des Ausdruckes, auf den sich das Summenzeichen bezieht, noch einmal der nämliche Buchstabe in einer ganz andern Bedeutung auftreten. Es muss z. B. in dem letzten Ausdrucke unter dem in x_a vor dem Summenzeichen befindlichen a nothwendig eine Zahl verstanden sein, die von der nachher hinzukommenden Summationsvariabeln a durchaus unabhängig ist.

In derartigen Fällen aber wird man sich bei der Anwendung der sonst gültigen Regeln stets behindert finden. Wollte man z. B. in dem in Rede stehenden Ausdrucke den Factor x_a unter das Summenzeichen bringen, so hätte man zuerst gemäss (271) den Namen der Summationsvariabeln zu wechseln und an Stelle dieses Ausdruckes zu schreiben:

$$x_a \sum_m^n{}^b u_b = \sum_m^n{}^b x_a\, u_b,$$

womit dann jede Zweideutigkeit vermieden sein wird.

Eine ähnliche Abänderung ist überhaupt jedesmal anzurathen, so oft sich ein solcher Zufall darbieten sollte, da aus der Anwendung einunddesselben Zeichens in zweierlei Bedeutung ohnehin leicht Missverständnisse erwachsen.

§ 99. Introduction neuer Summationsvariabeln.

Eine weitere oft mit der symbolisch dargestellten Summe vorzunehmende Aufgabe besteht darin, vermittelst einer Substitution eine neue Summationsvariable einzuführen, welche mit der alten in einem bestimmten Zusammenhange steht.

Ich will dieses Problem zuerst allgemein aussprechen. Der Anfänger kann alsdann die weiteren in diesem Paragraphen daran geknüpften sehr allgemeinen Betrachtungen überschlagen, da dieselben, wenn auch der Vollständigkeit halber geboten, doch zum Verständniss des zunächst folgenden nicht unbedingt erforderlich sind.

Sei

(285) $$a_1, a_2, \ldots a_r, \ldots a_n$$

die beliebige Reihe der Werthe, welche die Variable a eines Summenausdruckes:

$$S = \Sigma_a u_a$$

zu durchlaufen hat; sei also in ausführlicher Darstellung:

(286) $$S = u_{a_1} + u_{a_2} + \cdots + u_{a_r} + \cdots + u_{a_n}.$$

Alsdann kann man die Werthe:

(287) $$b_1, b_2, \ldots b_r, \ldots b_n,$$

welche bei einer neuen Summationsvariabeln b den vorigen bezüglich entsprechen sollen, von vornherein vollkommen willkürlich wählen, und kann sich die Aufgabe stellen, die nach a genommene und über die Werthenreihe (285) erstreckte Summe zu ersetzen durch eine ihr äquivalente jedoch nach b genommene und über die Werthenreihe (287) erstreckte Summe.

Der nämliche Ausdruck (286) für die Summe S lässt sich in der That auf sehr verschiedenen Wegen herstellen.

Bei der ersten Darstellung ad (285) denkt man sich, wie wir schon wissen, irgend ein Glied u_{a_r} jener Reihe dadurch abgeleitet, dass man im allgemeinen Glied u_a an die Stelle der Variabeln a den bestimmten Werth a_r treten lässt.

Ganz auf das gleiche jedoch kommt es auch hinaus, wenn man z. B. in $u_{a_r+b-b_r}$ den Buchstaben b durch den Werth b_r ersetzt. Und solcher Ausdrücke wie $a_r + b - b_r$, die die Eigenschaft haben, in den bestimmten Werth a_r über-

zugehen, wenn man das in ihnen vorkommende Argument b durch b_r ersetzt, lassen sich überhaupt unzählig viele construiren.

Wollte man jedoch etwa das eben angegebene Beispiel sich bei allen Gliedern zum Muster nehmen, also beim ersten Gliede: $u_{a_1+b-b_1}$, beim zweiten: $u_{a_2+b-b_2}$, u. s. w. zur Substitutionsbasis nehmen, so wäre, wie man sieht, der Zusammenhang von a und b bei jedem Gliede ein anderer, es wäre bei jedem einzelnen Gliede eine aparte Angabe für die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Summationsvariabeln erforderlich. Dadurch würde nun gerade der Vortheil der symbolischen Summendarstellung verloren gehen, denn es beruhte ja dieser Vortheil eben darauf, dass es genügte, statt der ganzen Reihe von Gliedern ein einziges (als allgemeines Glied) anzuschreiben und fernere an allen Gliedern vorzunehmende Operationen auf dieses einzige Glied zu übertragen.

Es wird demnach nur ein solcher Wechsel der Summationsvariabeln von Interesse sein, bei welchem der Zusammenhang zwischen der alten und der neuen Variabeln sich generell angeben lässt, nämlich der Reihe entlang an allen Stellen dem nämlichen Gesetze unterliegt.

Mit Rücksicht hierauf werde ich nun also annehmen, dass die eine Summationsvariable, und zwar a, eine „analytische Function" der andern b sei (cf. pag. 48) — d. i. eine Function, die wir uns, wenigstens für alle in Betracht kommenden Argumentwerthe (287) oder im Bereich der Summationsvariabeln, eindeutig gegeben und durch einen algebraischen Ausdruck $\varphi(b)$ vorgestellt zu denken haben.

Nach den (ebenda) in der Einleitung Nr. 28 gegebenen Erklärungen schliesst dieses die Vorraussetzung in sich, dass einem bestimmten Werth von b auch stets ein bestimmter Werth von a entspricht, dass also allfälligen gleichen Werthen von b niemals verschiedene Werthe von a entsprechen dürfen.

Sobald man nun einen solchen Ausdruck $\varphi(b)$ construirt hat, der die Eigenschaft besitzt, dass wenn man für b die Werthe (287) einsetzt und dabei alles übrige an ihm unverändert lässt, derselbe, ausgerechnet, beziehungsweise die Werthe (285) annehmen muss, sodass also:

$$(288) \qquad \varphi(b_1) = a_1, \ \varphi(b_2) = a_2, \ \ldots \ \varphi(b_n) = a_n,$$

so ist die verlangte Introduction der Variabeln vollzogen, indem man schreibt:

$$(289) \qquad S \doteq \Sigma_b \, u_{\varphi(b)}.$$

Man sagt alsdann, man habe die Summe vermittelst der *Substitution* $a = \varphi(b)$ transformirt.

Um übrigens das Ergebniss der bisherigen Betrachtung ganz zu übersehen, muss man bis jetzt die 5 Nummern (285) bis (289) in's Auge fassen, und empfiehlt es sich deshalb, dasselbe kürzer dahin zusammenzufassen. Es ist:

$$(290) \qquad \sum_{(a=a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_n)} u_a = \sum_{(b=b_1,\, b_2,\, \ldots\, b_n)} u_{\varphi(b)}$$

unter den Bedingungen (288).

Statt, wie hier noch, durch zwei Ansätze, lässt das Theorem in

der concisesten Weise und dennoch vollständig, sich sogar in einem einzigen Ansatze aussprechen wie folgt:

(291) $$\sum_{[a = \varphi(b_1),\, \varphi(b_2),\, \ldots\, \varphi(b_n)]} u_a = \sum_{[b = b_1,\, b_2,\, \ldots\, b_n]} u_{\varphi(b)}.$$

Als brauchbarste Form desselben ist aber folgende anzuführen, die allerdings eine weitere Bedingung als erfüllt voraussetzen muss.

Die Bedingung nämlich, dass in (285) und (287) gleichen Werthen von a auch nie verschiedene Werthe von b entsprechen. Wofern nur dieses der Fall ist, darf auch umgekehrt b als eine (im Gebiet der Summationsamplitude) eindeutig gegebene Function von a betrachtet werden.

Zur Darstellung dieser Abhängigkeit wird dann ein neues Functionszeichen erforderlich sein, als welches wir hier das Zeichen φ^{-1} benutzen und schreiben wollen: $b = \varphi^{-1}(a)$, weil dieses Zeichen aus hier nicht näher anzugebenden Gründen dem Sachverständigen seine Entstehungsweise oder Bedeutung (als eine „umgekehrte" oder „inverse" Function von φ) schon in sich selbst zu erkennen gibt.

Da nun die Function $a = \varphi(b)$ bereits einen analytischen Ausdruck besitzt, so lässt sich erwarten, dass man durch die allgemeine Auflösung eben dieser Gleichung nach b in den Stand gelangen wird, die Werthe von b wiederum generell durch die zugehörigen Werthe von a auszudrücken und so für die gedachte Function $\varphi^{-1}(a)$ ebenfalls einen analytischen Ausdruck zu bilden.

Dies vorausgesetzt wird also sein:

(292) $$b_1 = \varphi^{-1}(a_1),\; b_2 = \varphi^{-1}(a_2),\; \ldots\; b_n = \varphi^{-1}(a_n),$$

und darnach lässt sich nun die Introduction der neuen Variabeln b vermittelst der Substitution $a = \varphi(b)$ in den gegebenen Summenausdruck in Gestalt der Gleichung darstellen:

(293) $$\sum_{[a = a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_n]} u_a = \sum_{[b = \varphi^{-1}(a_1),\, \varphi^{-1}(a_2),\, \ldots\, \varphi^{-1}(a_n)]} u_{\varphi(b)},$$

worin wie gesagt die zwischen den beiden Functionen φ und φ^{-1} bestehende Beziehung:

(294) $$\varphi\left\{\varphi^{-1}(a)\right\} = a \quad \text{oder} \quad b = \varphi^{-1}\left\{\varphi(b)\right\}$$

schon als eine selbstverständliche mit eingeschlossen ist.

In Worten: *Macht man in einer nach a genommenen Summe die Substitution $a = \varphi(b)$, so ist jedesmal: $b_r = \varphi^{-1}(a_r)$ der einem Werthe a_r von a zugeordnete Werth von b.* Nach dieser Regel aber werden sich namentlich auch die *Grenzen* der neuen Summe stets leicht ermitteln lassen.

Auf welche Weise man nun Functionen construiren kann, die den Bedingungen (288) oder (292) genüge leisten, wird allerdings erst in höheren Theilen der Analysis gelehrt, und werden wir uns demnächst nur auf die wichtigsten Specialfälle beschränken.

Anstatt zwischen den beiden Variabeln eine Beziehung in der Form $a = \varphi(b)$ anzunehmen, könnte man die Abhängigkeit beider Zahlen von einander noch allgemeiner in folgender Weise ausgedrückt annehmen. Man könnte annehmen, dass

zwischen a und b eine irgendwie gestaltete *Gleichung* oder ein solches *System von Gleichungen* besteht, durch dessen Auflösung man einen derartigen Ausdruck $\varphi(b)$ für die Variable a zu erhalten vermöchte.

Setzt man jedoch zwischen a und b auf's gerathewohl irgend eine Gleichung fest, so wird man die Erfahrung machen, dass dadurch der zu einem bestimmten Werth von a gehörige Werth von b im allgemeinen noch keineswegs *eindeutig* bestimmt ist — was doch die erste Bedingung dafür war, dass man ein vollkommen bestimmtes Introductionsverfahren erhalte. Selbst dann, wenn der Zusammenhang zwischen a und b in der Form (288) oder (292) willkürlich angenommen wird, indem man für die eine der beiden Functionen φ, φ^{-1} irgend einen Ausdruck von unzweideutiger Ausrechnungsweise wählt, kann der Fall eintreten, dass dadurch die andere dieser beiden Functionen noch nicht unzweideutig bestimmt ist, und ferner wird es sich leicht ereignen, dass die den gegebenen zugehörigen Werthe der neuen Variabeln nicht alle innerhalb desjenigen Zahlengebietes zu finden sind, auf welchem man wünscht oder angewiesen ist, sich zu bewegen.

In Anbetracht, dass zur Behandlung derartiger Fälle und zur Bewältigung der dabei auftauchenden Schwierigkeiten die nöthigen Vorkenntnisse an dieser Stelle noch nicht vorausgesetzt werden dürfen, gehe ich hierauf nicht näher ein.

Ich werde vielmehr das Problem in seiner vollen Allgemeinheit nunmehr ganz verlassen, und mich auf die Fälle beschränken, wo die Werthe der beiden Variabeln je eine *Sequenz von natürlichen Zahlen* bilden.

Für die eine der beiden Variabeln könnte diese Annahme sogar unbeschadet der Allgemeinheit stets gemacht werden. Denn gemäss der identischen Gleichung:

$$(295) \qquad \sum_{(a = a_1,\, a_2,\, \dots\, a_n)} u_a = \sum_{r=1}^{r=n} u_{a_r}$$

lässt sich in der That die Amplitude einer jeden Summe auf eine derartige (erst noch mit einer bestimmten Zahl, wie 1, beginnende) Sequenz zurückführen.

Wenn dagegen eine ähnliche Annahme gleichzeitig auch in Bezug auf die andere Variable zu Grunde gelegt wird, so involvirt dies eine wirkliche Beschränkung. —

§. 100. Fortsetzung. Die wichtigsten Specialfälle.

Wenn nun die Werthe der Summationsvariabeln a eine Sequenz von natürlichen Zahlen bilden, und ebenso die Werthenreihe der Variabeln b, so können wir, da es auf die Reihenfolge dieser Werthe nicht ankommt, z. B. annehmen, dass sie beidemal aufsteigend durchlaufen werden, und dass bei dieser Anordnung die gleichvielten Werthe von a und b einander zugeordnet seien.

Alsdann muss der Unterschied je zweier zugeordneten Werthe von a und b constant und gleich dem der unteren Summengrenzen sein.

Denn sind a und b zwei bestimmte einander correspondirende Werthe, so sind es auch $a + 1$ und $b + 1$, sodass in der That, wenn $a > b$:

$$(a + 1) - (b + 1) = a - b,$$

oder im entgegengesetzten Falle:

$$(b + 1) - (a + 1) = b - a$$

ist. Nennen wir diesen Unterschied nun d, so ist im ersten Falle: $a = b + d$, im zweiten: $a = b - d$; und zwar gilt dieses während d sich gleichbleibt, für je zwei zugeordnete Werthe von a und b, da, wenn die Gleichung nur für zwei bestimmte Werthe erfüllt ist, sie auch für die nächstfolgenden Werthe richtig bleiben muss.

Beide Fälle lassen sich gleichzeitig abhandeln, indem man schreibt:

$$(296) \qquad a = b \pm d, \quad b = a \mp d.$$

Waren nun p und q die Grenzen der nach a genommenen Summe Σu_a, so werden $p \mp d$ und $q \mp d$ die zugehörigen Grenzen der nach b zu nehmenden Summe sein, und ausserdem u_a durch die Substitution übergehen in $u_{b \pm d}$, daher wird:

$$(297) \qquad \sum_{p}^{q}{}^{a}\, u_a = \sum_{p \mp d}^{q \mp d}{}^{b}\, u_{b \pm d},$$

worin entweder durchweg die oberen oder durchweg die unteren Zeichen zu nehmen sind. Dieses ist aber die verlangte Transformation der linkerhand stehenden Summe vermittelst der Substitution (296).

Lässt man die oberen Zeichen gelten, so wird die Amplitude der gegebenen Summe durch die Substitution in der Zahlenreihe rückwärts geschoben; nimmt man die unteren, so wird sie in die Höhe gerückt, während das Intervall stets sich gleich bleibt.

Beispiele:

$$\sum_{106}^{175}{}^{a}\, u_a = \sum_{1}^{70}{}^{b}\, u_{105 + b}, \quad \sum_{33}^{53}{}^{a}\, (67 + a)^3 v_{2a + 134} = \sum_{100}^{120}{}^{b}\, b^3 v_{2b}, \text{ etc.}$$

Sehr oft empfiehlt sich auch die Substitution:

$$(298) \qquad a = s - b, \quad b = s - a,$$

bei welcher anstatt wie vorhin die Differenz, so jetzt die Summe:

$$a + b = s$$

der beiden Variabeln einer Constanten gleichgesetzt ist.

Die Anwendung dieser Substitution gibt:

$$(299) \qquad \sum_{p}^{q}{}^{a}\, u_a = \sum_{s - q}^{s - p}{}^{b}\, u_{s - b},$$

wobei diesmal die untere Grenze rechterhand der oberen links (und

umgekehrt) entspricht. Da $s - p > s - q$, wenn $p < q$, so wird durch eine derartige Substitution namentlich stets bewirkt, dass die ursprüngliche Reihenfolge der Glieder sich umkehrt — wofern man nur die neue Variable ihre Werthenreihe nicht etwa absteigend durchlaufen lassen will.

Als besondrer Fall ist die Annahme: $s = p + q$ zu erwähnen, durch welche sich:

$$(300) \qquad \sum_{p}^{q}{}^{a} u_a = \sum_{p}^{q}{}^{b} u_{p+q-b}$$

ergibt — eine Substitution, welche dadurch bemerkenswerth erscheint, dass Amplitude und Grenzen der Summe durch sie ganz unverändert gelassen werden. Dagegen bewirkt diese Substitution natürlich abermals eine Vertauschung des ersten Gliedes mit dem letzten, sowie je der von diesen beiden gleichweit abstehenden Glieder.

Die beiden Schemata:

$$(301) \qquad \sum_{0}^{n}{}^{a} u_a = \sum_{0}^{n}{}^{a} u_{n-a} \text{ und } \sum_{1}^{n}{}^{a} u_a = \sum_{1}^{n}{}^{a} u_{n+1-a}$$

stellen Beispiele zu dem vorstehenden Theoreme vor, welche von der häufigsten Anwendung sind. Es ist dabei zu bemerken, dass in der That nichts im Wege steht, nach vollzogener Substitution die neue Variable wieder mit dem Namen der alten zu benennen.

Durch eine nach dem Vorbild von (297) oder (299) ausgeführte Substitution lässt sich insbesondere stets bewirken, dass die eine Grenze einer gegebenen Summe einen beliebig gegebenen Werth habe.

Soll zum Exempel die untere Grenze der in jenen Gleichungen zum Ausgangspunkt genommenen Summe den Werth m erhalten, so bestimme man in (297) die Zahl d so, dass dem Werthe $a = p$ der Werth $b = m$ entspricht, dass also: $p = m \pm d$ wird. Hieraus bestimmt sich:

$$d = p - m, \quad \text{wenn } p > m,$$

und

$$d = m - p, \quad \text{wenn } p < m.$$

Im ersten Falle ergibt sich also:

$$(302) \qquad \sum_{p}^{q}{}^{a} u_a = \sum_{m}^{q+m-p}{}^{b} u_{b+p-m},$$

und genau dasselbe erhält man auch im zweiten Falle.

Aehnlich kann die Summe auch auf die obere Grenze n gebracht werden nach dem Schema:

$$(303) \qquad \sum_{p}^{q}{}^{a} u_a = \sum_{p+n-q}^{n}{}^{b} u_{b+q-n}.$$

Speciell möge noch die Reduction auf die untere Grenze 0 oder 1 angeführt werden:

$$(304)\qquad \sum_p^q {}^a u_a = \sum_0^{q-p} {}^a u_{a+p} = \sum_1^{q-p+1} {}^a u_{a+p-1}.$$

Hiezu, wie zu allen Formeln dieses Paragraphen, ist es leicht, die Probe für die Richtigkeit (derselben) zu machen. —

Um durch ein Beispiel den Nutzen der vorangehenden Theoreme zu illustriren, will ich eine häufig anwendbare Reduction in der symbolisch abgekürzten Bezeichnung durchführen. Ohne dass man nöthig hätte, irgend einen der Summenausdrücke ausführlich entwickelt (interpretirt) hinzuschreiben, kann man den in folgender Gleichung links stehenden Ausdruck nach dem Vorbild dieser Gleichung vereinfachen:

$$(305)\qquad \sum_1^{p+q} {}^a u_a - \sum_1^q {}^a u_{p+a} = \sum_1^p {}^a u_a.$$

Nimmt man in der That mit dem ersten Summenausdruck nach § 97. eine Zerlegung der Grenzen vor, und macht im zweiten die Substitution $p + a = b$, so geht die linke Seite über in:

$$\sum_1^p {}^a u_a + \sum_{p+1}^{p+q} {}^a u_a - \sum_{p+1}^{p+q} {}^b u_b,$$

und hebt sich nun die letzte gegen die vorletzte dieser Summen fort.

Auf ähnliche Weise ergibt sich:

$$(306)\qquad \sum_1^{p+q} {}^a u_a + \sum_1^q {}^a u_{p+a} = \sum_1^p {}^a u_a + 2 \sum_1^q {}^a u_{p+a},$$

$$(307)\qquad x \sum_0^{p+q} {}^a u_a + y \sum_0^q {}^a u_{p+a} = x \sum_0^{p-1} {}^a u_a + (x+y) \sum_p^{p+q} {}^a u_a,$$

und dergl. mehr. —

§ 101. Distributive Eigenschaft des Summationssymbols. Addition und Subtraction von Summenausdrücken.

Gehen wir nun zu den Untersuchungen über, bei welchen von vornherein *mehrere* Summenausdrücke in Betracht zu ziehen sind, so begegnen wir zuerst dem Satze:

Summen von einerlei Amplitude können durch Addition oder Subtraction vereinigt werden, indem man ihre allgemeinen Glieder, nachdem in allen die Summationsvariable übereinstimmend bezeichnet worden ist, entsprechend vereinigt, und das Ergebniss über das gemeinschaftliche Bereich von Werthen summirt.

In Zeichen:

$$(308)\quad \sum_p^q{}^a u_a + \sum_p^q{}^b v_b + \sum_p^q{}^c w_c + \cdots = \sum_p^q{}^a (u_a + v_a + w_a + \cdots)$$

$$(309)\quad \sum_p^q{}^a u_a - \sum_p^q{}^b v_b = \sum_p^q{}^a (u_a - v_a).$$

Umgekehrt ausgesprochen heisst dies: *Die Operation mit dem Summenzeichen ist distributiv.* Statt einem ganzen Aggregate kann man das Summenzeichen auch jedem einzelnen Gliede desselben vorsetzen.

Der Beweis der Theoreme (308) und (309) ergibt sich leicht durch Interpretation der beiderseitigen Ausdrücke.

Schreibt man z. B. in (308) die successiven Glieder des rechter Hand stehenden Ausdruckes untereinander, so ergibt sich die linke Seite, indem man statt der Zeilen zuerst die Colonnen summirt u. s. w.

Zum Exempel ist:

$$(310)\quad \sum_p^q{}^a (x + u_a) = (q - p + 1)\, x + \sum_p^q{}^a u_a.$$

Etwas allgemeiner noch als (308) und (309) erscheint folgendes Theorem, welches sich auf den Fall bezieht, wo aus den Summen von übereinstimmender Amplitude durch Multiplication mit constanten Zahlen und Addition oder Subtraction irgend ein Aggregat gebildet ist:

$$(311)\quad x \sum_p^q{}^a u_a + y \sum_p^q{}^b v_b + z \sum_p^q{}^c w_c + \cdots = \sum_p^q{}^a (xu_a + yv_a + zw_a + \cdots),$$

und worin auch $-y$ für $+y$ sowie $-z$ für $+z, \ldots$ beiderseits geschrieben werden dürfte. —

Sind die Grenzen bei den additiv oder subtractiv zu vereinigenden Summen *verschieden*, so lässt sich ein so einfacher Satz wie der vorstehende nicht anwenden. Doch kann man wenigstens durch passende Substitutionen dann immerhin bewirken, dass sämmtliche Summen mit einem bestimmten Werth ihrer Variabeln, z. B. mit ihrer unteren Grenze übereinstimmen. Durch geeignete Zerlegung der Grenzen kann man ferner von jeder Summe einen Theil absondern, der bei allen das gleiche Intervall besitzt, z. B. das nämliche Intervall wie die mit dem kleinsten Intervall bedachte von den gegebenen Summen. Es kann nun mitunter Vortheile gewähren, wenn man endlich die so abgesonderten Theilsummen nach dem Vorbild von (311) vereinigt.

Als Exempel bei denen das Theorem des gegenwärtigen Paragraphen (zugleich mit früheren Theoremen) zur Anwendung kommt, will ich die folgenden anführen, welche zugleich Schemata zu häufig

erforderlichen Umformungsprocessen abgeben, immerhin also selbst noch von ziemlicher Allgemeinheit sind.

Wenn $q > p$ angenommen wird, so ist:

$$\sum_{p}^{q-1} {}^{a} (u_{a+1} - u_a) = u_q - u_p, \tag{312}$$

und insbesondere auch:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{1}^{n} {}^{a} (u_{a+1} - u_a) = u_{n+1} - u_1, \\ &\sum_{0}^{n-1} {}^{a} (u_{a+1} - u_a) = \sum_{1}^{n} {}^{a} (u_a - u_{a-1}) = u_n - u_0. \end{aligned} \right. \tag{313}$$

Denn durch Anwendung des Theorems (309) und Ausführung einer leicht zu ersehenden Substitution in der Minuendensumme endlich Anwendung von (280) wird die linke Seite der Gleichung (312):

$$\sum_{p+1}^{q} {}^{b} u_b - \sum_{p}^{q-1} {}^{a} u_a = u_q + \sum_{p+1}^{q-1} {}^{b} u_b - \sum_{p+1}^{q-1} {}^{a} u_a - u_p,$$

wo nun die beiden Summen rechts sich herausheben.

Ebenso ist noch allgemeiner:

$$\sum_{p}^{q} {}^{a} (u_{a+h} - u_a) = \sum_{p+h}^{q+h} {}^{b} u_b - \sum_{p}^{q} {}^{a} u_a,$$

ein Ausdruck, der für den Fall wo $p + h < q$, noch einer weiteren Reduction fähig ist, nämlich:

$$\sum_{p}^{q} {}^{a} (u_{a+h} - u_a) = \sum_{q+1}^{q+h} {}^{a} u_a - \sum_{p}^{p+h-1} {}^{a} u_a. \tag{314}$$

Unter derselben Voraussetzung ergibt sich auch:

$$\sum_{p}^{q} {}^{a} (x u_{a+h} + y u_a) = x \sum_{q+1}^{q+h} {}^{a} u_a + (x+y) \sum_{p+h}^{q} {}^{a} u_a + y \sum_{p}^{p+h-1} {}^{a} u_a, \tag{315}$$

z. B.:

$$\sum_{p}^{q} {}^{a} (u_{a+1} + u_a) = u_{q+1} + 2 \sum_{p+1}^{q-1} {}^{a} u_a + u_p. \tag{316}$$

Nach (300) und (311) ist ferner:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{p}^{q} {}^{a} (x u_a + y u_{p+q-a}) = (x+y) \sum_{p}^{q} {}^{a} u_a, \\ &\sum_{p}^{q} {}^{a} (u_a - u_{p+q-a}) = 0, \end{aligned} \right. \tag{317}$$

etc.

§ 102. Doppelsummen mit unabhängigen Grenzen.

Oft kommt es vor, dass das allgemeine Glied eines Summenausdruckes selbst eine Summe ist und deren allgemeines Glied wiederum, und so fort. Je öfter dies der Fall ist, um so grösser wird die durch Anwendung der Summenzeichen erzielte Ersparniss sein. Der ganze dergestalt symbolisch dargestellte Ausdruck heisst alsdann eine *mehrfache Summe.* Und zwar: wenn das allgemeine Glied eines Summenausdruckes nur eine *einfache* Summe ist, so heisst derselbe eine *Doppelsumme;* durch abermalige Summation einer Doppelsumme entsteht die *dreifache* Summe u. s. w.

Wir betrachten zunächst nur Doppelsummen, deren Grenzen (und Variabeln) von einander unabhängig sind. Eine solche ist z. B.

$$\sum_p^q {}^a \left\{ \sum_r^s {}^b u_{a,\,b} \right\};$$

doch braucht hiebei die als allgemeines Glied der ersten auftretende zweite Summe keineswegs in Klammer eingeschlossen zu bleiben, da man diese doch nicht anders als so gesetzt denken kann. Eine Einklammerung der beiden Summenzeichen mit Ausschliessung des Gliedes $u_{a,\,b}$ würde keinen Sinn darbieten und kann man ebenso auch bei einer mehrfachen Summe die verschiedenen Summationen nicht anders als *rückschreitend* ausgeführt verstehen, weshalb es denn überflüssig erscheint, diese Anordnung der Summationsprocesse mittelst eigener Klammern überhaupt anzudeuten.

Für die gedachten Doppelsummen gilt nun der durch die Gleichung darstellbare Satz:

$$\sum_p^q {}^a \sum_r^s {}^b u_{a,\,b} = \sum_r^s {}^b \sum_p^q {}^a u_{a,\,b}, \tag{318}$$

welcher aussagt, *dass die Reihenfolge der beiden zwischen constanten Grenzen genommenen Summationen auch umgekehrt werden darf.*

Zum Beweise des Satzes interpretire man das erste Summenzeichen linkerhand und wende das Theorem (308) an; dadurch geht die linke Seite über in:

$$\sum_r^s {}^b u_{p,\,b} + \sum_r^s {}^b u_{p+1,\,b} + \cdots + \sum_r^s {}^b u_{q,\,b} = \sum_r^s {}^b (u_{p,\,b} + u_{p+1,\,b} + \cdots + u_{q,\,b}),$$

und wenn nun hierin die Reihe rechterhand vermittelst des Summenzeichens wieder symbolisch zusammengefasst wird, so erhält man richtig die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung.

Vollständig interpretirt stellt obige Doppelsumme den Ausdruck dar:

$$\begin{array}{llll} u_{p,r} & + u_{p,r+1} & + \cdots + u_{p,s} & + \\ + u_{p+1,r} & + u_{p+1,r+1} & + \cdots + u_{p+1,s} & + \\ + \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ + u_{q,r} & + u_{q,r+1} & + \cdots + u_{q,s}, & \end{array}$$

der, geometrisch betrachtet, die Fläche eines Rechteckes ausfüllt, wenn die Glieder in die Felder, etwa von carrirtem Papiere, ordnungsmässig eingetragen werden. Man wird hieraus von neuem die linke oder die rechte Seite der Gleichung (318) erhalten, je nachdem man erst die Zeilen oder erst die Colonnen symbolisch mittelst Summenzeichen zusammenfasst.

Auch wenn *beliebig viele* Summationen (nach von einander unabhängigen Variabeln) zwischen constanten Grenzen nacheinander auszuführen sind, wird nun die Reihenfolge dieser Summationen überhaupt gleichgültig sein.

Zunächst erkennt man nämlich, dass von den aufeinanderfolgenden Summenzeichen *irgend zwei benachbarte* (in ihrer Verbindung mit der zugehörigen Variabeln und Amplitude) vertauscht werden dürfen. Denn wenn man sich die denselben vorhergehenden Summenzeichen hinwegdenkt [was darauf hinauskommt, dass man den Ausdruck, der das allgemeine Glied dieser letzteren bildet, für sich betrachtet], und wenn man zudem beachtet, dass auch der ganze auf die genannten beiden Summenzeichen folgende Ausdruck lediglich das allgemeine Glied dieser Doppelsumme vorstellt, so offenbart sich, dass das Theorem (318) auf eben diese Doppelsumme anwendbar ist, und kann man die übrigen Summenzeichen, von denen vorhin abstrahirt wurde, hernach wieder vorangesetzt denken. Die Vertauschbarkeit je zweier benachbarten Zeichen hat aber, wie schon bei verschiedenen Gelegenheiten (§ 10 und § 22, VII) nachgewiesen wurde, zur nothwendigen Folge, dass auch der ganzen Reihe dieser Zeichen eine beliebige Anordnung ertheilt werden kann.

Exempel: Durch Benutzung zweier Summenzeichen lässt das Theorem (311) sich am allgemeinsten und elegantesten wie folgt ausdrücken:

$$\sum_{1}^{n}{}^{a} x_a \sum_{p}^{q}{}^{b} u_{a,b} = \sum_{p}^{q}{}^{b} \sum_{1}^{n}{}^{a} x_a u_{a,b}. \tag{319}$$

§ 103. Multiplication und Factorenzerlegung von Summenausdrücken.

Es kann nunmehr ein wichtiger Satz angegeben werden, der sich auf die *Multiplication* von irgend welchen Summenausdrücken bezieht.

Bevor man eine solche unternimmt, muss bei einer jeden Summe Sorge getragen werden, dass der Name ihrer Variabeln in keinem der

übrigen Summenausdrücke irgendwie vorkomme, zu welchem Zwecke eventuell eine Abänderung dieses Namens vorzunehmen sein wird.

Alsdann aber gilt das Theorem:

Um das Product beliebig vieler Summenausdrücke zu bilden, darf man die allgemeinen Glieder derselben mit einander multipliciren und vor dieses Product die sämmtlichen Summenzeichen mit den zu ihnen gehörigen Grenzen in einer beliebigen Ordnung schreiben.

Insbesondre ist für zwei Factoren:

$$\left(\sum_p^q{}^a u_a\right)\left(\sum_r^s{}^b v_b\right) = \sum_p^q{}^a \sum_r^s{}^b u_a v_b, \tag{320}$$

und ist der Beweis dieser Gleichung leicht wie folgt zu führen.

Indem man erst die zweite Summe als eine einzige Zahl x betrachtet und das Theorem (284) anwendet, geht die linke Seite über in den Ausdruck: $\sum_p^q{}^a \left\{u_a \sum_r^s{}^b v_b\right\}$, welcher nach (283) gleich

$$\sum_p^q{}^a \left\{\sum_r^s{}^b (u_a v_b)\right\}$$

mithin der rechten Seite von (320) äquivalent ist, q. e. d.

Da bei diesem Beweise von dem Commutationsgesetze kein Gebrauch gemacht wurde, vielmehr derselbe ganz auf den beiden Distributionsgesetzen beruht, so gilt in der angegebenen Form (320) der Satz auch für *nichtcommutative* Multiplicationen; nur freilich wird man dann in dieser Gleichung weder rechts die Factoren u_a, v_a, noch links die ganzen Summenausdrücke einseitig vertauschen dürfen.

Von zwei Factoren ist der Satz leicht auf beliebig viele auszudehnen (durch Schluss von n auf $n+1$). Für solche spricht ihn etwa die Gleichung aus:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\sum_{a_1=p_1}^{a_1=q_1} u_{a_1}\right)\left(\sum_{a_2=p_2}^{a_2=q_2} u_{a_2}\right)\cdots\left(\sum_{a_n=p_n}^{a_n=q_n} u_{a_n}\right) = \\ &= \sum_{a_1=p_1}^{a_1=q_1}\ \sum_{a_2=p_2}^{a_2=q_2}\cdots\sum_{a_n=p_n}^{a_n=q_n} u_{a_1} u_{a_2}\cdots u_{a_n}, \end{aligned}\right. \tag{321}$$

und gilt diese Gleichung sowie der angeführte Satz auch wieder für nicht commutative Multiplicationen, woferne dabei nur die allgemeinen Glieder stets genau in derselben Ordnung belassen resp. multiplicirt werden, wie die Summenausdrücke, in denen sie vorkommen.

Bemerkenswerth ist es, dass in (321) auch sämmtliche Klammern

weggelassen werden dürfen, wie man durch Anwendung der Formel (284) mit Leichtigkeit erkennt.

Durch Vermittlung von (295) ist ferner leicht einzusehen, dass das Theorem dieses Paragraphen wieder unverändert gültig bleibt, wenn die als Amplitude der Summenausdrücke auftretenden Werthenreihen von ganz beliebiger Natur sind.

In Gestalt der Gleichung (321) leistet dieses Theorem die in § 18. nicht mehr angegebene Erweiterung des vollen Distributionsgesetzes auf mehr als zwei Factoren; es lehrt beliebig viele Summen auf einmal auszumultipliciren.

Umgekehrt kann dasselbe dazu angewendet werden, eine gewisse Art von mehrfachen Summen in ein Product von lauter einfachen Summen zu zerlegen, und zwar wäre es zu dem Ende etwa wie folgt in Worte zu fassen:

Wenn sich das allgemeine Glied einer mehrfachen Summe mit lauter constanten Grenzen in Factoren derart zerlegen lässt, dass ein jeder von ihnen die in den andern vorkommenden Summationsvariabeln gar nicht enthält, so zerfällt die ganze Summe in ein Product von lauter einfachen Summen, welche erhalten werden, indem man jenen Factoren je das auf ihre Variable bezügliche Summenzeichen voransetzt. —

§ 104. Doppelsummen mit abhängigen Grenzen.

Soll ein Summenausdruck:

$$S = \sum_{p}^{q}{}_{a}\, U_a$$

eine Doppelsumme sein, so muss, wie wir ausgemacht haben, das allgemeine Glied desselben selbst ein Summenausdruck sein, also in der Form erscheinen:

$$U_a = \sum_{r}^{s}{}_{b}\, v_b\,.$$

In dem letzten Ausdrucke rechterhand muss jedoch — woferne nicht ein durch die Gleichung (272) bereits längst erledigter Specialfall vorliegen soll — ausser der Summationsvariabeln b auch die a vorkommen.

Die Annahme, dass der Buchstabe a auch in dem Namen der Summationsvariabeln, welche hier durch b vertreten sind, selber vorkäme, kann unbeschadet der Allgemeinheit ausgeschlossen bleiben, da nach (271) wegen der Gleichgültigkeit des Namens der Summationsvariabeln sich einer jeden stets ein einfacher Buchstabe als Name ertheilen lässt.

Es bleiben demnach nur die beiden Möglichkeiten, dass erstens a in dem Ausdrucke des allgemeinen Gliedes v_b vorkomme, oder zweitens, dass die beiden Grenzen r oder s nicht feste, sondern von a abhängige Werthe haben. Am umfassendsten wird die Annahme sein, dass beides zugleich stattfinden könne, und werden wir deshalb, um die eventuelle Abhängigkeit der Zahlen:

$$v_b, \; r, \; s$$

von der Variabeln a sichtbar zu machen, die Namen derselben durch resp.

$$u_{a,b}, \; r_a, \; s_a$$

ersetzen.

Auf diese Weise erhalten wir den Ausdruck:

$$S = \sum_p^q {}_a \sum_{r_a}^{s_a} {}_b \, u_{a,b} \tag{322}$$

als den allgemeinsten Typus einer Doppelsumme — nämlich einer solchen mit eventuell *abhängigen* (oder „veränderlichen“) Grenzen.

Der besondre Fall, wo r_a sowohl als s_a bezüglich a constant sind, ist in den beiden vorigen Paragraphen bereits betrachtet worden; auf den, wo *nur* die Grenzen abhängig sind, d. h. wo das allgemeine Glied $u_{a,b} = v_b$ die erste Variable a gar nicht enthält, werden wir bei späteren Beispielen näher einzugehen haben.

§ 105. Instructive Exempel.

Zur Bildung von Doppelsummen können wir schon Veranlassung in früheren Beispielen finden. Namentlich lässt in dieser Weise das allgemeine Schema (279) für die Zerlegung der Grenzen sich nun kürzer darstellen. Nach Weglassung der beiden äussersten Terme nämlich kann man jetzt die mittleren (der ersten Zeile) wie folgt zusammenfassen:

$$\sum_{r_1}^{r_n - 1} {}_a \, u_a = \sum_1^{n-1} {}_b \sum_{r_b}^{r_{b+1} - 1} {}_a \, u_a.$$

und ebenso in der zweiten Zeile:

$$\sum_{r_1 + 1}^{r_n} {}_a \, u_a = \sum_1^{n-1} {}_b \sum_{r_b + 1}^{r_{b+1}} {}_a \, u_a,$$

wobei uns nunmehr die linkerhand stehende Summe auch als Repräsentant einer ganz beliebigen zwischen irgend welchen Grenzen genommenen Summe gelten kann. Es finden jedoch zwischen die Gren-

zen z. B. dieser letzteren Summe, welche heissen $r_1 + 1$ und r_n, nur $n - 2$ Werthe: $r_2, r_3, \ldots r_{n-1}$ sich eingeschaltet, wodurch das Intervall in nur $n - 1$ Unterabtheilungen zerlegt wird; als allgemeines Schema für den Gebrauch wird es aber sich empfehlen, eine Formel aufzustellen, bei welcher (durch Einschaltung von $n - 1$ Zwischenwerthen) eine Zerlegung in n Theilintervalle bewirkt wird. Wir werden desshalb in einer der beiden vorstehenden Formeln $n + 1$ statt n setzen, jedoch zugleich die sämmtlichen Indices der Grössen r noch um 1 erniedrigen.

Alsdann entsteht:

$$(323)\qquad \sum_{r_0}^{r_n - 1}{}^a u_a = \sum_{1}^{n}{}^b \sum_{r_{b-1}}^{r_b - 1}{}^a u_a = \sum_{0}^{n-1}{}^c \sum_{r_c}^{r_{c+1} - 1}{}^a u_a,$$

$$(324)\qquad \sum_{r_0 + 1}^{r_n}{}^a u_a = \sum_{1}^{n}{}^b \sum_{r_{b-1} + 1}^{r_b}{}^a u_a = \sum_{0}^{n-1}{}^c \sum_{r_c + 1}^{r_{c+1}}{}^a u_a,$$

wo die letzten Ausdrücke durch die Substitution $b = c + 1$ aus den vorangehenden hervorgegangen sind.

Besonderes Interesse bietet die Annahme, dass in der letzten Formel die Grössen $r_0, r_1, \ldots r_n$ sämmtlich Vielfache einer constanten Zahl r seien, nämlich dass:

$$r_0 = 0,\ r_1 = r,\ r_2 = 2r, \cdots, r_c = cr, \cdots, r_n = nr$$

sei. In diesem Falle ergiebt sich:

$$(325)\qquad \sum_{1}^{nr}{}^a u_a = \sum_{0}^{n-1}{}^c \sum_{cr+1}^{(c+1)r}{}^a u_a,$$

oder, wenn man in der letzten Summe die Substitution $a = rc + b$ macht:

$$(326)\qquad \sum_{1}^{nr}{}^a u_a = \sum_{0}^{n-1}{}^c \sum_{1}^{r}{}^b u_{cr+b}.$$

Da nun die Grenzen auch der zweiten Summe hiedurch constant geworden sind, so kann nach § 102. die Ordnung der beiden Summationen nunmehr umgekehrt werden, und folgt:

$$(327)\qquad \sum_{1}^{nr}{}^a u_a = \sum_{1}^{r}{}^b \sum_{0}^{n-1}{}^c u_{cr+b}$$

— eine sehr nützliche Formel. Durch Interpretation der letzten Summe:

$$\sum_{0}^{n-1}{}^c u_{cr+b} = u_b + u_{r+b} + u_{2r+b} + \cdots + u_{(n-1)r+b}$$

erkennt man, dass nach dieser Formel jeweils diejenigen Glieder zu-

sammengefasst werden, deren Indices, durch die (beliebige) Zahl r getheilt, den nämlichen Rest (b) lassen.

Nimmt man beispielsweise $r=2$ an und interpretirt die erste Summe rechterhand, so folgt aus (327):

$$\sum_1^{2n}{}^a u_a = \sum_0^{n-1}{}^c u_{2c+1} + \sum_0^{n-1}{}^c u_{2c+2},$$

oder, $c = b - 1$ gesetzt:

$$\sum_1^{2n}{}^a u_a = \sum_1^{n}{}^b u_{2b-1} + \sum_1^{n}{}^b u_{2b}. \tag{328}$$

Es lehrt diese Formel, wie in einer beliebigen Summe die geradstelligen und die ungeradstelligen Glieder zu sondern (und dann getrennt zu vereinigen) sind. Die obere Grenze der betrachteten Summe ist allerdings hier von der Form $2n$ (eine gerade Zahl) und die untere 1; ist jedoch die untere Grenze der gegebenen Summe etwa 0 oder die obere von der Form $2n+1$ (eine ungerade Zahl), so kann der Fall leicht durch Absonderung des ersten resp. letzten Gliedes nach (280) auf den vorstehenden zurückgeführt, und darnach das abgesonderte Glied sofort mit der einen der beiden Summen rechterhand wieder verschmolzen werden.

§ 106. Vertauschung der Summationsfolge.

Wir gelangen jetzt zu dem schwierigsten aber auch wichtigsten Theile der hier vorgetragenen Theorie, nämlich zu der Untersuchung der Frage, auf welche Weise bei Doppelsummen mit abhängigen Grenzen die Reihenfolge der beiden Summationen umzukehren sei. Welche Werthe wird b in dem Summenausdruck (322) überhaupt annehmen können, und welches sind für jeden dieser Werthe von b diejenigen von a, welche mit ihm verknüpft vorkommen?

Selbstverständlich wird diese Frage in jedem besonderen Falle sich dadurch beantworten lassen, dass man die Doppelsumme (322) völlig interpretirt hinschreibt, hierauf diejenigen Glieder zusammensucht, in welchen die zweite Variable den kleinsten der ihr zukommenden Werthe besitzt, indem man sodann die Glieder mit dem zweitkleinsten Werth dieser Variabeln zusammenfasst, u. s. f. bis zum grössten noch vorkommenden Werthe. Auf diesem Wege die ganze Summe nach der Grösse des Werthes der in jedem Glied angemerkten zweiten Variabeln anzuordnen kann keine Schwierigkeiten bieten.

ein es handelt sich eben darum, dieses gleichwohl in der Regel

sehr *mühsame* Geschäft gewissermassen ein für alle mal auszuführen, oder durch Aufstellung allgemeiner Schemata für die Zukunft zu ersparen.

Die Werthe, welche b überhaupt annehmen kann, sind offenbar die folgenden:

$$(329)\qquad \begin{cases} r_p,\ r_p+1,\ r_p+2,\cdots s_p, \\ r_{p+1},\ r_{p+1}+1,\ r_{p+1}+2,\cdots s_{p+1}, \\ r_{p+2},\ r_{p+2}+1,\ r_{p+2}+2,\cdots s_{p+2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_q,\ r_q+1,\ r_q+2,\cdots s_q. \end{cases}$$

Ist r_k der kleinste und s_g der grösste von diesen Werthen, oder was auf dasselbe hinauskommt, von den Werthen:

$$(330)\qquad \begin{cases} r_p,\ r_{p+1},\ r_{p+2},\cdots r_q, \\ s_p,\ s_{p+1},\ s_{p+2},\cdots s_q, \end{cases}$$

so wird also S in der Form darstellbar sein:

$$(331)\qquad S=\sum_{r_k}^{s_g}{}_b\, W_b,$$

worin W_b (für einen bestimmten der dem b zu ertheilenden Werthe) die Summe aller der Glieder $u_{a,b}$ des entwickelten Summenausdrucks (322) vorstellt, in welchen — während a einen der Werthe von p bis q besitzt — der zweite Index durchweg einen gleichen und zwar eben den bestimmten Werth b hat. Wir können daher, um auch dies noch zum Ausdruck zu bringen, schreiben:

$$(332)\qquad W_b=\Sigma_a\, u_{a,b},$$

wo nun die Summe nach a auszudehnen sein wird über alle zulässigen (d. h. dem Intervalle p bis q angehörenden) Werthe von a (aus dem Gebiet der natürlichen Zahlen), welche die Eigenschaft haben, dass das vorliegende bestimmte b in das Intervall r_a bis s_a (incl.) hineinfällt — über diejenigen Werthe von a also, für welche irgend eine der Zahlen

$$r_a,\ r_a+1,\ r_a+2,\cdots s_a-1,\ s_a$$

gleich b, m. a. W. eine der Gleichungen:

$$(333)\qquad r_a=b,\ r_a+1=b,\ r_a+2=b,\cdots,\ s_a-1=b,\ s_a=b$$

erfüllt wird.

In einem vorliegenden besonderen Falle wird es nur jedesmal fraglich sein, ob die Summe dieser Glieder auch wirklich eines gemeinsamen Ausdruckes fähig ist und ob nicht vielmehr auch die Form der Bestimmungsgleichungen für die Amplitude oder Grenzen

der nach q zu nehmenden Summe (332) mit dem Werthe von b selbst sich ändern wird. In der That zeigt sich die letztere gewöhnlich von b in der Art abhängig, dass höchstens für gewisse Gruppen von Werthen b ein gemeinsames Bildungsgesetz von W_b erkennbar ist, und man demgemäss auch die erste nach b zu nehmende Summe (331) in mehrere Theilsummen zu zerfällen genöthigt ist.

Allgemein mögen wir immerhin das Ergebniss unsrer bisherigen Betrachtung noch einmal dahin zusammenfassen, dass wir symbolisch schreiben:

$$(334) \qquad \sum_p^q{}_a \sum_{r_a}^{s_a}{}_b u_{a,b} = \sum_{r_k}^{s_g}{}_b \Sigma_a u_{a,b},$$

worin r_k den kleinsten, s_g den grössten unter den Werthen (330) vorstellt und die Σ_a rechts jeweils auszudehnen ist über diejenigen Werthe von a, welche überhaupt nur eine von den Gleichungen (333) — oder, noch besser gesagt, welche die Ungleichungen:

$$(335) \qquad r_a \overline{\overline{<}}\, b \leq s_a, \qquad p \overline{\overline{<}}\, a \leq q$$

gleichzeitig — befriedigen.

Ist aber einmal für ein bestimmtes b gar keine solche „Wurzel" a vorhanden, so wird das diesem Werthe b entsprechende Glied [der Σ rechts in (334)] gänzlich fehlen. Dies muss z. B. — bei der Annahme, dass die Werthe (329) eine zunehmende Reihe bilden — in dem Falle, wo der Werth einer oberen Grenze s_x noch kleiner ist als derjenige der unmittelbar darauf folgenden unteren Grenze r_{x+1}, in der That eintreten bei allen b, welche zwischen jener oberen und dieser unteren Grenze liegen.

Der Umstand nun, dass es sich bei der vorliegenden Aufgabe darum handelt, von einer ganzen Reihe von Gleichungen wie (333) erst diejenigen ausfindig zu machen, welche eine „Wurzel" haben können [welches mit sich bringt, dass dann die übrigen von diesen Gleichungen (durch dieselben) nicht erfüllbar sind und somit deren Auflösung vergeblich versucht werden musste] — m. a. W. der Umstand, dass es dabei eigentlich darauf ankommt, zusammenbestehende *Ungleichungen* (335) sozusagen „aufzulösen" — bedingt die eigenthümlichen Schwierigkeiten dieser Aufgabe.

Und weiter lässt sich darum auch *im allgemeinen* die Untersuchung nicht mehr führen. —

§. 107. Fortsetzung. Die wichtigsten Specialfälle.

Die Aufgabe des vorigen Paragraphen bestand in der Forderung, dass bei dem Summenausdrucke (322):

$$S = \sum_{p}^{q}{}^{a} \sum_{r_a}^{s_a}{}^{b} u_{a,b},$$

in welchem ein für allemal $q > p \geqq 0$ vorausgesetzt sein möge, die Reihenfolge der beiden Summationen umgekehrt werde.

Ich will diese Aufgabe nun im Detail für einen immerhin noch sehr allgemeinen Specialfall lösen, der die einfachsten Annahmen, welche in Bezug auf die Grenzfunctionen r_a und s_a überhaupt gemacht werden können, sämmtlich umfassen wird. Ich meine den Fall, wo diese beiden Grenzen sogenannte „lineare" Functionen von a, d. h. dadurch entstanden sind, dass a sich mit constanten Zahlen nur mittelst Multiplication und Addition oder Subtraction verknüpft findet.

Es werden dann — wie leicht nachgewiesen werden könnte — s_a und r_a sich in einer der Formen:

$$s_0 a + s_1, \quad s_0 a - s_1, \quad s_1 - s_0 a,$$

resp.

$$r_0 a + r_1, \quad r_0 a - r_1, \quad r_1 - r_0 a$$

dargestellt annehmen lassen, worin s_0, s_1, r_0, r_1 von a unabhängige Constante aus dem Gebiet der natürlichen Zahlen repräsentiren, für deren einige auch — damit alle Fälle möglichst zusammengefasst erscheinen — der Werth 0 zugelassen werden muss. Da hiernach gleichwohl noch eine Mannigfaltigkeit von $3 . 3 = 9$ verschiedenen Fällen zu erwarten steht, so müssen wir suchen, die einen von diesen auf die andern und letztere auf die einfachsten Fälle zurückzuführen — vorbehaltlich jedoch der Rücksicht darauf, dass von den verschiedenen Fällen gleich einfachen Charakters sich der allgemeinste am meisten zur Behandlung empfehlen wird.

Auf diese Weise lässt sich in der That eine ansehnliche Reihe von Formeln gewinnen, die hauptsächlich *zum Nachschlagen* geeignet und sehr bequem sein werden. Ich schreite nunmehr dazu, dieselben wirklich aufzustellen.

Eine Annahme, die zunächst zur Vereinfachung des Problemes dient, ist die, dass die eine der beiden Grenzen der zweiten Summe constant sei.

Es kann diese Annahme stets ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gemacht werden. Denn verstehen wir unter s eine beliebige Zahl, welche nur grösser ist als der grösste Werth, den s_a oder überhaupt b in dem ganzen Summenausdruck annehmen kann, so darf:

$$(336) \qquad \sum_{p}^{q}{}^{a} \sum_{r_a}^{s_a}{}^{b} u_{a,b} = \sum_{p}^{q}{}^{a} \sum_{r_a}^{s}{}^{b} u_{a,b} - \sum_{p}^{q}{}^{a} \sum_{s_a+1}^{s}{}^{b} u_{a,b}$$

geschrieben werden, indem nach (309) die linke Seite in den Ausdruck:

$$\sum_{a=p}^{q}\left\{\sum_{b=r_a}^{s} u_{a,b} - \sum_{b=s_a+1}^{s} u_{a,b}\right\}$$

und dieser nach (278) in die rechte Seite übergeht.

Ebenso kann man sich im allgemeinen eine constante Zahl r denken, die noch kleiner ist als der kleinste der dem r_a oder überhaupt dem b in unserm Summenausdruck zukommenden Werthe, und zeigt alsdann das Schema:

$$(337)\qquad \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=r_a}^{s_a} u_{a,b} = \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=r}^{s_a} u_{a,b} - \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=r}^{r_a-1} u_{a,b},$$

wie man abermals auf die obige Annahme recurriren kann. Nur dann allerdings, wenn r_a auch einmal den Werth 0 annimmt, wird die Anwendung des letzteren Schema's unthunlich (dasselbe nämlich einer Modification bedürftig), und wird deshalb die ganze Lösung des Problems für alle möglichen seiner Fälle bequemer auf die Betrachtung eines Summenausdrucks mit constanter *oberer* Grenze zurückzuführen sein.

Für die 6 bei der obigen Annahme noch übrig bleibenden Fälle lässt nun die Lösung der Aufgabe sich in folgenden (vier) Formeln zusammenfassen:

$$(338)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{a=p}^{q}\sum_{b=r_0a-r_1}^{s} u_{a,b} = \sum_{c=p+1}^{q}\ \sum_{b=r_0(c-1)-r_1}^{r_0c-r_1-1}\ \sum_{a=p}^{c-1} u_{a,b} + \sum_{b=r_0q-r_1}^{s}\sum_{a=p}^{q} u_{a,b}, \\ \qquad\qquad \text{für } p < q, \quad r_0q - r_1 \overset{=}{\gtrless} s. \end{array}\right.$$

(339) Desgleichen $+ r_1$ statt $- r_1$ gesetzt.

$$(340)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{a=p}^{q}\sum_{b=r}^{s_0a+s_1} u_{a,b} = \sum_{b=r}^{s_0p+s_1}\sum_{a=p}^{q} u_{a,b} + \sum_{c=p+1}^{q}\ \sum_{b=s_0(c-1)+s_1+1}^{s_0c+s_1}\ \sum_{a=c}^{q} u_{a,b}, \\ \qquad\qquad \text{für } p < q, \quad r \overset{=}{\gtrless} s_0p + s_1. \end{array}\right.$$

(341) Desgleichen $- s_1$ statt $+ s_1$ gesetzt.

$$(342)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{a=p}^{q}\sum_{b=r_1-r_0a}^{s} u_{a,b} = \sum_{c=q-1}^{p}\ \sum_{b=r_1-r_0(c+1)}^{r_1-r_0c-1}\ \sum_{a=c+1}^{q} u_{a,b} + \sum_{b=r_1-r_0p}^{s}\sum_{a=p}^{q} u_{a,b}, \\ \qquad\qquad \text{für } p < q, \quad r_1 - r_0p \overset{=}{\gtrless} s. \end{array}\right.$$

$$(343)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{a=p}^{q}\sum_{b=r}^{s_1-s_0a} u_{a,b} = \sum_{b=r}^{s_1-s_0q}\sum_{a=p}^{q} u_{a,b} + \sum_{c=q-1}^{p}\ \sum_{b=s_1+1-s_0(c+1)}^{s_1-s_0c}\ \sum_{a=p}^{c} u_{a,b}, \\ \qquad\qquad \text{für } p < q, \quad r \overset{=}{\gtrless} s_1 - s_0q. \end{array}\right.$$

Die Herleitung dieser Formeln — sowohl die selbstständige als auch die von einer aus der andern — bildet den Gegenstand der beiden nächsten Paragraphen.

Indem ich mir vorbehalte, diese Formeln hernach systematisch weiter zu specialisiren sowohl als zu generalisiren, begnüge ich mich hier nur die folgenden als besonders interessante Exemplificationen zu (340) hervorzuheben:

$$(344)\qquad \sum_0^q{}^a \sum_0^a{}^b u_{a,b} = \sum_0^q{}^c \sum_c^q{}^a u_{a,c}.$$

$$(345)\qquad \sum_0^q{}^a \sum_0^{2a}{}^b u_{a,b} = \sum_1^q{}^c \sum_c^q{}^a u_{a,2c-1} + \sum_0^q{}^c \sum_c^q{}^a u_{a,2c}.$$

$$(346)\qquad \sum_0^q{}^a \sum_0^{3a}{}^b u_{a,b} = \sum_1^q{}^c \sum_c^q{}^a \{u_{a,3c-2} + u_{a,3c-1}\} + \sum_0^q{}^c \sum_c^q{}^a u_{a,3c}.$$

. . . .

$$(347)\qquad \sum_0^q{}^a \sum_0^{s_0 a}{}^b u_{a,b} = \sum_1^q{}^c \sum_c^q{}^a \sum_{s_0(c-1)+1}^{s_0 c-1}{}^b u_{a,b} + \sum_0^q{}^c \sum_c^q{}^a u_{a,s_0 c}.$$

§. 108. Selbstständige Herleitung der Hauptformeln.

Als Grundlage (beziehungsweise als Schema) für die Herleitung der übrigen Formeln wähle ich nun den in der ersten von ihnen auftretenden Summenausdruck:

$$(348)\qquad S = \sum_p^q{}^a \sum_{r_0 a - r_1}^s{}^b u_{a,b},$$

eine Wahl, die zum Theil schon durch die vorhin sub (337) ausgesprochene Bemerkung motivirt ist, und sich später vollends als die einzig richtige herausstellt.

Damit in diesem Ausdruck die untere Grenze einer jeden Summe auch wirklich nie die obere übertreffe, muss hier:

$$(349)\qquad r_0 q - r_1 \leqq s$$

vorausgesetzt werden, denn nur wenn dies der Fall ist, wird für jedes $a \overline{\gtrless} q$ auch stets $r_0 a - r_1 \leqq s$ sein müssen.

Die Annahme $r_0 = 0$ oder $s_0 = 0$ ist selbstverständlich bei allen 6 Fällen auszuschliessen, da man sonst auf einen längst erledigten Fall zurückkommen würde; für das vorliegende Problem aber ist sie um so mehr auszuschliessen, als sie unverträglich ist mit der Forderung, dass sämmtliche von den Summationsvariabeln durchlaufenen Werthe dem Gebiet der natürlichen Zahlen angehören sollen — eine Forderung, die in Gestalt der Ungleichung

$$(350)\qquad 0 \overline{\gtrless} r_0 p - r_1$$

hier ihren Ausdruck findet.

Wie leicht nachzuweisen, ist alsdann $r_0 p - r_1$ der kleinste der auf b fallenden Werthe und s selbst der grösste derselben. Daher ist:

$$S = \sum_{r_0 p - r_1}^{s} {}_b \; \Sigma_a \, u_{a,b}$$

zu setzen, worin nur mehr die Amplituden der auf a bezüglichen Summationen noch zu bestimmen sein werden für einen jeden der von b durchlaufenen Werthe.

Als die zu einem bestimmten Werth von b gehörigen Werthe von a müssen nun dem früheren gemäss alle diejenigen Zahlen der Reihe:

$$p, p+1, p+2, \cdots q-1, q$$

genommen werden, welche als Werthe von a aufgefasst die Anforderung erfüllen, dass jener Werth von b noch in das Intervall von (incl.) $r_0 a - r_1$ bis s hineinfällt, dass m. a. W.:

$$r_0 a - r_1 \overline{\overline{<}} b \leqq s$$

werde. Da jedoch die eine Bedingung: $b \leqq s$ für die angesetzten Werthe von b schon so wie so erfüllt ist, so wird, damit b wirklich in das gegebene Intervall falle, nur noch darauf zu halten sein, dass auch der andere Theil dieser Relation befriedigt werde, d. h. es wird irgend eine Zahl α der obigen Reihe stets und nur dann einen der Variabeln a zukommenden Werth vorstellen, wenn: $r_0 \alpha - r_1 \overline{\overline{<}} b$ ist. Ist aber die Relation:

$$r_0 a - r_1 \overline{\overline{<}} b \tag{3}$$

dergestalt für einen bestimmten Werth $a = \alpha$ erfüllt, so wird sie es auch für jeden niedrigeren Werth von a sein, d. h. sie bleibt auch richtig, wenn man $\alpha - 1$, $\alpha - 2$, $\cdots$ für a in dieselbe einsetzt.

Es geht hieraus hervor, dass es sich für jedes b nur um die Bestimmung des grössten Werthes von a handeln kann, der die Bedingung (351) erfüllt; sobald ein solcher gefunden ist, wird von diesem aus die Summation nach a sich über alle vorhergehenden Werthe bis zum niedersten p zurück zu erstrecken haben. Da überhaupt der Werth $a = p$ für jeden der in Betracht kommenden Werthe von b der Relation (351) genügt, nämlich schon für den kleinsten dieser Werthe, so ist hiemit die untere Grenze für alle auf a bezüglichen Summationen bereits in Gestalt der Zahl p ermittelt. Es handelt demnach sich nur noch um die Aufsuchung ihrer oberen Grenzen, wobei uns die Bemerkung zu statten kommen wird, dass wenn für einen Werth α von a die Relation (351) *nicht* befriedigt, wenn also $r_0 \alpha - r_1 > b$ ist, dies um so mehr auch für jeden höheren Werth $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, $\cdots$ der Fall sein muss.

Ist nun zuerst b zwischen $r_0 p - r_1$ (incl.) und $r_0(p+1) - r_1$ (excl.) gelegen, ist also:

$$r_0 p - r_1 \overline{\gtrless} b \leq r_0(p+1) - r_1 - 1,$$

so ist schon der Werth $a = p + 1$ unzulässig, indem hiefür die Relation (351), welche alsdann verlangt, dass:

$$r_0(p+1) - r_1 \overline{\gtrless} b$$

sei, in Widerspruch mit der über b gemachten Voraussetzung tritt. Ebenso sind daher auch die Werthe $p+2, p+3, \cdots$ unzulässig, und bleibt als einzig mögliche Annahme nur: $a = p$ übrig. Somit ist als ein erster Theil des gesuchten Summenausdrucks gefunden:

$$\sum_{r_0 p - r_1}^{r_0(p+1)-r_1-1} {}^{b}\, u_{p,b} = \sum_{r_0 p - r_1}^{r_0(p+1)-r_1-1} {}^{b} \cdot \sum_{p}^{p} {}^{a}\, u_{a,b}.$$

Liegt ferner b zwischen $r_0(p+1) - r_1$ (incl.) und $r_0(p+2) - r_1$ (excl.), ist also:

$$r_0(p+1) - r_1 \overline{\gtrless} b \leq r_0(p+2) - r_1 - 1,$$

so ist noch der Werth $a = p + 1$ zulässig, indem für diesen die Relation (351) etwas fordert, was bei der eben über b gemachten Voraussetzung als erfüllt angenommen wurde; ebenso ist also auch der Werth $a = p$ zulässig; dagegen ergibt schon für $a = p + 2$ die Relation (351) einen Widerspruch mit der bezüglich b gemachten Annahme; mithin ist ein zweiter Theil der fraglichen Summe:

$$\sum_{r_0(p+1)-r_1}^{r_0(p+2)-r_1-1} {}^{b} (u_{p,b} + u_{p+1,b}) = \sum_{r_0(p+1)-r_1}^{r_0(p+2)-r_1-1} {}^{b} \sum_{p}^{p+1} {}^{a}\, u_{a,b},$$

und so fort.

Liegt allgemein b zwischen $r_0(c-1) - r_1$ (incl.) und $r_0 c - r_1$ (excl.), ist also:

$$(352) \qquad r_0(c-1) - r_1 \overline{\gtrless} b \leq r_0 c - r_1 - 1,$$

so sind alle Werthe $p, p+1, \cdots\cdots c-2, c-1$ von a die $< c$ sind, zuzulassen, da schon für den grössten derselben, $c - 1$, (und um so mehr für jeden kleineren) sich die Forderung (351):

$$r_0(c-1) - r_1 \overline{\gtrless} b$$

auf Grund der gemachten Voraussetzung (352) erfüllt zeigt. Dagegen sind alle Werthe: $c, c+1, \cdots q$ von a, die $\overline{\gtrless} c$ sind, auszuschliessen, indem schon für den kleinsten derselben, c, die Relation (351), [welche alsdann:

$$r_0 c - r_1 \overline{\gtrless} b$$

verlangt,] erkennen lässt, dass mit ihr die über b soeben gemachte

Voraussetzung (352) unverträglich ist. Mithin ist eine weitere Theilsumme:

$$(353) \qquad \sum_{r_0(c-1)-r_1}^{r_0 c - r_1 - 1}{}^{b} \sum_{p}^{c-1}{}^{a} u_{a,b}$$

gefunden. Die vorstehenden Schlüsse aber, welche schon gültig sind, wenn man unter c die Zahlen $p+1$, $p+2$, $\cdots$ sich vorstellt, bleiben es auch fort und fort für immer höhere Werthe von c bis inclusive $c = q$.

Ist schliesslich noch b zwischen $r_0 q - r_1$ (incl.) und s (incl.) gelegen, ist also:

$$r_0 q - r_1 < b \leqq s,$$

so stimmt die Relation (351) schon für $a = q$ mit dieser Annahme überein, und wird folglich auch für alle überhaupt vorkommenden Werthe von b befriedigt; folglich muss:

$$\sum_{r_0 q - r_1}^{s}{}^{b} \sum_{p}^{q}{}^{a} u_{a,b}$$

ein letzter Theil der gesuchten Doppelsumme sein.

Da nun hiemit die obere Grenze der b erreicht sein wird, so ist als Resultat gefunden:

$$(354) \quad \begin{cases} \sum_{p}^{q}{}^{a} \sum_{r_0 a - r_1}^{s}{}^{b} u_{a,b} = \sum_{r_0 p - r_1}^{r_0(p+1)-r_1-1}{}^{b} \sum_{p}^{p}{}^{a} u_{a,b} + \sum_{r_0(p+1)-r_1}^{r_0(p+2)-r_1-1}{}^{b} \sum_{p}^{p+1}{}^{a} u_{a,b} + \\ \cdots + \sum_{r_0(c-1)-r_1}^{r_0 c - r_1 - 1}{}^{b} \sum_{p}^{c-1}{}^{a} u_{a,b} + \cdots + \sum_{r_0(q-1)-r_1}^{r_0 q - r_1 - 1}{}^{b} \sum_{p}^{q-1}{}^{a} u_{a,b} + \sum_{r_0 q - r_1}^{s}{}^{b} \sum_{p}^{q}{}^{a} u_{a,b} \end{cases}$$

Hierin aber lassen sich noch, mit Ausnahme des letzten Termes, der eine aparte Bildungsweise besitzt, alle übrigen Terme der rechten Seite auf's neue vermittelst eines Summenzeichens zusammenfassen. Man erhält so in der That die oben angegebene Formel (338), bei welcher wir noch den wesentlichen Theil ihrer Gültigkeitsbedingungen:

$$(355) \qquad 0 \leqq p < q, \qquad 0 \leqq r_0 p - r_1 < r_0 q - r_1 \leqq s$$

hinzugesetzt haben.

In jedem Terme rechterhand könnten in dieser Formel die beiden letzten Summationen auch ohne weiteres vertauscht werden. —

Durch eine ähnliche Reihe von Ueberlegungen, wie die im vorstehenden ausführlich dargelegte, lässt sich nun auch eine jede von den übrigen Formeln (338) bis (343) unmittelbar verificiren, und will ich in gedrängtester Kürze dies noch für die Formel (340) durchführen.

Bezeichnet man die linkseitige Summe in (340), bei welcher $r \leqq s_0 p + s_1$ vorausgesetzt werden muss, mit S, so wird zunächst:

$$S = \sum_r^{s_0 q + s_1}{}_b \; \Sigma_a \, u_{a,b},$$

wo die Σ_a auszudehnen ist über alle diejenigen von den Werthen $p, \cdots q$, welche die Bedingung $b \leq s_0\, a + s_1$ erfüllen.

Diese Bedingung ist für alle angegebenen Werthe von a erfüllt, wenn zunächst b zwischen r (incl.) und $s_0\, p + s_1$ (incl.) gelegen ist, daher ein erster Teil der gesuchten Doppelsumme: $\sum_r^{s_0 p + s_1}{}_b \sum_p^q{}_a u_{a,b}$. Wenn ferner:

$$s_0\,(c-1) + s_1 + 1 \overline{\gtrless}\, b \leq s_0\, c + s_1,$$

so sind $p, p+1, \cdots c-1$ als Werthe von a auszuschliessen, dagegen $c, c+1, \cdots q$ zu nehmen, wie man dies blos für die beiden $c-1$ und c nachzuweisen braucht; mithin ist irgend ein späterer Theil: $\sum_{s_0(c-1)+s_1+1}^{s_0 c + s_1}{}_b \sum_c^q{}_a u_{a,b}$ und zwar gilt dies schon für $c = p+1$ und zuletzt noch für $c = q$, womit dann im ganzen gefunden ist:

$$6) \begin{cases} \sum_p^q{}_a \sum_r^{s_0 a + s_1}{}_b u_{a,b} = \sum_r^{s_0 p + s_1}{}_b \sum_p^q{}_a u_{a,b} + \\ + \sum_{s_0 p + s_1 + 1}^{s_0(p+1)+s_1}{}_b \sum_{p+1}^q{}_a u_{a,b} + \cdots + \sum_{s_0(c-1)+s_1+1}^{s_0 c + s_1}{}_b \sum_c^q{}_a u_{a,b} + \cdots + \sum_{s_0(q-1)+s_1+1}^{s_0 q + s_1}{}_b \sum_q^q{}_a u_{a,b}, \end{cases}$$

ein Resultat, das in der concisesten Weise dargestellt einerlei wird mit (340).

§. 109. Zurückführung derselben auf einander.

Zunächst ist die Behauptung zu beweisen, dass in (338) auch $+r_1$ statt $-r_1$ durchweg geschrieben werden dürfe, d. h. es ist die Formel (339) aus jener (338) herzuleiten.

Setzt man:

$$r_0 x - r_1 = r_1',$$

so wird durch passende Annahme von x und von r_1 stets bewirkt werden können, dass r_1' einen beliebigen von r_0 unabhängigen Werth erhält. Wir brauchen, wenn r_0 und r_1' gegebene Werthe haben sollen, unter x nur eine solche Zahl zu verstehen, für welche $r_0 x > r_1'$ ist, und können dann die obige Gleichung durch die Annahme $r_1 = r_0 x - r_1'$. befriedigen; es mag zum Beispiel x die *kleinste* von den Zahlen vorstellen, deren r_0 faches noch grösser als r_1' ist.

Es mögen ferner unter der Voraussetzung, dass $p \geqq x$ und also auch $q > x$ sei:

$$p - x = p' \text{ und } q - x = q'$$

genannt, sodann als neue Summationsvariabeln:

$$a - x = a', \qquad c - x = c'$$

definirt werden.

Setzen wir alsdann in die Formel (338) gleichzeitig die (sich ergebenden) Werthe ein:

$$r_1 = r_0 x - r_1', \quad p = p' + x, \quad q = q' + x, \quad a = a' + x, \quad c = c' + x,$$

und verbinden damit die nach dem Schema (297) bei jeder Introduction neuer Variabeln erforderlichen Abänderungen an den Summengrenzen, schreiben wir endlich durchweg:

$$u'_{a', b} \text{ für } u_{a' + x, b},$$

so geht aus (338) eine neue Formel hervor — eine Formel jedoch, die mit der vorigen eine so grosse Aehnlichkeit zeigt, dass wir es unterlassen können, sie ausführlich anzuschreiben.

Dieselbe unterscheidet nämlich von jener sich lediglich dadurch, dass überall da, wo $-r_1$ in ihr vorkommt, jetzt $+r_1'$ steht, und dass ausserdem die Buchstaben a, c, p, q, u in ihr mit Strichen (Accenten) behaftet erscheinen — und dies gilt nicht nur von der Formel selbst, sondern auch ebenso von ihren Bedingungsungleichungen (355). Von den letzteren gerathen ausserdem die in § 107. nicht mitangeführten Theile nun als überflüssig in Wegfall, da sie nach den gemachten Annahmen schon von selbst erfüllt sind, und die übrig bleibenden bei (339) implicite miterwähnten Bedingungsungleichungen sind eben nur diejenigen, welche so wie so erfüllt werden müssen, damit die obere Summengrenze nie von der unteren übertroffen werde.

Wofern sie nur diese letzteren Bedingungen erfüllen, sind aber r_1', p', q' wiederum ganz beliebige Zahlen, wie für r_1' bereits nachgewiesen wurde und auch für p' und q' leicht einzusehen ist.

Diese accentuirten Grössen unterliegen überhaupt keiner weiteren Einschränkung, und da sie nun ebenso wie es die nicht accentuirten waren beliebig sind, so können wir die Accente im Endresultat schliesslich weglassen. Damit ist dann aber auch für die Formel (339) der Beweis geliefert. —

Aus dieser letzteren lässt sich nun weiter bequem die Formel (340) ableiten wie folgt.

Schreibt man in (339) s_0 statt r_0 und $s_1 + 1$ statt r_1, und zieht die entstehende Gleichung von der folgenden ab:

$$(357) \quad \begin{cases} \sum\limits_{p}^{q}{}_{a} \sum\limits_{r}^{s}{}_{b}\, u_{a,b} = \sum\limits_{r}^{s}{}_{b} \sum\limits_{p}^{q}{}_{a}\, u_{a,b} = \\ = \sum\limits_{r}^{s_0 p + s_1}{}_{b} \sum\limits_{p}^{q}{}_{a}\, u_{a,b} + \sum\limits_{p+1}^{q}{}_{c} \sum\limits_{s_0(c-1)+s_1+1}^{s_0 c + s_1}{}_{b} \sum\limits_{p}^{q}{}_{a}\, u_{a,b} + \sum\limits_{s_0 q + s_1 + 1}^{s}{}_{b} \sum\limits_{p}^{q}{}_{a}\, u_{a,b}, \end{cases}$$

welche lediglich durch Zerlegung der Grenzen entsteht, und nur bezüglich s voraussetzt, dass $s_0 q + s_1 \overline{<} s$ gedacht werde, so hebt sich das letzte Glied rechter Hand ganz fort; bei dem vorhergehenden Gliede lässt sich nach (309) eine Reduction in Gemässheit des Schema's (278) ausführen, während das erste Glied (der rechten Seite des Minuenden) von der ganzen Operation unberührt bleibt.

Auf diese Weise nun erhält man gerade die gesuchte Formel (340), deren Herleitung aus (338) wir beabsichtigten.

Die Bedingungsungleichungen derselben ergeben dabei sich von selbst aus der Forderung, dass die untere Grenze einer jeden Theilsumme nicht grösser als die obere sei. Abgesehen von diesen Bedingungen aber unterliegen die Grössen p, q, r, s_0, s_1 nicht der geringsten Beschränkung (im Gebiet der natürlichen Zahlen), da man für vorgegebene Werthe dieser letzteren jedenfalls eine Zahl s gross genug annehmen kann, damit sich die bei (339) und (357) vorgekommenen Ungleichungen erfüllt finden. —

Zufolge des zwischen s_1 und r_1 bestehenden Zusammenhanges: $s_1 + 1 = r_1$ lässt sich bei dieser Herleitung endlich unmittelbar erkennen, dass es in (340) gestattet sein wird, auch $+ s_1$ durch $- s_1$ zu ersetzen. Wo immer nämlich: $y + s_1 = y + r_1 - 1$ steht, darf schon erwiesenermassen $- r_1$ und mit demselben Rechte auch $-(r_1 - 2)$ für $+ r_1$ geschrieben werden, wodurch in der That dieser Ausdruck in: $y - (r_1 - 2) - 1 = y - r_1 + 1 = y - (r_1 - 1) = y - s_1$ übergeht; dazu ist — bei der Annahme $r_1 = 0$ — auch leicht zu sehen, dass insbesondere auch die Ersetzung von $+ s_1$ durch $- 1$ nur scheinbar einen Ausnahmefall bildet. Mithin haben wir, von (338) ausgehend, zugleich mit (340) nun auch die Formel (341) gewonnen. —

Von den 4 hiemit aufeinander zurückgeführten Formeln (338) bis (341) hätte man zwar auch irgend eine andere, wie z. B. (340) zum Ausgangspunkt der Betrachtungen wählen und von da aus durch ganz ähnliche Betrachtungen zu den drei übrigen gelangen können. Jedoch verdient es als eine auffallende Thatsache verzeichnet zu werden, dass wir alsdann jedesmal die literalen und constanten Elemente der neuen Summengrenzen mehr als nöthig eingeschränkt erhalten hätten durch Bedingungsungleichungen, die nur zu dieser Herleitung nicht aber für die Richtigkeit des Endresultates eine unerlässliche Voraussetzung gebildet haben würden; es würde dann ziemlich umständlich geworden sein, die Ergebnisse von diesen unwesentlichen Beschränkungen zu befreien. —

Es erübrigt endlich noch die Aufgabe, die Formel (342) aus (339) oder (343) aus (340) abzuleiten.

Beides lässt sich ohne Schwierigkeit erreichen, indem man von der Substitution (300) Gebrauch macht, nämlich:

$$a = p + q - a', \quad c = p + q - c', \quad u_{p+q-a', b} = u'_{a', b}$$

und ausserdem für den ersteren Zweck:

$r_0 (p + q) + r_1 = r_1'$, für den letzteren: $s_0 (p + q) + s_1 = s_1'$

setzt, wodurch die Grössen r_1' und s_1' im Gebiet der natürlichen Zahlen keine Beschränkung erleiden, da man erforderlichen Falles, um sie klein genug machen zu können, auch von vornherein $- r_1$ für $+ r_1$, resp. $- s_1$ für $+ s_1$ gesetzt denken kann.

So aber entstehen in der That — nach Weglassung der Accente — gerade die beiden noch gesuchten Formeln (342) und 343).

§. 110. Specialisirung der gefundenen Resultate.

Von den in den Formeln (338) bis (343) inbegriffenen speciellen Fällen erscheint als der wichtigste der Fall, wo r_0 oder s_0 gleich 1 ist, wo also die Summationsvariable in der veränderlichen Summengrenze sich nur durch Operationen erster Stufe mit constanten Zahlen verknüpft findet.

Für diese Annahme, bei welcher sich eine sehr beträchtliche Vereinfachung der Formeln einstellt, kann ich es nicht unterlassen, dieselben noch einmal ausdrücklich anzuschreiben. Sie lauten:

$$(358)_\beta \quad \begin{cases} \sum\limits_p^q {}^a \sum\limits_{a+r_1}^s {}^b u_{a,b} = \sum\limits_{p+r_1}^{q+r_1-1} {}^b \sum\limits_p^{b-r_1} {}^a u_{a,b} + \sum\limits_{q+r_1}^s {}^b \sum\limits_p^q {}^a u_{a,b}, \\ \text{für: } p < q, \quad q + r_1 \gtreqless s. \end{cases}$$

$(358)_\alpha$ Desgleichen $- r_1$ mit $+ r_1$ vertauscht.

$$(359)_\alpha \quad \begin{cases} \sum\limits_p^q {}^a \sum\limits_r^{a+s_1} {}^b u_{a,b} = \sum\limits_r^{p+s_1} {}^b \sum\limits_p^q {}^a u_{a,b} + \sum\limits_{p+s_1+1}^{q+s_1} {}^b \sum\limits_{b-s_1}^q {}^a u_{a,b}, \\ \text{für } p < q, \quad r \lesseqgtr p + s_1. \end{cases}$$

$(359)_\beta$ Desgleichen $- s_1$ mit $+ s_1$ vertauscht.

$$(360) \quad \begin{cases} \sum\limits_p^q {}^a \sum\limits_{r_1-a}^s {}^b u_{a,b} = \sum\limits_{r_1-q}^{r_1-p-1} {}^b \sum\limits_{r_1-b}^q {}^a u_{a,b} + \sum\limits_{r_1-p}^s {}^b \sum\limits_p^q {}^a u_{a,b}, \\ \text{für } p < q, \quad r_1 - p \leqq s. \end{cases}$$

$$(361) \quad \begin{cases} \sum\limits_p^q {}^a \sum\limits_r^{s_1-a} {}^b u_{a,b} = \sum\limits_r^{s_1-q} {}^b \sum\limits_p^q {}^a u_{a,b} + \sum\limits_{s_1-q+1}^{s_1-p} {}^b \sum\limits_p^{s_1-b} {}^a u_{a,b}, \\ \text{für } p < q, \quad r \leqq s_1 - q. \end{cases}$$

Zur Herleitung dieser Resultate ist noch zu bemerken, dass bei den Annahmen r_0 und $s_0 = 1$ in den Formeln (338) bis (343) *zunächst* die beiden Grenzen der nach b zu [illegible]enden Summen rechterhand einander gleich werden; es sind demnach di[illegible]ationen unmittelbar nach dem Schema (274) auszuführen, und erhält [illegible]r den ersten Term rechterhand in $(358)_\beta$, aus (339) folgend:

$$\sum_{p+1}^{q}{}_c \sum_{c+r_1-1}^{c+r_1-1}{}_b \sum_{p}^{c-1}{}_a u_{a,b} = \sum_{p+1}^{q}{}_c \sum_{p}^{c-1}{}_a u_{a,c+r_1-1},$$

woraus erst durch eine Substitution für c, und zwar die $c + r_1 - 1 = b$, der in $(358)_\beta$ angegebene Term hervorgeht. Die Summationsvariabeln b in (358) bis (361) rechterhand sind mithin ganz andere als die in (338) bis (343).

Eine weitere sehr beträchtliche Vereinfachung tritt noch ein in den Fällen, wo ein Anschluss der Grenzen stattfindet und es uns ermöglicht je die beiden Summen rechter Hand nach dem Schema (276) zu einer einzigen Summe zu verschmelzen. Dies ist wie leicht zu sehen bei $(358)_\beta$ ausführbar, wenn $s = q + r_1$ angenommen wird, ebenso bei $(359)_\alpha$ für $r = p + s_1$, bei (360) für $s = r_1 - p$, bei (361) für $r = s_1 - q$. Ich stelle die dergestalt sich ergebenden Formeln nachstehend zusammen, bemerke jedoch überdies, dass in diesen Fällen durch eine einfache und unmittelbar ersichtliche Substitution für die Variable b noch eine übersichtlichere Darstellung der beiderseitigen Summenausdrücke erzielt werden kann, welche denselben rechts angefügt ist:

$(362)_\beta$
$$\sum_{p}^{q}{}_a \sum_{a+r_1}^{q+r_1}{}_b u_{a,b} = \sum_{p+r_1}^{q+r_1}{}_b \sum_{p}^{b-r_1}{}_a u_{a,b} = \sum_{p}^{q}{}_a \sum_{a}^{q}{}_c u_{a,c+r_1} = \sum_{p}^{q}{}_c \sum_{p}^{c}{}_a u_{a,c+r_1}$$

$(362)_\alpha$ Desgl. $-r_1$ mit $+r_1$ vertauscht.

$(363)_\alpha$
$$\sum_{p}^{q}{}_a \sum_{p+s_1}^{a+s_1}{}_b u_{a,b} = \sum_{p+s_1}^{q+s_1}{}_b \sum_{b-s_1}^{q}{}_a u_{a,b} = \sum_{p}^{q}{}_a \sum_{p}^{a}{}_c u_{a,c+s_1} = \sum_{p}^{q}{}_c \sum_{c}^{q}{}_a u_{a,c+s_1}$$

$(363)_\beta$ Desgl. $-s_1$ mit $+s_1$ vertauscht.

(364)
$$\sum_{p}^{q}{}_a \sum_{r_1-a}^{r_1-p}{}_b u_{a,b} = \sum_{r_1-q}^{r_1-p}{}_b \sum_{r_1-b}^{q}{}_a u_{a,b} = \sum_{p}^{q}{}_a \sum_{p}^{a}{}_c u_{a,r_1-c} = \sum_{p}^{q}{}_c \sum_{c}^{q}{}_a u_{a,r_1-c}$$

(365)
$$\sum_{p}^{q}{}_a \sum_{s_1-q}^{s_1-a}{}_b u_{a,b} = \sum_{s_1-q}^{s_1-p}{}_b \sum_{p}^{s_1-b}{}_a u_{a,b} = \sum_{p}^{q}{}_a \sum_{a}^{q}{}_c u_{a,s_1-c} = \sum_{p}^{q}{}_c \sum_{p}^{c}{}_a u_{a,s_1-c}$$

Von den beiden Bedingungsungleichungen wird jeweils die erste überflüssig, die zweite von selbst erfüllt.

Es verdienen diese Formeln schon deshalb Beachtung, weil sie den leichtesten Weg anzeigen, die Gleichungen (358) bis (361) direct zu gewinnen. Die letzteren haben nämlich die Eigenthümlichkeit, dass sich von der einen Summe rechterhand ein extremer Term ablösen und in die andere einverleiben lässt; die letztere aber stellt alsdann gerade denjenigen Bestandtheil der ganzen Doppelsumme vor, dessen Umformung die Hauptschwierigkeit bildete. Eben diese Umformung findet sich durch die entsprechende von den Gleichungen (362) bis (365) in ihrem ersten Theile geleistet, welcher seinerseits aus dem

fast unmittelbar einleuchtenden zweiten Theile. der Gleichung auf das leichteste hervorgeht.

Ausserdem aber fliessen aus den letzten Gleichungen als besondere Fälle noch überhaupt die einfachsten auf die Umformung von Doppelsummen bezüglichen Schemata mit systematischer Vollständigkeit.

Namentlich gibt die Gleichung (362) für $r_1 = 0$:

$$(366) \qquad \sum_p^q {}_a \sum_a^q {}_b\, u_{a,b} = \sum_p^q {}_b \sum_p^b {}_a\, u_{a,b},$$

und ihr entspricht die folgende (363) für $s_1 = 0$:

$$(367) \qquad \sum_p^q {}_a \sum_p^a {}_b\, u_{a,b} = \sum_p^q {}_b \sum_b^q {}_a\, u_{a,b}.$$

Das eine Resultat ist, wie man sieht (wenn es rückwärts gelesen und b mit a vertauscht wird), im Grunde einerlei mit dem andern und für $p = 0$ bereits einmal in Gestalt des Exempels (344) dagewesen.

Dagegen gibt die Gleichung (364) für $r_1 = p + q$:

$$(368) \qquad \sum_p^q {}_a \sum_{p+q-a}^q {}_b\, u_{a,b} = \sum_p^q {}_b \sum_{p+q-b}^q {}_a\, u_{a,b},$$

sowie entsprechend (365) für $s_1 = p + q$:

$$(369) \qquad \sum_p^q {}_a \sum_p^{p+q-a} {}_b\, u_{a,b} = \sum_p^q {}_b \sum_p^{p+q-b} {}_a\, u_{a,b},$$

zwei neue Formeln, welche schon durch ihre Symmetrie in die Augen fallen, und von denen die letzte vor allem als eine äusserst nützliche zu bezeichnen ist; ein directer Beweis für dieselbe lässt sich auch durch die einfache Ueberlegung leisten, dass aus $b \overline{\gtrless} p + q - a$ stets $a \overline{\gtrless} p + q - b$ folgt. —

§. 111. Weitere Vervielfältigung derselben.

Die Aufgabe der Umkehrung der Summationsfolge soll nunmehr auch vollständig gelöst werden für alle möglichen Fälle, welche bei der Annahme eintreten können, dass *beide* Grenzen der zweiten Summe linear veränderlich seien — jedoch immerhin noch unter der Beschränkung, dass die als Argument in den Ausdrücken für die Summengrenzen auftretende Summationsvariable a nur mit dem Coefficienten 1 behaftet ist, die Summengrenzen also eine der Formen haben:

$$\text{Constante} \pm a, \text{ oder: } a \pm \text{Const.}$$

Es sind die Mittel zur Lösung dieses Problemes bereits — in Gestalt der Gleichungen (358) bis (361) — zurecht gemacht und ist in §. 107. sub (336) und (337) schon angegeben, welche Methode dabei in

Anwendung zu bringen. In den Fällen, wo der grösste Werth der unteren Summengrenze noch immer kleiner ist als der kleinste Werth der oberen (in der zweiten Summe), wo also zwischen beiden eine constante Zahl angenommen werden kann, lässt sich nach § 97. (276) der gesuchte Summenausdruck aus den gegebenen resp. nach dem Vorbild von (358) bis (361) gebildeten auch additiv [statt subtractiv, wie nach (277) oder (278)] zusammensetzen; irgend eine dieser (drei) Methoden aber kann alsdann benutzt werden, um das von der andern gelieferte Ergebniss zu controliren. —

Nach diesen Andeutungen scheint es genügend, nun einfach die Resultate anzugeben, welche sich in nur vier Hauptformeln einordnen.

(370)

α) Wenn $q + r_1 - 1 < p + s_1$, so ist:

$$\sum_p^q{}^a \sum_{a+r_1}^{a+s_1}{}^b u_{a,b} = \sum_{p+r_1}^{q+r_1-1}{}^b \sum_p^{b-r_1}{}^a u_{a,b} + \sum_{q+r_1}^{p+s_1}{}^b \sum_p^q{}^a u_{a,b} + \sum_{p+s_1+1}^{q+s_1}{}^b \sum_{b-s_1}^q{}^a u_{a,b}.$$

β) Wenn $q + r_1 - 1 = p + s_1$, so ist nur der mittlere Term rechterhand wegzulassen.

γ) Wenn $q + r_1 - 1 > p + s_1$, so ist:

$$\sum_p^q{}^a \sum_{a+r_1}^{a+s_1}{}^b u_{a,b} = \sum_{p+r_1}^{p+s_1}{}^b \sum_p^{b-r_1}{}^a u_{a,b} + \sum_{p+s_1+1}^{q+r_1-1}{}^b \sum_{b-s_1}^{b-r_1}{}^a u_{a,b} + \sum_{q+r_1}^{q+s_1}{}^b \sum_{b-s_1}^q{}^a u_{a,b}.$$

In allen drei Formeln mitsammt den zugehörigen Bedingungen ist es gestattet:

(371) erstens, $-r_1$ mit $+r_1$ zu vertauschen

(372) zweitens, gleichzeitig $-r_1$ mit $+r_1$ und $-s_1$ mit $+s_1$ zu vertauschen, dagegen darf $+s_1$ allein nicht mit $-s_1$ vertauscht werden, da sonst offenbar die untere Grenze einer jeden Theilsumme grösser als die obere wäre.

Es sind diese Formeln lediglich Consequenzen von (358) oder auch, wenn man will, von (359). —

Ebenso folgt nun aus (360) oder (361):

(373)

α) Wenn $r_1 - p - 1 < s_1 - q$, so ist:

$$\sum_p^q{}^a \sum_{r_1-a}^{s_1-a}{}^b u_{a,b} = \sum_{r_1-q}^{r_1-p-1}{}^b \sum_{r_1-b}^q{}^a u_{a,b} + \sum_{r_1-p}^{s_1-q}{}^b \sum_p^q{}^a u_{a,b} + \sum_{s_1-q+1}^{s_1-p}{}^b \sum_p^{s_1-b}{}^a u_{a,b}.$$

β) Wenn $r_1 - p - 1 = s_1 - q$, so ist der mittlere Term rechterhand auszulassen.

γ) Wenn $r_1 - p - 1 > s_1 - q$, so ist:

$$\sum_p^q{}^a \sum_{r_1-a}^{s_1-a}{}^b u_{a,b} = \sum_{r_1-q}^{s_1-q}{}^b \sum_{r_1-b}^q{}^a u_{a,b} + \sum_{s_1-q+1}^{r_1-p-1}{}^b \sum_{r_1-b}^{s_1-b}{}^a u_{a,b} + \sum_{r_1-p}^{s_1-p}{}^b \sum_p^{s_1-b}{}^a u_{a,b}.$$

Aus (360) und $(358)_\beta$ oder aber aus $(359)_\alpha$ und (361) geht hervor:

$$(374)\quad \begin{cases} \text{Wenn } r_1 - p - 1 < p + s_1, \text{ so ist:} \\ \sum\limits_{p}^{q} {}^{a} \sum\limits_{r_1-a}^{a+s_1} {}^{b} u_{a,b} = \sum\limits_{r_1-q}^{r_1-p-1} {}^{b} \sum\limits_{r_1-b}^{q} {}^{a} u_{a,b} + \sum\limits_{r_1-p}^{p+s_1} {}^{b} \sum\limits_{p}^{q} {}^{a} u_{a,b} + \sum\limits_{p+s_1+1}^{q+s_1} {}^{b} \sum\limits_{b-s_1}^{q} {}^{a} u_{a,b}. \end{cases}$$

Ein anderer Fall ist nicht möglich, wofern die unteren Grenzen der gegebenen Summenausdrücke in der That nie grösser als die oberen werden dürfen.

Es darf hierin auch:

$$(375)\qquad -s_1 \text{ mit } +s_1 \text{ vertauscht werden.}$$

Endlich folgt aus $(358)_\beta$ und (361) oder auch wie vorhin:

$$(376)\quad \begin{cases} \text{Wenn } q + r_1 - 1 < s_1 - q, \text{ so ist:} \\ \sum\limits_{p}^{q} {}^{a} \sum\limits_{a+r_1}^{s_1-a} {}^{b} u_{a,b} = \sum\limits_{p+r_1}^{q+r_1-1} {}^{b} \sum\limits_{p}^{b-r_1} {}^{a} u_{a,b} + \sum\limits_{q+r_1}^{s_1-q} {}^{b} \sum\limits_{p}^{q} {}^{a} u_{a,b} + \sum\limits_{s_1-q+1}^{s_1-p} {}^{b} \sum\limits_{p}^{s_1-b} {}^{a} u_{a,b}. \end{cases}$$

Ein anderer Fall ist abermals nicht möglich, und es darf hierin auch

$$(377)\qquad -r_1 \text{ mit } +r_1 \text{ vertauscht werden.}$$

Die in den §§ 107. bis 113. betrachteten Formeln lassen übrigens eine sehr einfache (analytisch-) geometrische Interpretation oder Versinnlichung zu, auf welche auch eine Herleitung derselben gegründet werden kann, die sehr bequem besonders dann erscheint, wenn die Constanten der Grenzenausdrücke numerisch gegeben sind.

Zu dem Ende wählt man auf *carrirtem* Papier irgend einen Gitterpunkt (am besten den in der Ecke links unten befindlichen) als Nullpunkt oder Ursprung. Auf der einen von den beiden in ihm zusammenstossenden Linien (etwa auf der wagerechten) verzeichne man die von der einen Variabeln (von a) zu durchlaufenden Werthe nach einer Seite hin (nach rechts) fortschreitend, indem man den Abstand je zweier benachbarten Gitterpunkte als Einheit gelten lässt, mithin die letzteren der Reihe nach numerirt denkt. Ebenso mache man die andere der in jenem Nullpunkt zusammentreffenden Linien (die senkrechte) zum Träger der Werthe von b — ich will dieselbe geradezu als „b-Achse", sowie die vorige als „Achse der a" bezeichnen.

In dem zwischen den beiden Achsen liegenden Quadranten oder Theile der Papierebene, der hier allein in's Auge gefasst werden möge, wird dann jeder Zusammenstellung von Werthen α, β der beiden Variabeln a, b ein Gitterpunkt eindeutig entsprechen, nämlich derjenige, in welchem die durch den Punkt α der a-Achse und die durch den Punkt β der b-Achse gehenden Linien zusammenstossen, sodass wir diesen Gitterpunkt geradezu mit (α, β) oder ausführlicher durch die Zusamenstellung der Gleichungen $a = \alpha$, $b = \beta$ darstellen können. Und umgekehrt gehört auch zu jedem Gitterpunkt ein unzweideutig bestimmtes Werthsystem (Werthepaar) der Variabeln a, b und damit die Vorstellung von einem Gliede $u_{a,b}$, welches in unserm Summenausdruck möglicherweise vorkommt.

So wird z. B. (5, 3) oder ausführlicher ($a = 5$, $b = 3$) denjenigen Gitterpunkt vorstellen, welcher von der a-Achse um 3, von der b-Achse um 5 Längeneinheiten

absteht, und dieser Punkt wird seinerseits zum Träger des Summengliedes $u_{5,3}$ gemacht werden können.

Es sind nun den durch eine unsrer Doppelsummen zusammengefassten Gliedern die sämmtlichen Gitterpunkte zugeordnet, die im innern und auf der Begrenzung eines gewissen Flächenstreifens liegen. Derselbe hat die Gestalt eines (geradlinigen convexen Parallel-)Trapezes, dessen Grundlinien (im Abstand p und q) der b-Achse parallel laufen und dessen Ecken bestimmt sind durch die Zusammenstellungen der Werthe $(a = p,\ b = r_p)$, $(a = q,\ b = r_q)$, $(a = q,\ b = s_q)$, $(a = p,\ b = s_p)$ — vergl. § 107.

Bei der Formel (376) z. B. ist gedachtes Trapez zudem gleichschenklig, und hat im Ringe herum die Ecken $(p,\ p + r_1)$, $(q,\ q + r_1)$, $(q,\ s_1 - q)$, $(p,\ s_1 - p)$. — Die Summation der sämmtlichen Glieder unsrer Doppelsumme kann nun beispielsweise dadurch bewerkstelligt werden, dass man eine Gerade parallel mit sich selbst über die Trapezfläche hingleiten lässt und fortschreitend immer die Summe derjenigen Glieder auf einmal zu den früheren hinzufügt, deren zugehörige Gitterpunkte gleichzeitig in die sich bewegende Gerade hineinfallen.

Ueberführt man so das Trapez mit einer der b-Achse parallelen Geraden, welche man in der Richtung der a-Achse nach rechts bewegt, so wird die Summation nach b vor derjenigen nach a ausgeführt, und ergibt sich $\Sigma_a\, \Sigma_b$. Die Begrenzung der bewegten Geraden durch die beiden äussersten der in sie fallenden Gitterpunkte des Trapezes findet alsdann offenbar während des ganzen Verlaufs der Bewegung nach einem einheitlichen Gesetze statt.

Fig. 2.

Wenn man dagegen mit einer wagrechten Geraden aufwärts über die Fläche hinstreicht, wo dann die Summation nach a vor der nach b vollzogen und die Doppelsumme $\Sigma_b\, \Sigma_a$ erhalten wird, so ist augenscheinlich, dass das Gesetz dieser Begrenzung sich jetzt zweimal ändert, indem die Fläche anfangs wie ein Rectangel breiter wird, dann als Rechteck von gleicher Breite bleibt und zuletzt wieder sich als rechtwinkliges Dreieck zuspitzt — indem m. a. W. der eine Grenz-(End-)punkt der bewegten Geraden zwar einen geradlinigen Weg, der andere aber eine zweimal gebrochene Linie beschreibt.

Notirt man zum Exempel für $p = 3$, $q = 12$, $r_1 = 5$, $s_1 = 41$ auf der a- und b-Achse auf die angegebene Weise die Coordinaten der Eckpunkte des Trapezes, so wie es (unter Verzerrung der wirklichen Grössenverhältnisse) die beistehende Figur (Fig. 2) zeigt, so ergibt sich augenblicklich die gewünschte Umkehrung der Summationsfolge und dreitheilige Zerlegung:

$$\sum_{3}^{12}{}_{a} \sum_{a+5}^{41-a}{}_{b} = \sum_{8}^{16}{}_{b} \sum_{3}^{b-5}{}_{a} + \sum_{17}^{29}{}_{b} \sum_{3}^{12}{}_{a} + \sum_{30}^{38}{}_{b} \sum_{3}^{41-b}{}_{a},$$

wo rechts die mittlere Doppelsumme auch ihren ersten Term noch an die vorhergehende, ihren letzten an die nachfolgende Doppelsumme abgeben könnte.

§ 112. Interessanteste Specialfälle.

Besonders einfach und wichtig werden die Fälle, wo das allgemeine Glied $u_{a,\,b}$ die erste Summationsvariable a gar nicht enthält, zum Beispiel durch v_b vorgestellt wird. Alsdann wird also die Variable a der

ersten Summe nur in den Grenzen der zweiten Summe vorkommen, die ihr allgemeines Glied bildet, und sobald die Summationsordnung umgekehrt, d. i. die auf b bezügliche Summe zur ersten gemacht ist, wird sich die Summation nach a effectuiren lassen; nämlich das Zeichen dieser Summation, welche sich alsdann auf eine Constante (v_b bezüglich a) bezieht, wird äquivalent einem Zahlfactor (dem um 1 vermehrten Intervalle der Grenzen), cf. (272).

Zunächst die Formeln des § 107. gehen auf diese Weise über in folgende:

$$(378)\quad \begin{cases} \sum_p^q{}^a \sum_r^{s_0a+s_1}{}^b v_b = (q-p+1)\sum_r^{s_0p+s_1}{}^b v_b + \sum_{p+1}^q{}^c (q-c+1) \sum_{s_0(c-1)+s_1+1}^{s_0c+s_1}{}^b \\ \text{für } p < q,\ r \lesseqgtr s_0p+s_1. \text{ Desgl. } -s_1 \text{ statt } +s_1 \text{ gesetzt.} \end{cases}$$

$$(379)\quad \begin{cases} \sum_p^q{}^a \sum_{r_0a+r_1}^{s}{}^b v_b = \sum_{p+1}^q{}^c (c-p) \sum_{r_0(c-1)+r_1}^{r_0c+r_1-1}{}^b v_b + (q-p+1)\sum_{r_0q+r_1}^{s}{}^b v_b, \\ \text{für } p < q,\ r_0q+r_1 \lesseqgtr s. \text{ Desgl. } -r_1 \text{ statt } r_1 \text{ gesetzt.} \end{cases}$$

$$(380)\quad \begin{cases} \sum_p^q{}^a \sum_r^{s_1-s_0a}{}^b v_b = (q-p+1)\sum_r^{s_1-s_0q}{}^b v_b + \sum_p^{q-1}{}^c (c-p+1) \sum_{s_1+1-s_0(c+1)}^{s_1-s_0c}{}^b \\ \text{für } p < q,\ r \lesseqgtr s_1-s_0q. \end{cases}$$

$$(381)\quad \begin{cases} \sum_p^q{}^a \sum_{r_1-r_0a}^{q}{}^b v_b = \sum_p^{q-1}{}^c (q-c) \sum_{r_1-r_0(c+1)}^{r_1-r_0c-1}{}^b v_b + (q-p+1)\sum_{r_1-r_0p}^{s}{}^b v_b, \\ \text{für } p < q,\ r_1-r_0p \lesseqgtr s. \end{cases}$$

— die hier nur nach einem andern Principe angeordnet sind.

Was sodann die Formeln (358) bis (365) betrifft, so genügt es, nur für die letzte Hälfte das Ergebniss der Vereinfachungen mitzutheilen, da die ersteren allgemeineren Fälle stets leicht durch Absonderung einer Doppelsumme mit durchweg constanten Grenzen auf diese specielleren zurückgeführt werden können. Für die letzteren nun erhält man:

$$(382)\quad \sum_p^q{}^a \sum_{p+s_1}^{a+s_1}{}^b v_b = \sum_p^q{}^c (q-c+1)\, v_{c+s_1}; \text{ desgl. } -s_1 \text{ statt } +s_1 \text{ gesetzt.}$$

$$(383)\quad \sum_p^q{}^a \sum_{a+r_1}^{q+r_1}{}^b v_b = \sum_p^q{}^c (c-p+1)\, v_{c+r_1}; \text{ desgl. } -r_1 \text{ statt } +r_1 \text{ gesetzt.}$$

$$(384)\quad \sum_p^q{}^a \sum_{s_1-q}^{s_1-a}{}^b v_b = \sum_p^q{}^c (c-p+1)\, v_{s_1-c};$$

$$(385)\quad \sum_p^q{}^a \sum_{r_1-a}^{r_1-p}{}^b v_b = \sum_p^q{}^c (q-c+1)\, v_{r_1-c}.$$

Die 4 Summenausdrücke (366) bis (369) werden zu zwei und zweien identisch, und erhält man:

$$(386)\qquad \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=p}^{p+q-a} v_b = \sum_{b=p}^{q}(q-b+1)\,v_b = \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=p}^{a} v_b,$$

$$(387)\qquad \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=p+q-a}^{q} v_b = \sum_{b=p}^{q}(b-p+1)\,v_b = \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=a}^{q} v_b.$$

Am augenfälligsten sind endlich die Reductionen, welche bei den Formeln (370) bis (377) anwendbar werden, sodass es sich wohl der Mühe verlohnt, deren Ergebnisse sich für den Gebrauch zurecht zu legen.

Von den (zwei bis drei) Theilen, in welche die Doppelsummen dort zerfällt erscheinen, können stets die beiden äussersten auf eine übereinstimmende Amplitude gebracht und dann nach (308) zusammengezogen werden.

Es entsteht:

$$(388)\quad \begin{cases} \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=a+r_1}^{a+s_1} v_b = \sum_{c=0}^{q-p-1}(c+1)\{v_{p+r_1+c}+v_{q+s_1-c}\} + (q-p+1)\sum_{b=q+r_1}^{p+s_1} v_b, \\ \text{für } q+r_1 \leqq p+s_1; \\ \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=a+r_1}^{a+s_1} v_b = \sum_{c=0}^{s_1-r_1}(c+1)\{v_{p+r_1+c}+v_{q+s_1-c}\} + (s_1-r_1+1)\sum_{b=p+s_1+1}^{q+r_1-1} v_b, \\ \text{für } q+r_1-1 \geqq p+s_1+1; \\ \text{wogegen der letzte Term fortzulassen ist für } q-p-1=s_1-r_1. \end{cases}$$

Abermals darf $+r_1$ mit $-r_1$, und $+r_1$, $+s_1$ mit $-r_1$, $-s_1$ vertauscht werden — nöthigenfalls nach Umstellung der Glieder.

$$(389)\quad \begin{cases} \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=r_1-a}^{s_1-a} v_b = \sum_{c=0}^{q-p-1}(c+1)\{v_{r_1-q+c}+v_{s_1-p-c}\} + (q-p+1)\sum_{b=r_1-p}^{s_1-q} v_b, \\ \text{für } r_1-p \leqq s_1-q; \\ \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=r_1-a}^{s_1-a} v_b = \sum_{c=0}^{s_1-r_1}(c+1)\{v_{r_1-q+c}+v_{s_1-p-c}\} + (s_1-r_1+1)\sum_{b=s_1-q+1}^{r_1-p-1} v_b, \\ \text{für } r_1-p-1 \geqq s_1-q+1; \\ \text{wogegen der letzte Term fortzulassen ist für } q-p-1=s_1-r_1. \end{cases}$$

$$(390)\quad \begin{cases} \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=r_1-a}^{a+s_1} v_b = \sum_{c=p+1}^{q}(q-c+1)(v_{r_1-c}+v_{s_1+c}) + (q-p+1)\sum_{b=r_1-p}^{p+s_1} v_b, \\ \text{für } r_1-p \leqq p+s_1. \text{ Desgl. } -s_1 \text{ für } +s_1 \text{ gesetzt.} \end{cases}$$

$$(391)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=a+r_1}^{s_1-a} v_b = \sum_{c=p}^{q-1}(c-p+1)(v_{r_1+c}+v_{s_1-c})+(q-p+1)\sum_{b=q+r_1}^{s_1-q} \\ \text{für } q+r_1 \lesseqgtr s_1-q. \text{ Desgl. } -r_1 \text{ statt } +r_1 \text{ gesetzt.}\end{array}\right.$$

Auf eine der vorstehend erledigten Formen kommen auch diejenigen Doppelsummen hinaus, bei denen zwar die Grenzen der beiden Summationen sämmtlich constant sind, dagegen die beiden Summationsvariabeln in dem Index des allgemeinen Gliedes sich additiv oder subtractiv miteinander verknüpft finden. Durch die Substitution $b=c-a$, $b=a-c$, $b=a+c$ nämlich ergeben sich in der That beziehungsweise die drei folgenden Identitäten:

$$(392)\qquad \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=r}^{s} v_{a+b} = \sum_{a=p}^{q}\sum_{c=a+r}^{a+s} v_c,$$

$$(393)\qquad \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=r}^{s} v_{a-b} = \sum_{a=p}^{q}\sum_{c=a-r}^{a-s} v_c,$$

$$(394)\qquad \sum_{a=p}^{q}\sum_{b=r}^{s} v_{b-a} = \sum_{a=p}^{q}\sum_{c=r-a}^{s-a} v_c.$$

§ 113. Letzte Generalisirung jener Formeln.

Die allgemeine in § 106. hingestellte Aufgabe, wo beide Grenzen der zweiten Summe ganz beliebige lineare Functionen der ersten Summationsvariabeln, und r_0 oder s_0 nicht gerade $=1$ sind, lässt sich mit sehr verschiedener Bequemlichkeit erledigen je nachdem von den beiden folgenden Fällen der eine oder der andere vorliegt. Verhältnissmässig einfach gelingt die Lösung der Aufgabe, sobald (in der Summe mit den variabeln Grenzen) der kleinste Werth der oberen Grenze nicht kleiner als der grösste Werth der unteren Grenze ist, sobald also der vorliegende Fall durch *additive* Zerlegung der gegebenen Doppelsumme auf die in § 107. erledigten Fälle mit nur *einer* variabeln Grenze sich zurückführen lässt. Im andern Falle dagegen, wo nur noch die Zurückführung mittelst *subtractiver* Zerlegung zu Gebote steht, ist es im allgemeinen mit enormen Umständlichkeiten verknüpft, diejenigen Glieder der Minuendensumme, gegen welche sich die sämmtlichen Glieder der Subtrahendensumme nothwendig fortheben, wirklich abzusondern, und die übrig bleibenden Glieder in übersichtlicher Zusammenfassung anzugeben.

Um von diesem Charakter, den so die Aufgabe annimmt, wenigstens ei zu geben, will ich dieselbe noch für die eine ihrer Haupt-

modalitäten in Angriff nehmen, z. B. für die Annahme, dass $r_0 a + r_1$ und $s_0 a + s_1$ die beiden variabeln Grenzen seien.

Für diesen Fall stellt sich nach den auseinandergesetzten Methoden mit Leichtigkeit das folgende heraus.

Wenn: $r_0 q + r_1 - 1 < s_0 p + s_1$,

so ist:

$$(395)\quad \begin{cases} \sum_p^q {}^a \sum_{r_0 a + r_1}^{s_0 a + s_1} {}^b u_{a,b} = \\ = \sum_{p+1}^q {}^c \sum_{r_0(c-1)+r_1}^{r_0 c + r_1 - 1} {}^b \sum_p^{c-1} {}^a u_{a,b} + \sum_{r_0 q + r_1}^{s_0 p + s_1} {}^b \sum_p^q {}^a u_{a,b} + \sum_{p+1}^q {}^c \sum_{s_0(c-1)+s_1+1}^{s_0 c + s_1} {}^b \sum_c^q {}^a u_{a,b}. \end{cases}$$

Wenn: $r_0 q + r_1 - 1 = s_0 p + s_1$,

so ist:

$$(396)\quad \sum_p^q {}^a \sum_{r_0 a + r_1}^{s_0 a + s_1} {}^b u_{a,b} = \sum_{p+1}^q {}^c \left\{ \sum_{r_0(c-1)+r_1}^{r_0 c + r_1 - 1} {}^b \sum_p^{c-1} {}^a u_{a,b} + \sum_{s_0(c-1)+s_1+1}^{s_0 c + s_1} {}^b \sum_c^q {}^a u_{a,b} \right\}$$

Wenn dagegen: $r_0 q + r_1 - 1 > s_0 p + s_1$,

so ist die Reduction schwer allgemein auszuführen; unreducirt ist dann:

$$(397)\quad \begin{cases} \sum_p^q {}^a \sum_{r_0 a + r_1}^{s_0 a + s_1} {}^b u_{a,b} = \sum_{r_0 p + r_1}^{s_0 p + s_1} {}^b \sum_p^q {}^a u_{a,b} + \\ + \sum_{p+1}^q {}^c \sum_{s_0(c-1)+s_1+1}^{s_0 c + s_1} {}^b \sum_c^q {}^a u_{a,b} - \sum_{p+1}^q {}^c \sum_{r_0(c-1)+r_1}^{r_0 c + r_1 - 1} {}^b \sum_c^q {}^a u_{a,b}. \end{cases}$$

nach (340); eine andere Form gäbe (339). Bestimmt man nun, was immer möglich ist, zwei Zahlen k und l entsprechend den Bedingungen:

$$(398)\quad \begin{cases} r_0(k-1) + r_1 \overline{\gtrless} s_0 p + s_1 \leqq r_0 k + r_1 - 1, \\ p + 1 \overline{\gtrless} k \leqq q, \\ s_0(l-1) + s_1 + 1 \overline{\gtrless} r_0 q + r_1 - 1 \leqq s_0 l + s_1, \\ p + 1 \overline{\gtrless} l \leqq q, \end{cases}$$

so zerfällt die ganze Summe in einen ersten Theil $\mathfrak{E}$, einen mittleren $\mathfrak{M}$ und einen letzten $\mathfrak{L}$:

$$(399)\quad \sum_p^q {}^a \sum_{r_0 a + r_1}^{s_0 a + s_1} {}^b u_{a,b} = \mathfrak{E} + \mathfrak{M} + \mathfrak{L},$$

wobei die beiden äussersten leicht anzugeben sind. Es ist nämlich

$$(400)\quad \mathfrak{E} = \sum_{p+1}^{k-1} {}^c \sum_{r_0(c-1)+r_1}^{r_0 c + r_1 - 1} {}^b \sum_p^{c-1} {}^a u_{a,b} + \sum_{r_0(k-1)+r_1}^{s_0 p + s_1} {}^b \sum_p^{k-1} {}^a u_{a,b},$$

$$(401)\qquad \mathfrak{X} = \sum_{b}^{r_0 q + r_1 \ldots s_0 l + s_1} \sum_{a}^{l \ldots q} u_{a,b} + \sum_{c}^{l+1 \ldots q} \sum_{b}^{s_0(c-1)+s_1+1 \ldots s_0 c + s_1} \sum_{a}^{c \ldots q} u_{a,b},$$

dagegen bleibt der Ausdruck

$$(402)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M} = \sum_{c}^{p+1 \ldots l-1} \sum_{b}^{s_0(c-1)+s_1+1 \ldots s_0 c + s_1} \sum_{a}^{c \ldots q} u_{a,b} + \sum_{b}^{s_0(l-1)+s_1+1 \ldots r_0 q + r_1 - 1} \sum_{a}^{l \ldots q} u_{a,b} - \\ - \sum_{b}^{s_0 p + s_1 + 1 \ldots r_0 k + r_1 - 1} \sum_{a}^{k \ldots q} u_{a,b} - \sum_{c}^{k+1 \ldots q} \sum_{b}^{r_0(c-1)+r_1 \ldots r_0 c + r_1 - 1} \sum_{a}^{c \ldots q} u_{a,b} \end{cases}$$

[worin für $l = p + 1$, wie in (400) für $k = p + 1$, die erste Summe wegfällt] erst noch vollends zu reduciren, und wird diese Reduction im allgemeinen des weitern davon abhängen, welche Reste die Vielfachen von s_0 durch diejenigen von r_0 getheilt (oder umgekehrt) übrig lassen. Deshalb verfolgen wir denn diese Aufgabe vorerst nicht weiter.

§ 114. Umformungen einer gewissen dreifachen Summe.

Nachdem wir im bisherigen uns stets nur mit Doppelsummen beschäftigt haben, will ich von den dreifachen Summen wenigstens eine betrachten, welche bei besonders vielen Untersuchungen sich darbietet.

Z. B. auch in der Invariantentheorie, wenn man die Coefficienten der transformirten Form allgemein wirklich darstellen will.

Die gedachte Summe ist die folgende:

$$\sum_{a}^{0 \ldots n} \sum_{b}^{0 \ldots a} \sum_{c}^{0 \ldots n-a} u_{a,b,c},$$

welche durch die Substitution $b + c = c'$ oder $c = c' - b$ nach Weglassung des Accentes in:

$$\sum_{a}^{0 \ldots n} \sum_{b}^{0 \ldots a} \sum_{c}^{b \ldots n-a+b} u_{a,b,c-b}$$

übergeht, und in dieser letzteren Form weiter behandelt werden mag. Es soll nun bei diesem Summenausdrucke darauf ankommen, die Summation nach c, welche die letzte ist, zur ersten zu machen, und überhaupt die drei Summationen nach a, b und c in einer beliebig vorgeschriebenen Ordnung auszuführen. Da hiebei das allgemeine Glied $u_{a,b,c-b}$ immerfort das gleiche bleiben wird, so darf das Anschreiben desselben von jetzt an unterbleiben.

Indem man eines der einfachen Schemata (366), (367) oder (369) des § 110. anwendet, kann man durch Vertauschung von jedesmal nur zwei benachbarten Summenzeichen, d. i. durch Aenderung der Reihenfolge zweier successiven Summationen, zunächst leicht die Aequivalenz von folgenden vier Anordnungen darthun:

$$403)\quad \sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{a}\sum_{c=b}^{n-a+b} = \sum_{b=0}^{n}\sum_{a=b}^{n}\sum_{c=b}^{n+b-a} = \sum_{b=0}^{n}\sum_{c=b}^{n}\sum_{a=b}^{n+b-c} = \sum_{c=0}^{n}\sum_{b=0}^{c}\sum_{a=b}^{n-c+b}$$

Die Vergleichung des ersten dieser Ausdrücke mit dem letzten, in welchem die Summationenfolge die entgegengesetzte ist, liefert das bemerkenswerthe Ergebniss, dass der ganze Summenausdruck in Bezug auf die Summationsvariabeln a und c *symmetrisch* ist. Die letzteren können unmittelbar als solche vertauscht werden, während sie doch als Indices des allgemeinen Gliedes an ihrer Stelle verharren.

Es erübrigt jetzt noch, die beiden Anordnungen $\Sigma_a\ \Sigma_c\ \Sigma_b$ und $\Sigma_c\ \Sigma_a\ \Sigma_b$ zu erledigen, die (wie die Combinationslehre zeigt) ausser den vier bereits angegebenen allein noch möglich sind.

Jene erstere Anordnung ergibt sich am bequemsten aus dem ersten Ausdruck (403) durch Anwendung des Schema's (370). Entsprechend den drei Fällen dieses Schema's müssen jedoch gewisse Zerlegungen vorgenommen und dabei die Fälle unterschieden werden, wo n eine ungerade und wo es eine gerade Zahl ist.

Welcher Art diese Zerlegungen sind, geht vollkommen deutlich aus dem Anblick des Resultates selbst hervor, mit dessen Angabe ich mich daher begnügen kann.

Es wird nämlich der obige Summenausdruck (403):

$$404)\quad \begin{cases} = \sum\limits_{a=1}^{\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}}\sum\limits_{c=0}^{a-1}\sum\limits_{b=0}^{c} + \sum\limits_{a=0}^{\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}}\sum\limits_{c=a}^{n-a}\sum\limits_{b=0}^{a} + \sum\limits_{a=1}^{\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}}\sum\limits_{c=n-a+1}^{n}\sum\limits_{b=c+a-n}^{a} + \\ + \sum\limits_{a=\frac{n+1}{2},\frac{n}{2}+1}^{n}\sum\limits_{c=0}^{n-a}\sum\limits_{b=0}^{c} + \sum\limits_{a=\frac{n+3}{2},\frac{n}{2}+1}^{n}\sum\limits_{c=n-a+1}^{a-1}\sum\limits_{b=c+a-n}^{c} + \sum\limits_{a=\frac{n+1}{2},\frac{n}{2}+1}^{n}\sum\limits_{c=a}^{n}\sum\limits_{b=c+a-n}^{a}, \end{cases}$$

wo von den beiden durch Kommata getrennten Summengrenzen je die erste bei ungeradem n, die zweite bei geradem n zu nehmen ist.

Aus dem vorstehenden kann der noch fehlende Summenausdruck $\Sigma_c\ \Sigma_a\ \Sigma_b$ direct abgeschrieben werden, indem man auf Grund der oben erkannten Symmetrie einfach a mit c vertauscht. Ich will denselben gleichwohl in etwas abweichender Form noch ausführlich hinschreiben, um sichtbar zu machen, wie noch Modificationen sich an der Formel anbringen lassen dadurch, dass man von einzelnen Summen extreme Terme absondert und in die benachbarten einverleibt. In der That ist unser Ausdruck (403) auch:

$$(405)\left\{\begin{aligned} &= \sum_{c}\!{}_{0}^{\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}-1} \sum_{a}\!{}_{0}^{c} \sum_{b}\!{}_{0}^{a} + \sum_{c}\!{}_{0}^{\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}-1} \sum_{a}\!{}_{c+1}^{n-c} \sum_{b}\!{}_{0}^{c} + \sum_{c}\!{}_{1}^{\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}-1} \sum_{a}\!{}_{n-c+1}^{n} \sum_{b}\!{}_{a+c-n}^{c} \\ &+ \sum_{c}\!{}_{\frac{n+1}{2},\frac{n}{2}}^{n} \sum_{a}\!{}_{0}^{n-c} \sum_{b}\!{}_{0}^{a} + \sum_{c}\!{}_{\frac{n+1}{2},\frac{n}{2}+1}^{n} \sum_{a}\!{}_{n-c+1}^{c} \sum_{b}\!{}_{a+c-n}^{a} + \sum_{c}\!{}_{\frac{n+1}{2},\frac{n}{2}}^{n-1} \sum_{a}\!{}_{c+1}^{n} \sum_{b}\!{}_{a+c-n}^{c}, \end{aligned}\right.$$

wie ebenso auch aus der letzten Form (403) nach dem angeführten Schema direct hervorgehen würde.

Nachdem hiemit die verlangten Resultate sämmtlich gewonnen sind, verlohnt es sich, über die bei ihrer Herleitung befolgte Methode noch eine Bemerkung anzufügen.

Es sind ausser den vorstehend bewerkstelligten Uebergängen von einem der 6 Summenausdrücke zu einem andern noch mancherlei andere Uebergänge dieser Art denkbar. So kann z. B. von den beiden Ausdrücken (404) und (405) der eine aus dem andern unmittelbar durch Umkehrung der Reihenfolge der beiden ersten Summationen $\Sigma_a\ \Sigma_c$ abgeleitet werden. Es ist jedoch beachtenswerth, dass alle diese Uebergänge — mit Ausnahme derer von (403), welche noch rückwärts eben so leicht als vorwärts ausgeführt werden mögen — mit ausserordentlich grossen Umständlichkeiten verknüpft sind.

Trotz der nicht unbeträchtlichen Vorarbeit, welche durch die Aufstellung unsrer vorangegangenen Schemata bereits geleistet ist, stellen in wahrhaft erstaunlichem Masstabe solche Weitläufigkeiten sich ein, wenn man etwa versucht, die Schritte rückwärts zu machen, welche vorwärts uns die Ausdrücke (404) und (405) geliefert haben. Wollte man z. B. aus (405) wieder den letzten Ausdruck (403) zurückgewinnen, so würde sich dies durch Umkehrung der beiden letzten Summationen $\Sigma_a\ \Sigma_b$ in jedem der 6 Terme von (405) allerdings erreichen lassen; allein es müssten z. B. bei dem vorletzten dieser Terme ausser den Fällen eines geraden und eines ungeraden n gemäss (370) auch noch die Fälle $3c \lesseqgtr 2n+2$ gesondert behandelt werden.

Man mag hieraus ersehen, wie sehr es bei dergleichen mehrfachen Summen auf eine geschickte Behandlung derselben ankommt.

§ 115. Die simultane Summation nach mehreren Variabeln.

Bisher lag stets (auf einmal) nur die Aufgabe vor, einem einzigen Argumente eines Functionsausdruckes die Zahlen einer gegebenen Reihe als successive Werthe beizulegen und hernach die Substitutionsergebnisse zu addiren.

Ganz ebenso kann man jedoch auch die sämmtlichen Argumente eines *mehrere* Variable enthaltenden Functionsausdruckes gleichzeitig eine Reihe von *Werthsystemen* durchlaufen lassen. Denkt man sich dann die Ergebnisse aller dieser aufeinanderfolgenden Systeme von gleichzeitigen Substitutionen addirt, so gelangt man zu dem Begriff

einer Summation nach mehreren Variabeln. Die Art wie — dem früheren analog — eine solche Summation in symbolischer Abkürzung angedeutet werden kann, geht alsdann aus dem Anblick des folgenden Schema's hervor:

$$(406) \quad \begin{cases} u_{a_1, b_1, c_1, \ldots} + u_{a_2, b_2, c_2, \ldots} + u_{a_3, b_3, c_3, \ldots} + \cdots + u_{a_n, b_n, c_n, \ldots} = \\ = \sum\limits_{\left[\begin{array}{l} a, b, c, \ldots = a_1, b_1, c_1, \ldots \\ \qquad\qquad a_2, b_2, c_2, \ldots \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_n, b_n, c_n, \ldots \end{array}\right]} u_{a, b, c, \ldots}, \end{cases}$$

in welchem nach Belieben auch einzelne von den a, oder von den b, u. s. w. einander gleich gedacht werden dürfen.

Zur Unterscheidung der (gleichzeitigen) Summation nach mehreren (simultanen) Variabeln von der gewöhnlichen Summation nach nur einer Variabeln, empfiehlt es sich zuweilen, für die erstere statt des Σ ein anderes S-Zeichen zu benutzen.

Diese Bezeichnungsweise ist in der That immer anwendbar und schon vortheilhaft, wenn die Glieder einer Summe aus einem einigermassen complicirten Ausdrucke dadurch hervorgehen, dass man verschiedenen Elementen desselben andre und andre Werthe beilegt. Vollends ist sie aber von grossem Nutzen, wenn die Werthsysteme, deren Zusammenstellung wiederum die „Amplitude" oder das Erstreckungsbereich der mehrfachen Summation bildet, nicht explicite einzeln („tabellarisch") angegeben zu werden brauchen, sondern einer generellen Bestimmungsart fähig sind.

In solchen Fällen, wie z. B., wenn die zusammengehörigen Werthe der verschiedenen Summationsvariabeln bestimmt werden durch zwischen diesen letzteren festgesetzte Gleichungen, ist sogar jene Bezeichnungsweise oft gar nicht zu umgehen. In diesem letzteren Falle genügt es alsdann — wie schon in § 95. angedeutet wurde — bei dem Summenausdruck rechts in (406) anstatt der *Amplitude* selbst nur *die dieselbe bestimmenden Gleichungen* unter dem Summenzeichen anzumerken.

Da z. B. im Gebiet der eigentlichen natürlichen Zahlen die Gleichung $a + b = 5$ nur durch die einander paarweise zugeordneten Werthe:

$$\begin{array}{ll} a = 4, & b = 1, \\ a = 3, & b = 2, \\ a = 2, & b = 3, \\ a = 1, & b = 4 \end{array}$$

erfüllt werden kann, so wird demnach der Summenausdruck:

$$\sum_{(a + b = 5)} x^a y^b = x^4 y^1 + x^3 y^2 + x^2 y^3 + x^1 y^4$$

bedeuten; dagegen, wenn auch die Null mit zugelassen wird, hat derselbe Ausdruck die Bedeutung:

$$\sum_{(a+b=5)} x^a y^b = x^5 y^0 + x^4 y^1 + x^3 y^2 + x^2 y^3 + x^1 y^4 + x^0 y^5 = \\ = x^5 + x^4 y + x^3 y^2 + x^2 y^3 + x y^4 + y^5.$$

Ebenso ist dann — um auch ein Beispiel anzuführen, wo der Bestimmungsgleichungen mehrere sind:

$$\sum_{\left(\substack{a+c=5,\ b+d=7 \\ c+d=4}\right)} \alpha_a \beta_b x^c y^d = \alpha_1 \beta_7 x^4 + \alpha_2 \beta_6 x^3 y + \alpha_3 \beta_5 x^2 y^2 + \alpha_4 \beta_4 x y^3 + \alpha_5 \beta_3 y^4,$$

und in solchem Falle — wie dies bei der Bestimmung von (unbekannten) Zahlenwerthen mit Hülfe synthetischer Gleichungen überhaupt stets der Fall ist — wird die Reihenfolge oder Zusammenstellung, in der die bestimmenden Gleichungen angegeben werden, gleichgültig sein, also hier z. B. auch

$$\sum_{(a+c=5,\ c+d=4,\ d+b=7)}$$

für die vorstehende Summe linkerhand geschrieben werden dürfen.

Wenn ferner einzelne von den Bestimmungsgleichungen schon von selbst aus den übrigen folgen sollten, so brauchen dieselben nicht extra angemerkt zu werden. So z. B. würde:

$$\sum_{\left[\substack{a+c=5,\ b+d=7 \\ c+d=4,\ a+b=8}\right]} \quad \text{einerlei sein mit} \quad \sum_{\left[\substack{a+c=5,\ b+d=7 \\ c+d=4}\right]},$$

da durch Subtraction der dritten Gleichung von der Summe der beiden ersten schon von selbst die vierte $a + b = 8$ hervorgeht.

Im übrigen können diese Bestimmungsgleichungen auf die mannigfaltigste Weise umgewandelt werden, ohne dass dies von Einfluss auf die Bedeutung des ganzen Summenausdrucks wäre. So z. B. kann man von den vier soeben betrachteten Bestimmungsgleichungen irgend welche drei auswählen und alleinig beibehalten, da hierdurch die vierte immer mitbedingt wird; man darf dieselben unter sich und mit beliebig angenommenen Zahlen durch erlaubte Rechnungen wie man will verknüpfen, woferne nur aus den so erhaltenen neuen Bestimmungsgleichungen nach den Regeln der allgemeinen Arithmetik stets wieder auf die alten zurückgeschlossen werden kann. —

Einfache Summationen nach *einer* Variabeln, wie sie zu Anfang (in den §§ 95. bis 101.) ausschliesslich betrachtet wurden, lassen, wenn man will, durch Beiziehung von *auxiliären* (Hilfs-) Summationsvariabeln (unter Einführung der erforderlichen Bestimmungsgleichungen) sich auch durch eine einmalige Summation nach zwei (oder mehr) simultanen Variabeln ersetzen.

In der That besteht allgemein (bei Zulassung der 0) die Identität:

$$\text{(407)} \qquad \sum_0^n{}^a u_a = \sum_{(a+b=n)} u_a,$$

Richtigkeit leicht nachzuweisen ist.

Da nämlich b in u_a gar nicht vorkommt, so werden die für diese Variable zu machenden Substitutionen (nach Einleitung No. 21.) das allgemeine Glied u_a ganz unverändert lassen. Im übrigen jedoch sind, nach Sinn und Bedeutung des Σ-Zeichens, dem a und b alle möglichen Werthe aus dem Gebiet der natürlichen Zahlen beizulegen, welche die Bedingung $a + b = n$ befriedigen. Daher hat a in der That gerade die Werthe $0, 1, 2, \ldots n$ zu durchlaufen, weil zu jedem dieser Werthe ein Werth $b = n - a$ existirt, dagegen für kein anderes a ein solcher angegeben werden kann.

Die in (407) eingeführte Bezeichnungsweise bringt allerdings den Nachtheil mit sich, dass man mit mehr (mit doppelt so viel) Summationsvariabeln, als eigentlich nöthig, zu thun bekommt.

Dagegen bietet sie auch in einem ungemein verbreiteten Falle einen erheblichen Vortheil. Wenn nämlich das allgemeine Glied in (407) so gebaut ist, dass u_a und u_{n-a} *symmetrische* Ausdrücke in Bezug auf irgend welche Buchstaben x und y sind, so wird auch die ganze Summe bezüglich ebendieser symmetrisch sein, und erscheint es häufig wünschenswerth, dies in der symbolisch abgekürzten Summe auch äusserlich zur Darstellung zu bringen.

Hat man etwa die Summe:

$$S = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + x_2 y_{n-2} + \cdots + x_{n-2} y_2 + x_{n-1} y_1 + x_n y_0,$$

so sind die vom Anfang und Ende gleichweit abstehenden Glieder derselben in Bezug auf x und y symmetrisch; es kehrt folglich bei Vertauschung von x mit y nur die Ordnung der Glieder sich um, und geht der ganze Ausdruck wieder in sich selbst über. Wollte man nun diesen Ausdruck, wie früher stets, durch eine *einfache* Summation zusammenfassen, so würde man nur unter den Darstellungen die Wahl haben:

$$S = \sum_0^n {}^a\, x_a\, y_{n-a} = \sum_0^n {}^a\, x_{n-a}\, y_a,$$

welche beide die erwähnte Symmetrie nicht ohne weiteres erkennen lassen.

Dagegen erhält man nach dem Schema (407) die Darstellung:

$$S = \sum_{(a+b=n)} x_a\, y_b,$$

in der jene Symmetrie wirklich auf die einfachste Weise zum Ausdruck gebracht erscheint. [Da nämlich in der Bedingungsgleichung a und b vertauschbar sind, kann auch die Vertauschung von a und b überhaupt hier offenbar keine Aenderung bewirken.]

Noch etwas allgemeiner hat man dementsprechend auch das Schema:

$$(408) \qquad \sum_{0}^{n} {}^{a}\, u_{a,\, n-a} = \sum_{0}^{n} {}^{a}\, u_{n-a,\, a} = \sum_{(a+b=n)} u_{a,\, b}.$$

Auch dann, wenn, wie ursprünglich, die Werthsysteme, welche die Amplitude der Summe in (406) ausmachen, explicite angegeben werden sollen, lässt sich die Darstellung (406) — durch eine einfache Uebereinkunft — für einen sehr verbreiteten Fall noch bedeutend vereinfachen. Ich meine den Fall, wo in der gedachten Amplitude die einer Summationsvariablen zukommenden Werthe sämmtlich mit den gleichen Werthsystemen aller übrigen Variabelen verbunden vorkommen. In diesem Falle kann man in der That statt der ausführlichen Amplitudenangabe (406) eine kürzere wählen, auf die Weise nämlich, wie sie ersichtlich ist aus dem folgenden Beispiel:

$$\sum_{\left[\begin{array}{r} a,b,c = 1,5,6 \\ 2,5,6 \\ 3,5,6 \\ 4,5,6 \end{array} \middle| \begin{array}{l} 1\,6\,8 \\ 2\,6\,8 \\ 3\,6\,8 \\ 4\,6\,8 \end{array}\right]} u_{a,\,b,\,c} = \sum_{\left[\begin{array}{r} a = 1,2,3,4 \\ b,\ c = 5,6 \\ 6,8 \end{array}\right]} u_{a,\,b,\,c}.$$

Statt wie früher durch das *Neben*einanderstellen der Werthe von a, b, c, ... die Zusammengehörigkeit derselben anzudeuten, kann man hier — wo diese Zusammengehörigkeit beliebig variirt werden darf, resp. muss — durch das *Unter*einanderstellen der Werthreihen darauf hinweisen, dass dieselben den Summationsvariablen „*unabhängig von einander*“ beizulegen sind.

Am bedeutendsten wird natürlich der Vortheil dieser Vereinfachung, wenn die vorhin bezüglich einer von den Summationsvariabeln gemachte Voraussetzung auch in Bezug auf die übrigen alle zutrifft. Dies mag etwa das folgende Beispiel zeigen, in welchem die Amplitude — wenn ich einen Ausdruck aus der Combinatorik entlehnen darf — geradezu aus den „Variationen“ gewisser Elemente besteht:

$$\sum_{\left[\begin{array}{r|l|l|l} a,b,c = 1,1,1 & 2\,1\,1 & 3\,1\,1 & 4\,1\,1 \\ 1,1,2 & 2\,1\,2 & 3\,1\,2 & 4\,1\,2 \\ 1,1,3 & 2\,1\,3 & 3\,1\,3 & 4\,1\,3 \\ 1,2,1 & 2\,2\,1 & 3\,2\,1 & 4\,2\,1 \\ 1,2,2 & 2\,2\,2 & 3\,2\,2 & 4\,2\,2 \\ 1,2,3 & 2\,2\,3 & 3\,2\,3 & 4\,2\,3 \end{array}\right]} u_{a,\,b,\,c} = \sum_{\left[\begin{array}{l} a = 1,2,3,4 \\ b = 1,2 \\ c = 1,2,3 \end{array}\right]} u_{a,\,b,\,c}.$$

Mit Rücksicht auf das vorstehende leuchtet ein, dass bei einer mehrfachen Summe von der Art, wie sie in § 102. betrachtet wurden, deren successive einfache Summationen sich also über von einander unabhängige Amplituden erstrecken, man diese nun ebenfalls ersetzen kann durch eine einmalige Summation nach mehreren simultanen Variabeln gemäss dem Schema:

$$(409)\quad \begin{cases} \sum\limits_{(a=a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_p)} \sum\limits_{(b=b_1,\, b_2,\, \ldots\, b_q)} \sum\limits_{(c=c_1,\, c_2,\, \ldots\, c_r)} \ldots u_{a,\, b,\, c,\, \ldots} \\ = \sum\limits_{\left[\begin{array}{l} a=a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_p \\ b=b_1,\, b_2,\, \ldots\, b_q \\ c=c_1,\, c_2,\, \ldots\, c_r \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right]} u_{a,\, b,\, c,\, \ldots} \end{cases}$$

Ueberhaupt steht nichts im Wege, für derartige mehrfache Summationen sich nur eines einzigen Summenzeichens zu bedienen, z. B. auch die dortige Doppelsumme (318) in der Gestalt zu schreiben:

$$\sum_{\substack{a=p \\ b=r}}^{\substack{b=s \\ a=q}} u_{a,\, b} = \sum_{a=p,\, b=r}^{a=q,\, b=s} u_{a,\, b}, \quad \text{etc.}$$

Sind jedoch bei einer mehrfachen Summe die Grenzen der aufeinanderfolgenden einfachen Summationen, aus denen sie sich zusammensetzt, von deren Variabeln selbst abhängig, desgleichen, wenn bei einer Summation nach mehreren gleichzeitigen Variabeln die Bestimmungsgleichungen der Amplituden so beschaffen sind, dass sie eine Abhängigkeit der den einen Variabeln zu ertheilenden Werthe von den den andern beigelegten Werthen involviren, so ist es keine so einfache Aufgabe, explicite die Werthsysteme der Amplitude anzugeben; vielmehr erfordert dies gewöhnlich resp. die ausführliche Interpretation jener mehrfachen Summe, oder die wirkliche Auflösung dieser Bestimmungsgleichungen.

Analog (295) kann man übrigens den allgemeinsten Fall (406) einer Summation nach mehreren simultanen Variabeln immer symbolisch auf die früher betrachtete Form einer einfachen und über eine Sequenz von natürlichen Zahlen erstreckten Summation nach einer einzigen Variabeln zurückführen gemäss dem Schema:

$$(410)\quad \sum_{\left[\begin{array}{l} a,\, b,\, c,\, \ldots = a_1,\, b_1,\, c_1,\, \ldots \\ \qquad\qquad a_2,\, b_2,\, c_2,\, \ldots \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_n,\, b_n,\, c_n,\, \ldots \end{array}\right]} u_{a,\, b,\, c,\, \ldots} = \sum_{r=1}^{r=n} u_{a_r,\, b_r,\, c_r,\, \ldots}$$

und auf dieser Bemerkung beruht denn auch, wie leicht einzusehen, der Beweis der nunmehr auszusprechenden Behauptung, dass die Sätze der §§ 98., 101. und 103. über Multiplication von Summen mit constanten Zahlen oder mit andern Summen, über die distributive Eigenschaft des Summenzeichens und über die additive oder subtractive Vereinigung von Summenausdrücken mit einerlei Amplitude, auch ohne

weiteres auf die mehrfachen Summationen (406) ausgedehnt werden dürfen. Namentlich verdienen noch die vier Sätze hervorgehoben zu werden, welche als Verallgemeinerungen der in den §§ 102. und 103. angeführten Theoreme zulässig sind, nämlich:

I. *Eine jede Reihe von fortschreitend auszuführenden Summationen ist äquivalent mit einer einzigen Summation, welche gleichzeitig auf alle Variabeln jener ersteren Bezug hat, sobald nur die bei einer jeden von diesen successiven Summationen auftretenden Variabeln in den Bedingungsgleichungen der übrigen nicht vorkommen. Die Amplitude der resultirenden Summation ist alsdann bestimmt durch die Zusammenstellung sämmtlicher Bedingungsgleichungen der componirenden Summationen und darf die Ordnung dieser letzteren beliebig abgeändert werden.* Umgekehrt:

II. *Wenn sich die beschränkenden Gleichungen einer Summe in lauter Gruppen derart sondern lassen, dass sich die Gleichungen einer jeden Gruppe nur auf eine einzige oder auf einige von den Variabeln beziehen und diese letzteren in keiner andern Gruppe vorkommen, so lässt sich die ganze Summation ersetzen durch mehrere einzelne successive Summationen von beliebiger Reihenfolge, welche nach Zahl und Amplitude durch die genannten Gruppen von beschränkenden Gleichungen bestimmt sind.*

Z. B. es ist:

$$\sum_{\left(\substack{a+b=p \\ c+d=q \\ d+e=r}\right)} u_{a,\, b,\, c,\, d,\, e} = \sum_{(a+b=p)} \; \sum_{\left(\substack{c+d=q \\ d+e=r}\right)} u_{a,\, b,\, c,\, d,}$$

vorwärts oder rückwärts gelesen. —

III. *Summenausdrücke können miteinander multiplicirt werden, indem man das Product ihrer allgemeinen Glieder nach allen Variabeln derselben simultan summirt über eine Amplitude, welche bestimmt ist durch das System der den Factoren einzeln zukommenden Bedingungsgleichungen.* Umgekehrt:

IV. *Wenn sich das allgemeine Glied einer Summe so in Factoren zerlegen lässt, dass keiner derselben eine Variable enthält, die auch in einem der andern vorkäme, und wenn ausserdem auch die beschränkenden Gleichungen der Summe in Gruppen geschieden werden können, die sich jenen Factoren so einzeln zuordnen, dass sie ausschliesslich nur die in dem zugeordneten Factor vorkommenden Variabeln enthalten, so zerfällt die ganze Summe in ein Product von einfacheren Summen, deren allgemeine Glieder eben jene Factoren sind, und deren Amplituden je durch die zugeordnete Gruppe von beschränkenden Gleichungen bestimmt werden.*

So ist etwa:

$$\sum_{\begin{pmatrix} a+b=p \\ c+d=q \\ d+e=r \end{pmatrix}} u_{a,\,b}\, v_{c,\,d,\,e} = \left\{ \sum_{a+b=p} u_{a,\,b} \right\} \cdot \left\{ \sum_{\begin{pmatrix} c+d=q \\ d+e=r \end{pmatrix}} v_{c,\,d,\,e} \right\}.$$

So oft indessen — wie in vorstehenden Exempeln — die Amplituden der Summen durch (die sog. „beschränkenden") Gleichungen bestimmt werden, ist es eigentlich nöthig, die Summationsvariabeln (hier a, b, c, ...) erst als solche kenntlich und von sich aus unterscheidbar zu machen von Constanten (wie p, q, r), die ja auch in dem allgemeinen Gliede vorkommen können. Zu dem Ende empfiehlt es sich dann, die Namen jener Variabeln regelmässig einem *eigenen* Alphabete — wie etwa dem kleinen deutschen — zu entlehnen.

Der Beweis der Sätze I bis IV sowie überhaupt der meisten des gegenwärtigen und schon einiger früheren Paragraphen (102, 103 etc.) ist selbstredend leicht durch das vollständige Inductionsverfahren in völlig strenger Form zu führen. — Vergl. Ohm (l. c.)

§ 116. Das Productzeichen Π.

Von ähnlicher Bedeutung wie das Summenzeichen Σ ist das Productzeichen Π. Wenn man mit Producten aus vielen gleichartig gebildeten (oder bezeichenbaren) Factoren zu operiren hat, so dient dasselbe dazu, das Anschreiben dieser letzteren auf das eines einzigen Factors zurückzuführen, und auf diesen, den „allgemeinen Factor" alsdann sämmtliche Operationen zu übertragen. Sinn und Anwendungsweise des Zeichens Π offenbaren sich zur Genüge in dem allgemeinen Schema:

$$\Pi_{(a = a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_n)} u_a = u_{a_1} u_{a_2} u_{a_3} \ldots u_{a_n}, \tag{411}$$

sowie auch in dem specielleren:

$$\Pi_{a=0}^{a=n} u_a = u_0 u_1 u_2 \ldots u_n, \tag{412}$$

dessen linkseitiger Ausdruck gesprochen wird: „(Das Product) Π nach a von 0 bis n, genommen von u_a."

Da die Multiplication für sich allein betrachtet ebendenselben Gesetzen unterworfen ist, wie die Addition, so werden alle Behauptungen, die wir über symbolisch dargestellte Summen ausgesprochen haben, soferne dieselben von *reinem* Charakter sind, nämlich lediglich auf die erste Operationsstufe sich beziehen, ganz ebenso auch Geltung behalten, wenn man alle Operationen um eine Stufe erhöht. Nur auf die Gleichungen in den Grenzen, überhaupt auf die Bestimmungs-

gleichungen der Amplitude und auf die Ausdrücke, welche die von den Summationsvariabeln zu durchlaufenden Werthe darstellen (nebst deren allenfalls in Betracht kommenden gegenseitigen Beziehungen), darf diese Operationsstufenerhöhung *nicht* ausgedehnt werden. Denn sollte letzteres ebenfalls geschehen dürfen, so hätte man offenbar von vornherein dem Productausdruck eine andere Bedeutung unterlegen müssen. Entsprechend der Definition (269) des Summenausdruckes:

$$\sum_{p}^{p+q}{}^{a} u_a = u_{p+0} + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_{p+q}$$

hätte man alsdann definiren müssen:

$$\prod_{a=p}^{a=p\,.\,q} u_a = u_{p\,.\,0} \cdot u_{p\,.\,1} \cdot u_{p\,.\,2} \ldots u_{p\,.\,q} = u_0\, u_p\, u_{2p}\, u_{3p} \ldots u_{qp},$$

während jedoch nach der angenommenen Definition (411) diesem Productenausdruck die Bedeutung zukommt:

$$\prod_{a=p}^{a=p\,.\,q} u_a = u_p \cdot u_{p+1} \cdot u_{p+2} \ldots u_{pq-1}\, u_{pq}\,.$$

M. a. W. ist, wie man sieht, jene Stufenerhöhung schon in der Definition des Productausdruckes von vornherein auf die Darstellung (5) der von der Variabeln der Reihe nach anzunehmenden Zahlenwerthe *nicht* mit ausgedehnt worden, und sie wird deshalb hier auch in den weiter noch an jene Definition sich knüpfenden Folgerungen stets auszuschliessen sein.

Durch das angegebene Verfahren der Stufenerhöhung mit Rücksichtnahme auf die namhaft gemachte Beschränkung lassen nun die Gesetze des Productenzeichens Π aus den Formeln für Σ sich direct von den Paragraphen 95. bis 102. und 104. bis 116. *abschreiben.* [Nur zu § 98. ist zu bemerken, dass zwar das Nachmultipliciren (und Dividiren) — in Gestalt des Potenzirens (und Radicirens) — ein distributives Analogon hat; das Vormultipliciren dagegen nicht.]

Aehnliches gilt auch für den Text dieser Paragraphen, wobei nur darauf aufmerksam gemacht werden muss, dass ein den Worten „Summation", „summiren" entsprechender Kunstausdruck vermisst wird. Das analog gebildete „Production", „produciren" besitzt bereits eine fremdartige und mit dem gegenwärtigen Zweck völlig unvereinbare Bedeutung, und so lange man also nicht zu Neubildungen wie etwa „*Productation*", „*productiren*" seine Zuflucht nehmen will — was sich vielleicht empfehlen möchte — wird man sich mit (etwas weitläufigen) Umschreibungen behelfen müssen. Man wird nämlich, wenn mit dem Zeichen Π_a an einem Ausdruck oder einer Gleichung operirt werden

soll, eben zu sagen haben, dass man sich davon das Product gebildet denken solle nach der Variabeln a, zwischen gewissen Grenzen genommen oder über gewisse Werthe von a erstreckt. —

Zum Ueberfluss kann man noch jeden Productausdruck direct auf einen Summenausdruck zurückführen, oder umgekehrt, indem — immerhin unter Voraussetzung der Ausführbarkeit der inversen Operationen — die beiden Schemata gelten:

$$(413) \qquad \sum_0^n {}^a u_a = \overset{x}{\log} \prod_{a=0}^{a=n} (x^{u_a}),$$

$$(414) \qquad \Pi_{a=0}^{a=n} u_a = x^{\left(\Sigma_{a=0}^{a=n} \overset{x}{\log} u_a\right)},$$

welche aus der folgenden die Verallgemeinerung von (159), 1) darstellenden Formel:

$$(415) \qquad \sum_0^n {}^a \overset{x}{\log} u_a = \overset{x}{\log} \prod_{a=0}^{a=n} u_a$$

[oder kürzer: $\Sigma \log = \log \Pi$] mit Leichtigkeit abzuleiten sind.

Mit Rücksicht auf die Leichtigkeit all' dieser Uebergänge will ich nun das angedeutete Uebersetzungsgeschäft, resp. die Stufenerhöhung, nicht wirklich ausführen, sondern mich damit begnügen, beispielsweise nur die folgenden wenigen Formeln hervorzuheben, neben welche ich rechts die Nummern je derjenigen auf Summen bezüglichen Gleichungen anfüge, denen sie analog gebildet sind:

$$(416) \qquad \Pi_{a=p}^{a=p} u_a = u_p \qquad (274);$$

$$(417) \qquad \Pi_{a=p}^{a=q} u = u^{q-p+1} \qquad (272);$$

$$(418) \qquad \Pi_{a=p}^{a=q} (x u_a) = x^{q-p+1} \Pi_{a=p}^{a=q} u_a \qquad (310);$$

$$(419) \qquad \left\{\Pi_{a=p}^{a=q} u_a\right\}^x = \Pi_{a=p}^{a=q} u_a^x \qquad (284);$$

$$(420) \qquad \Pi_{a=p}^{a=q} (u_a v_a w_a \ldots) = \Pi_{a=p}^{a=q} u_a \,.\, \Pi_{a=p}^{a=q} v_a \,.\, \Pi_{a=p}^{a=q} w_a \ldots. \qquad (308);$$

$$(421) \qquad \Pi_{a=p}^{a=q} u_a^{\alpha_a} \,.\, \Pi_{b=p}^{b=q} u_b^{\beta_b} \,.\, \Pi_{c=p}^{c=q} u_c^{\gamma_c} \ldots. = \Pi_{a=p}^{a=q} u_a^{\alpha_a+\beta_a+\gamma_a+\cdots} \qquad (311).$$

Zum richtigen Verständniss dieser Formeln ist es nöthig, sich gegenwärtig zu halten, dass der Gebrauch der Klammern darin so geregelt zu denken ist, als ob die Productbildung (das „Productiren")

eine *mittlere* Operationsstufe zwischen der Multiplication und der Elevation einnähme [cf. § 73. und 96.].

Man könnte nun weiter auch von „*Doppel-*“ und „*mehrfachen Producten*“ sprechen, etc. etc. —

Bei Anwendung des Productenzeichens lassen jetzt auch manche von den früheren auf Summen bezüglichen Formeln sich noch kürzer darstellen. Namentlich die Gleichung (321) lässt sich nun so schreiben:

$$\prod_{r=1}^{r=n} \sum_{a_r=p_r}^{a_r=q_r} u_{a_r} = \sum_{a_1=p_1}^{a_1=q_1} \sum_{a_2=p_2}^{a_2=q_2} \cdots \sum_{a_n=p_n}^{a_n=q_n} \prod_{r=1}^{r=n} u_{a_r}, \tag{422}$$

oder „*symbolisch*“ in der noch conciseren Weise:

$$\prod_{r=1}^{r=n} \sum_{a_r=p_r}^{a_r=q_r} u_{a_r} = \left(\prod_{r=1}^{r=n} \sum_{a_r=p_r}^{a_r=q_r} \right) \prod_{r=1}^{r=n} u_{a_r}, \tag{423}$$

welche erkennen lässt, dass wenn mit dem Zeichen Π an einem Summenausdruck operirt werden soll, dasselbe sich gewissermassen *distributiv* auf das Summationssymbol selbst und auf dessen Operationssubject (das allgemeine Glied) vertheilt. —

Unter Umständen wird es vermuthlich später wünschenswerth erscheinen, neben den Summations- und Productationszeichen auch noch für andere Arten von Verknüpfungsprocessen zahlreicher Elemente eigenthümliche symbolisch zusammenfassende Zeichen zu besitzen — so z. B. für die Angabe der Argumentenreihe einer von sehr viel Variabeln abhängigen Function, desgleichen ferner für die collective Zusammenfassung (oder „logische Addition“) von Zahlenwerthen zu einem vieldeutigen Ausdrucke u. a. m. Sobald aber solches einmal zum praktischen Bedürfniss werden sollte, dürfte durch das vorangegangene für die Anwendung auch dieser neuen Zeichen schon im voraus jede Schwierigkeit beseitigt sein.

Zusatzbemerkungen.

In der Absicht, das Buch so vollkommen zu gestalten, als mir bis zur Vollendung des [schon im September 1872 begonnenen und durch den Setzerstrike lang unterbrochen gewesenen] Druckes erreichbar war, füge ich nachstehend einige Bemerkungen bei, die sich mir zu spät aufdrängten, um während des Satzes berücksichtigt zu werden.

Zu S. 3, Z. 5 v. u. Ein noch in andrer Beziehung lehrreiches Beispiel würde etwa die Anforderung bilden: die Schönheiten eines Kunstwerkes zu zählen. —

Zu S. 4, Z. 14 v. o. wünsche ich nachzutragen: Bei dem Wort „*Reihe*" sowie auch bei den damit sinnverwandten „*System*", „*Schaar*" u. s. w. tritt jedoch die *Absicht der quantitativen Vergleichung*, welche dem Begriff der „*Menge*" anhaftet, mehr in den Hintergrund.

Zu S. 19. Das angeführte „Theorem" wird sicher von jedermann erstmalig nur durch *Induction* aus der Erfahrung gewonnen. —

Zu S. 26. Dem Satze von Einleitung Nr. 18. liegt strenge genommen eine (auf S. 24 stillschweigend eingeführte) *Voraussetzung* zum Grunde — die nämlich, dass der Werth eines jeden Ausdruckes oder das Ergebniss einer jeden Rechnungsart nicht von der Entstehung oder Bezeichnungsweise, sondern nur von der Bedeutung (dem Werthe) der darin verknüpften Operationsglieder abhängt. Im Hinblick darauf, und entsprechend den S. 22 in Nr. 16. vorangeschickten Bemerkungen erscheint es eigentlich correcter, den Satz (und damit erst die Vertauschbarkeit gleicher Zahlen) für jede der später einzuführenden Rechnungsoperationen einzeln zu begründen, wobei man bei der Addition genöthigt sein wird, sich auf eine allgemeine psychologische Thatsache (oder Erfahrung) zu berufen:

Wenn $a = \alpha$ und $b = \beta$, so ist zwischen den Einern von a und denen von α ohne Rest eine eindeutige Zuordnung möglich, desgl. zwischen den Einern von b und β. Die gedachte Thatsache ist nun die, dass diese Zuordnung oder Verknüpfung in unserm Geiste wie vor unsern Augen auch noch *fortbesteht*, während und nachdem man die Einer von a und b zur Summe $a + b$ zusammengefügt, ebenso auch α und β durch Addition verbunden hat (cf. § 1.). Daraus folgt denn: $a + b = \alpha + \beta$, wie zu beweisen.

Für die Multiplication etc. ergibt sich der Satz als besondrer Fall des auf mehrere Glieder ausgedehnten Satzes der Addition. Für die inversen Operationen wird er dann durch die Betrachtungen des § 40. von selbst miterledigt. —

Zu S. 38 und 42 (Einl. No. 25. und 26.). Es empfiehlt sich, die verschiedenen Eintheilungsarten der Zahlen und der Gleichungen auch in *Tabellen*form zur Uebersicht zu bringen.

Für die Eintheilung der Zahlen nach ihrer *Bezeichnungsweise* hat man etwa das Schema:

Zahlzeichen			
numerisches		*literales*	
einfaches	*zusammengesetztes*	*einfaches*	*complicirtes*
(Ziffer) z. B. 5	z. B. 12 — 3	z. B. a	(Buchstaben-ausdruck) z. B. $5a + 1$, xy, a_n.

Es soll dies ausdrücken, dass jedes Zahlzeichen *entweder* ein „numerisches" (nur mittelst Ziffern gebildetes) *oder* ein „literales" ist (d. h. wenigstens *einen*

Buchstaben enthält), sowie, dass jede dieser beiden Arten von Zahlzeichen wieder in „einfache“ und „zusammengesetzte“ einzutheilen ist.

Hinsichtlich solcher Zahlzeichen wie $x + 5 - x$ oder $\frac{5x}{x}$, in deren Ausdruck die Buchstaben sich nach den Regeln der allgemeinen Arithmetik *herausheben*, könnte noch ein Zweifel entstehen, ob dieselben zu den numerischen oder zu den literalen zu rechnen seien. Das erstere ist nur insofern gestattet, als jene Regeln stets als anerkannt vorausgesetzt werden.

Die Zusammengesetztheit (Complication) der Zahlzeichen könnte auch als oberstes Eintheilungsprincip über die Rücksicht auf den alphabetischen Charakter (derselben oder ihrer Bestandtheile) erhoben werden. —

Obiges vorausgesetzt werden nun die nachfolgenden Schemata ohne weiteres verständlich erscheinen.

Eine Eintheilung der Zahlzeichen nach ihrer *Deutigkeit* — obwohl erst für Vorgerücktere von Wichtigkeit — mag hier ebenfalls angeführt werden:

Zahlenausdruck

sinnlos,	*eindeutig*	*mehrdeutig*,
undeutig, eine nicht vorhandene, sozusagen „unmögliche“ Zahl (sit venia verbo!) vorstellend, z. B. x, wenn darunter diejenige Zahl verstanden werden sollte, die sich selbst um 1 übertrifft (die Gleichung $x + 1 = x$ erfüllt). Z. B. „diejenige Ziffer des dekadischen Systems, welche um 8 grösser als 5 ist.“ Z. B. die „natürliche Zahl 2 — 5“ u. a.	Eine jede Zahl kann nur durch ein eindeutiges Zahlzeichen unzweideutig vorgestellt werden.	mehrere, eine ganze Gattung von Zahlen auf einmal umfassend. Z. B. $(\sqrt{9}) = \pm 3$. Z. B. derjenige Zahlenausdruck, welcher die „Wurzeln“ der Gleichung: $x(x^2 + 11) = 6(x^2 + 1)$ vollständig angäbe. Derselbe müsste die Werthe 1, 2 und 3 unter sich begreifen.

Eintheilung der Zahlen nach der Art ihrer *Bestimmung* (Determination):

Zahl

bestimmt (num. determinatus)		*unbestimmt*,
bekannt,	*unbekannt*,	
gegeben, meist numerisch, wie 1873, selten literal, wie e, π.	gesucht, oft literal, und durch eine Gleichung bestimmt, wie x in $2x + 1 = 9$ oder in $x(xx - 1) = 60$; oft auch durch ihre Benennung bestimmt als Anzahl oder Masszahl von Objecten.	und zwar *theilweise* oder *völlig*, und alsdann „willkürlich, arbiträr, beliebig, allgemein“ (num. indeterminatus) — selten numerisch $\left(\frac{0}{0}\right)$, meist literal, wie a und b in der Gleichung: $a + b - b = a$, oder wie x in der Gleichung: $x = \frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2}$.

Zusammengesetzte numerische Zahlausdrücke dürfen schon *vor* ihrer Ausrechnung als bekannt angesehen werden, wenn die Schwierigkeiten der letzteren principiell erledigt sind.

Eine *unbestimmte* Zahl unterscheidet sich von einem *vieldeutigen* Zahlzeichen dadurch, dass man bei letzterem sich stets alle Werthe desselben gegenwärtig halten muss, wogegen die erstere in Gedanken immer eindeutig verstanden und sei es nun willkürlich irgendwie, sei es durch anderweitige erst noch in Aussicht stehende Festsetzungen vollends bestimmbar gedacht wird. Die etwas subtile Unterscheidung wird durch die Praxis völlig klar gestellt. —

In einem gegebenen Zahlengebiete hat man die *Eintheilung der Gleichungen*:

Gleichung			
numerisch (d. i. *keine* literale Zahl enthaltend)		*literal* (wenigstens *eine* literale Zahl enthaltend)	
richtig, wahr, in den Festsetzungen der allgemeinen Arithmetik mit inbegriffen, in „Uebereinstimmung“ mit denselben, z. B. $2+3=5$.	unrichtig, *falsch*, im „Widerspruch“, mit diesen Conventionen wie $2+3=7$.	*analytisch*, (eine „Formel“), d. i. unbedingt für alle Werthe oder Werthsysteme der literalen Zahlen richtig, wie $a(b+c)=ab+ac$, $x=\frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{2}$.	*synthetisch*, nicht für alle, sondern nur (bedingt) für gewisse, oder für gar keine Werthe (-systeme) der literalen Zahlen erfüllt, wie: $(a+b)^2=a^2+b^2$, $2x+1=9$, $x+1=x+2$.

Bei dieser Classification sind literale Zahlen, denen eine conventionell feststehende numerische Bedeutung zukommt (wie π etc.) den numerischen gleich zu achten.

Es ist frühzeitig darauf aufmerksam zu machen, dass das Ansetzen synthetischer Gleichungen leicht, dagegen das Bilden von Formeln eine *Kunst* ist, welche die Kenntniss der Gesetze algebraischer Operationen voraussetzt. —

Zu S. 46, Z. 4 v. u. sqq. Ueber diesen Punkt liesse sich streiten. Wenn man jedem System von Argumentwerthen statt eines einzigen sogleich ein ganzes System von Functionswerthen entsprechen liesse [von veränderlicher Anzahl, also nicht gerade ein System von Functionen im gewöhnlichen Sinne bildend], so würde man allerdings einen noch allgemeineren Begriff erhalten, von dem es fraglich, ob er noch mit dem Namen der „Function“ zu benennen.

Wenn in der Functionentheorie bereits von „mehrwerthigen“ Functionen gesprochen wird, so ist das doch nur ein terminus technicus, um eine gewisse Klasse von Functionen zu bezeichnen (die durch Zerfällung in Blätter auf bekannte Weise eindeutig gemacht werden).

Mir erscheint es jedenfalls rathsam, bei den Functionen wie bei den Zahlen die Vieldeutigkeit nicht als ein Merkmal ihrer selbst, sondern nur ihres *Ausdruckes* hinzustellen, gleichwie überhaupt Zweideutigkeit und Unbestimmtheit nicht den Dingen selber, sondern nur dem Verbalausdruck unsrer Vorstellungen über dieselben anhaften kann. Schon die bereits geläufige Bezeichnungsweise der Operationen als „vieldeutiger“ erscheint genau genommen als eine uneigentliche.

Zu S. 48. Die symbolische Functionenbezeichnung ist analog der literalen Zahlendarstellung. Mit einem Buchstaben wie f bezeichnen wir (kurz gesagt) zwar eine von vornherein beliebige, dann aber — nachdem sie einmal gedacht ist — im Laufe der Untersuchung immer die nämliche Function.

Zu S. 90 (197 und 217—220). Die Behandlungsweise des § 19. findet sich z. B. in dem Lehrbuch von Orelli (Zürich 1872). Die Zusammenfassung des § 61. ist in vielen Lehrbüchern zu finden — zum ersten mal, wie es scheint, bei Müller (l. c.). Die Conventionen über Klammern sind sehr präcis in Bardey's Aufgabensammlung (Leipzig 1871) angegeben und durchgehends eingehalten.

Zu S. 104, Z. 13 sq. und 5 sq. v. u. Obwohl in der That hier die Operation des Exponenzirens mehrmals nacheinander ausgeführt zu denken ist, ist doch der Wortausdruck der beiden Sätze im Hinblick auf die S. 59 gegebene Erklärung der „fortschreitenden“ Ausführung einer Operation nicht ganz correct. Es müsste darnach jeweils nicht *mit* dem Ergebnisse der nächste Factor, sondern je das Ergebniss *mit* dem nächsten Factor weiter exponenzirt gedacht werden.

Offenbar wären hier (für die nicht-commutativen Operationen) eigentlich zweierlei Kunstausdrücke Bedürfniss, als welche man *activ fortschreitend* und *passiv fortschreitend* (oder vielleicht auch „voreinander“ und „nacheinander“) verwenden könnte.

Zu S. 115 und 116. Die Existenz eines Subtractions- etc. Verfahrens, oder die Möglichkeit einer methodischen Auffindung der unbekannten Werthe $x=a-b$, bildet vorerst eine unerwiesene Annahme. Da indessen der Werth der Unbe-

kannten in allen Fällen, wo die Aufgabe lösbar ist, sich als ein bestimmter herausstellt *und sich errathen lässt*, so wird der Anfänger leicht zu bewegen sein, jene einstweilen hypothetisch zuzugeben.

Zu S. 128, Z. 13 v. u. Aehnlich könnte man (wenn auch etwas weniger ungezwungen) sagen: $\frac{a}{b}$ bedeutet den Coefficienten desjenigen Vielfachen von b, welches gleich a ist; $\sqrt[b]{a}$ bedeutet die Basis desjenigen Exponentials von b, welches gleich a ist. —

Der Verf.

Druckfehler und Berichtigungen.

S. 6, Z. 6 v. o. statt Schattenparthieen lies Schattenpartieen.
S. 8, Z. 2 v. o. statt wohl lies fast.
S. 8, Z. 4 und 5 v. u. statt in diesem lies im vorigen.
S. 25, Z. 7 v. o. sind die Worte fälschlich noch zu streichen.
S. 26, Z. 10 v. o. statt gleich ist lies gleichgesetzt erscheint.
S. 26, Z. 8 v. u. ist statt Trugschlüsse eigentlich zu lesen Fehlschlüsse.
S. 37, Z. 8 v. u. sind die Worte in der That zu streichen.
S. 50, Z. 8 v. o. statt **28** lies **29**.
S. 120, Z. 12 v. u. statt 75 lies 74.
S. 167, Z. 10 v. u. statt $B \uparrow C)^0$ lies $(B \uparrow C)^0$.
S. 185, Z. 5 v. o. im Wurzelexponenten statt $\log n$ lies $\overset{a}{\log} n$.
S. 194, Z. 10 v. o. statt lammer lies Klammer.
S. 205, Z. 8 v. u. statt $\sqrt{a}$ lies $\sqrt[c]{a}$.
S. 225, Z. 1 v. u. statt dieser lies der.

3
JW





